

01;03

Влияние внешнего энергоподвода в область ударного слоя на параметры ударной волны

© В.Ю. Голятин,¹ В.В. Кучинский,² В.С. Сухомлинов¹

¹ Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, 198903 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: SUKHOMLINOV@POBOX.RU

² Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем, 296066 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: AJAX@COMSET.NET

(Поступило в Редакцию 28 мая 2004 г.)

Получена система уравнений, описывающих сверхзвуковое движение газа при наличии теплового источника в области фронта ударной волны. Выведены соотношения между параметрами газа в возмущенной и невозмущенной областях, которые являются обобщением классических соотношений Гюгонио–Ренкина. Приведены формулы для расчета параметров потока при энергоподводе в область ударного слоя. Показано, что есть критическая интенсивность подвода энергии, при которой не существует стационарного решения системы уравнений законов сохранения для параметров газа по обе стороны ударного слоя.

Введение

Ранее рядом авторов [1–3] изучалось влияние внешнего энергоподвода перед фронтом ударной волны на аэродинамические характеристики различных тел, движущихся со сверх- и гиперзвуковыми скоростями. Вместе с тем ясно, что интенсивность ударной волны (а значит, и лобовое сопротивление движению обтекаемого тела) можно изменять, создавая области энерговыделения за фронтом ударной волны. Если рассмотреть, например, прямой скачок плотности в газе, то интенсивность ударной волны однозначно определяется законами сохранения массы, импульса и энергии при переходе через ударный слой. Дополнительное энерговыделение за фронтом ударной волны будет видоизменять по крайней мере энергообмен между областями, непосредственно прилегающими к ударному слою и таким образом влиять на соотношение основных параметров, ответственных за перенос энергии, импульса и массы через скачок уплотнения, т.е. изменять интенсивность этого скачка.

Представляет несомненный интерес исследование влияния энерговыделения в области, прилегающей к ударному слою за фронтом ударной волны при трансзвуковых скоростях, т.е. в случае слабых ударных волн. Подвод энергии в область за ударным фронтом, а также непосредственно в области возможного образования ударного слоя может изменить динамику образования самого ударного слоя. Изучение этих процессов необходимо для решения актуальных прикладных проблем, таких как переход через звуковой барьер, обеспечение соответствующей безопасности такого перехода, снижение динамических нагрузок на конструкцию летательного аппарата.

Точная физическая постановка задачи и ее математическая алгоритмизация сводятся, очевидно, к следующему. В области параметров газа, где применим подход к описанию течения газа в форме гидродинамики,

записывается полная система уравнений Навье–Стокса и задаются макропараметры газа на бесконечности вверх по потоку (т.е. в невозмущенной области). Постулируется существование неоднородности плотности газа, движущейся с некоторой постоянной скоростью относительно неподвижной системы координат. В системе уравнений движения учитывается внешний источник тепла,двигающийся со скоростью движения возмущения плотности.

В данной работе получены лишь результаты относительно поведения макропараметров газа в области ударной волны, т.е. интегральные соотношения. Такой подход позволяет выяснить некоторые важнейшие принципиальные особенности влияния внешнего энергоподвода на параметры ударной волны.

Основные уравнения

Рассмотрим законы сохранения интеграла столкновений кинетического уравнения Больцмана применительно к изолированному объему газа $V = V(t)$, ограниченному поверхностью $\Sigma_p(t)$ (рис. 1), где t — время.

Закон сохранения массы газа и уравнение Эйлера описываются следующими выражениями [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} - [\mathbf{U} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}] = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (2)$$

где ρ — плотность, \mathbf{U} — массовая скорость газа на границе объема, а закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} U^2 \right) dV = Q_m, \quad (3)$$

где величина $Q_m = \int_{V(t)} q dV$ учитывает выделение энергии в объеме от источника мощностью q , ε — внутрен-

няя энергия единицы массы газа, внутренним трением пренебрегаем.

Формула (3) преобразуется к виду

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} U^2 \right) \right\} dV + \int_{\Sigma(t)} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} U^2 \right) \right] \mathbf{U} d\Sigma = - \int_{\Sigma(t)} p(\mathbf{U} d\Sigma) + \int_{V(t)} q dV, \quad (4)$$

откуда по теореме Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} U^2 \right) \right\} + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{U} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} U^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] = q. \quad (5)$$

Обобщенные соотношения Гюгионо—Ренкина

Предположим, что в течении газа возникают условия, когда параметры потока \mathbf{U} , ρ , p , T (где T — температура газа, p — давление) резко меняются в пределах зоны порядка нескольких длин свободного пробега молекул газа относительно упругих столкновений. Зона больших градиентов параметров потока заменяется поверхностью разрыва и считается, что при прохождении через такую поверхность параметры потока изменяются скачкообразно, т.е. терпят разрыв. Скачок уплотнения принято называть фронтом ударной волны.

Поверхность Σ_p (рис. 1) слева направо пересекает поток газа, имеющий слева от поверхности параметры \mathbf{V}_1 , ρ_1 , p_1 и T_1 , а справа — \mathbf{V}_2 , ρ_2 , p_2 и T_2 . Относительно неподвижной системы координат поверхность движется со скоростью \mathbf{U} . В системе координат, связанной с поверхностью, параметры потока слева и справа от поверхности будут $\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{U}$; ρ_1 , p_1 , T_1 и $\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{U}$; ρ_2 , p_2 , T_2 соответственно. Выделим некоторый произвольный объем $V(t)$ в газе, ограниченный поверхностью S и содержащий внутри себя часть поверхности разрыва Σ_p . Максимальное расстояние от

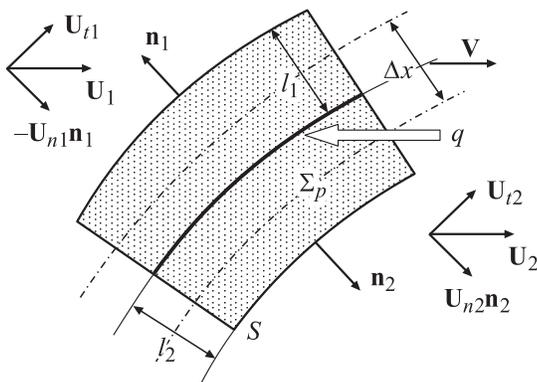


Рис. 1. К выводу законов сохранения при пересечении потоком газа поверхности разрыва Σ_p .

поверхности S до Σ_p слева от поверхности разрыва равно l_1 , а справа — l_2 . Пользуясь законами сохранения массы, импульса и энергии в форме, полученной выше, и переходя к пределу $l_1, l_2 \rightarrow \Delta x/2$, где Δx — ширина ударного слоя (порядка нескольких длин свободного пробега λ), можно получить следующие соотношения между параметрами потока слева и справа от поверхности разрыва:

$$\rho_1 U_{n1} = \rho_2 U_{n2}, \quad \rho_1 U_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 U_{n2}^2 + p_2,$$

$$U_{t1} = U_{t2}, \quad U_{k1} = U_{k2},$$

$$\left(\frac{1}{2} U_{n1}^2 + i_1 \right) \rho_1 U_{n1} = \left(\frac{1}{2} U_{n2}^2 + i_2 - W \right) \rho_2 U_{n2}, \quad (6)$$

где $W = q\Delta x/\rho_2 U_{n2}$, q — объемная мощность источника тепла в ударном слое, $i = \varepsilon + p/\rho$ — энтальпия газа; U_n — нормальная; U_t, U_k — тангенциальные составляющие скорости \mathbf{U} относительно поверхности разрыва.

Для дальнейших преобразований используем уравнение состояния газа. Для идеального газа

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho} \frac{1}{\gamma - 1},$$

$c^2 = \gamma p/\rho$ — скорость звука в газе;

$$i = \frac{c^2}{\gamma - 1}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

где C_p, C_v — удельные теплоемкости газа при постоянных p и V соответственно.

С использованием этих равенств и формул (6) можно получить следующую формулу для отношения давления за фронтом ударной волны p_2 к давлению перед фронтом p_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} - \frac{2\gamma M_1(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{q\Delta x}{(p_2 - p_1)c_1} = 1 + \chi_0 - \frac{2\gamma M_1(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{q\Delta x}{(p_2 - p_1)c_1}, \quad (7)$$

где $M_1 = U_{n1}/c_1$ — число Маха перед фронтом ударной волны.

Эта формула и соответствующее выражение для ρ_2/ρ_1 при $q = 0$ переходят в известные соотношения Гюгионо, связывающие параметры потока идеального газа до и после скачка

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} = 1 + \chi_0,$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + M_1^2(\gamma - 1)} = \left(1 - \frac{\chi_0}{\gamma M_1^2} \right)^{-1},$$

$$\chi_0 = \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1}, \quad (8)$$

где величина χ_0 — интенсивность ударной волны в отсутствие подвода энергии.

Из формул (8) следует, в частности, тот известный факт [5], что при $M_1 \rightarrow \infty$ $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ и $\rho_2/\rho_1 \rightarrow (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

Приведем еще одну формулу, которая следует непосредственно из двух первых равенств (6) и связывает отношение плотностей ρ_2/ρ_1 с отношением давлений p_2/p_1

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[1 - \frac{p_2 - 1}{M_1^2 \gamma} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Ширина ударного слоя Δx однозначно определяется числом Маха M_1 , или, что то же самое, интенсивностью ударной волны $\chi = (p_2/p_1) - 1$, поскольку χ является однозначной функцией M_1 : $\chi = \chi(M_1)$. Введем функцию $\Delta x = \Delta x(\chi)$ и из формулы (7) получим основное уравнение для определения отношения p_2/p_1

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \chi_0 - \frac{2\gamma M_1}{(\gamma + 1)} \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)} \frac{q \Delta x}{c_1 \varepsilon_1 \rho_1} = 1 + \chi_0 - \frac{\beta M_1}{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}, \quad (10)$$

где введена основная характеристика энерговклада, используемая при дальнейшем рассмотрении, — безразмерный параметр энерговклада β

$$\beta = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{q \Delta x(\chi)}{c_1} \right) \frac{1}{\rho_1 \varepsilon_1}. \quad (11)$$

Как видно из формул (7), (10), (11), изменение параметров ударной волны связано с отношением подводимой (в единицу объема) энергии $q \Delta x(\chi)/c_1$ к энергии $\varepsilon_1 \rho_1$, которую несет с собой набегающий воздушный поток. Поэтому именно параметр β определяет, как складывается физическая ситуация при подведении энергии в область ударного слоя. Определить же требуемую для этого плотность энергии q можно только после нахождения интенсивности $\chi = (p_2/p_1) - 1$ из решения уравнения (10)

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\chi_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4M_1}{\chi_0^2} \beta} \right) \quad (12)$$

при заданном β , при этом значение q будет определяться конкретным видом зависимости ширины ударного слоя от давления

$$q = \frac{(\gamma + 1) p_1 c_1}{2\gamma(\gamma - 1) \Delta x(\chi)} \beta. \quad (13)$$

При $\beta = 0$ выражение (12) переходит в (8), известное выражение для величины p_2/p_1 (напомним, что χ_0 определяет интенсивность ударной волны в отсутствие энергоподвода). Из формулы (12) следует, что так как $\beta > 0$ и $\chi_0 \geq 0$, то всегда имеет место неравенство $1 \leq p_2/p_1 \leq 1 + \chi_0$, т.е. интенсивность ударной волны при наличии энергоподвода всегда ниже, чем в его отсутствие.

Для расчета отношения плотностей можно получить из формул (7), (9) и (11) выражение

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma - 1}{(\gamma - 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma + 1 + \frac{\beta}{\gamma M_1}} = \left[1 - \frac{p_2 - 1}{M_1^2 \gamma} \right]^{-1} \quad (14)$$

(величина p_2/p_1 во всех случаях определяется формулой (12)). Для отношения скоростей из закона сохранения массы получаем

$$\frac{U_{n2}}{U_{n1}} = \frac{(\gamma - 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma + 1 + \frac{\beta}{\gamma M_1}}{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma - 1} = 1 - \frac{p_2 - 1}{M_1^2 \gamma}. \quad (15)$$

Отношение температур за (T_2) и перед (T_1) фронтом ударной волны и соответствующих чисел Маха

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma - 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma + 1 + \frac{\beta}{\gamma M_1}}{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma - 1} \frac{p_2}{p_1},$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{p_2 - 1}{M_1^2 \gamma} \right) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1}}. \quad (16)$$

Анализ полученных соотношений

При подводе энергии в дозвуковой поток происходит ускорение потока, что в силу закона сохранения массы ведет к уменьшению плотности. Для объяснения падения давления p_2 с ростом величины β достаточно обратиться ко второму уравнению системы (6), выражающему закон сохранения импульса. Нетрудно видеть, что величина $\rho_2 U_{n2}^2$ в правой части этого уравнения возрастает, так как $\rho_2 U_{n2} = \rho_1 U_{n1} = \text{const}$, а U_{n2} растет с ростом β . Но тогда соответственно должно уменьшиться давление p_2 , так как выражение в левой части данного уравнения не зависит от параметра β .

Рассмотрим еще одно интересное следствие формул (12), (14) и (16). Из формулы (12) видно, что существует некоторый предельный параметр β_{\min} , такой что при данном числе Маха M_1 для всех $\beta > \beta_{\min}$ величины p_2/p_1 , а следовательно, и ρ_2/ρ_1 , U_{n2}/U_{n1} становятся комплексными, что лишено физического смысла. Таким образом, невозможно удовлетворить законам сохранения, предполагая существование поверхности разрыва — ударной волны подобно тому, как невозможно удовлетворить этим уравнениям в случае $\beta = 0$ при $M_1^2 < (\gamma - 1)/(2\gamma)$ (так как тогда из первой формулы (8) следует, что $p_2/p_1 < 0$, что также лишено физического смысла). Однако в действительности при $\beta = 0$ удовлетворить законам сохранения не удастся при $M_1 < 1$, так как в этом случае, как следует из (8), $p_2/p_1 < 1$, что означает распространение ударной волны разрежения, а это, как показано в [1], невозможно. Указанный результат можно переформулировать следующим образом: при любом $\beta \neq 0$ существует такое $M_{1\min} > 1$ минимальное значение числа Маха M_1 , что при $M_1 < M_{1\min}$ ударная волна не существует. Точнее говоря, при выполнении этих неравенств не существует стационарного решения системы уравнений законов сохранения в виде разрыва параметров газа. Физически это может означать, что течение перестраивается и приобретает более плавную структуру либо происходит изменение параметров газа вверх по потоку. Такое явление, как известно, наблюдается для течения по трубе, когда внешний энергоподвод

превышает критическое значение [6]. Данное обстоятельство имеет важное практическое следствие. Появляется принципиальная возможность движения в потоке с дозвуковой структурой со сверхзвуковой ($M_1 > 1$) скоростью. Максимально возможное ослабление интенсивности ударной волны (в соответствии с формулой (12)) при $\beta = \beta_{\min}$ равно 2.

Найдем выражение для минимального значения энерговклада β_{\min} , при котором для заданного числа Маха M_1 еще не выполняется условие существования ударной волны. Из равенства нулю подкоренного выражения в формуле (12) получаем

$$\beta_{\min} = \frac{\chi_0^2}{4M_1} = \frac{\gamma^2(M_1^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)^2 M_1}. \quad (17)$$

При $\beta = \beta_{\min}$ из формулы (16) получаем $M_1 = 1$, таким образом, при критическом энергоподводе течение на бесконечности в области вверх по потоку асимптотически стремится к звуковому.

Проанализируем некоторые количественные результаты, вытекающие из формул (12), (14) и (15). Из формулы (17) видно, что величина β_{\min} при околосзвуковых скоростях пропорциональна квадрату величины $M_1 - 1$, а при гиперзвуковых скоростях — кубу M_1 . Это свидетельствует о том, что такой способ ослабления ударной волны в случае $M_1 - 1 \ll 1$ более энергетически выгоден, чем при $M_1 \gg 1$, так как давление p_2 пропорционально M_1^2 , а вклад энергии пропорционален Q , которое в свою очередь пропорционально M_1^3 при $M_1 \gg 1$.

Для обратной к (17) функции — зависимости минимального числа Маха от параметра β_{\min} из (17) следует уравнение

$$\gamma^2(M_1^2 - 1)^2 = \beta_{\min} M_1 (\gamma + 1)^2. \quad (18)$$

Точное решение этого уравнения, определяющее минимальное значение $M_{1\min}$, имеет вид

$$M_{1\min} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\beta}{\varphi(\beta)}} + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)\sqrt{\beta\varphi(\beta)}}{2\gamma} - \left(\frac{\varphi(\beta)}{2}\right)^2}, \quad (19)$$

где

$$\varphi(\beta) = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left(\frac{3\sqrt{3}(\gamma + 1)^2 \beta_{\min}}{16\gamma^2} \right) \right]. \quad (20)$$

В большинстве случаев (с точностью 5%) можно использовать для определения $M_{1\min}$ асимптотически правильную приближенную формулу

$$M_{1\min} \approx \begin{cases} 1 + \frac{(\gamma+1)\sqrt{\beta}}{2\gamma} & \text{при } \beta < \beta_{Q0}, \\ \frac{\frac{\beta}{\beta_{Q0}} - 1}{\left(\frac{\beta}{\beta_{Q0}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} & \text{при } \beta \geq \beta_{Q0}, \quad \beta_{Q0} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \end{cases} \quad (21)$$

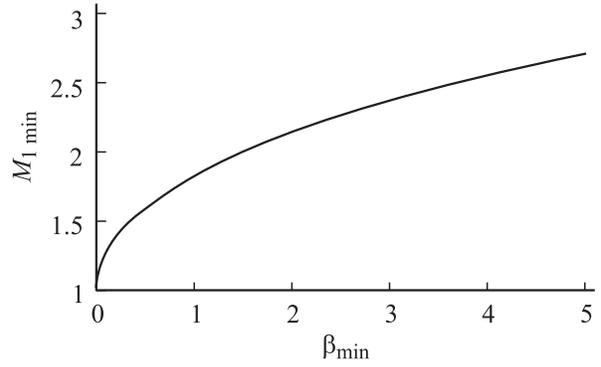


Рис. 2. Зависимость минимального значения числа Маха $M_{1\min}$, при котором не существует ударной волны, от параметра β_{\min} , характеризующего энерговклад.

или приближение, справедливое при малых $\beta \ll 1$,

$$M_{1\min} \approx 1 + \frac{(\gamma + 1)\sqrt{\beta}}{2\gamma} \left(1 - \frac{(\gamma + 1)^2 \beta}{32\gamma^2} \left(1 - \frac{(\gamma + 1)\sqrt{\beta}}{2\gamma} \right) \right) \approx 1 + \frac{(\gamma + 1)\sqrt{\beta}}{2\gamma}. \quad (22)$$

Зависимость минимального значения числа Маха $M_{1\min}$, при котором не существует ударной волны, от параметра β , характеризующего энерговклад, приведена на рис. 2. Значения отношений основных параметров (p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , U_{n2}/U_{n1} , T_2/T_1) при $M_1 = M_{1\min}$ вычисляются в соответствии с (12), (14)–(16) по формулам

$$\begin{aligned} \left. \frac{p_2}{p_1} \right|_{M_1=M_{1\min}} &= 1 + \frac{\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1}, \\ \left. \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|_{M_1=M_{1\min}} &= 1 + \frac{M_1^2 - 1}{\gamma M_1^2 + 1}, \\ \left. \frac{U_{n2}}{U_{n1}} \right|_{M_1=M_{1\min}} &= 1 - \frac{M_1^2 - 1}{(\gamma + 1)M_1^2}, \\ \left. \frac{T_2}{T_1} \right|_{M_1=M_{1\min}} &= 1 + \frac{(\gamma^2 M_1^2 - 1)(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Значение $M_{1\min}$ в этих выражениях вычисляется (в зависимости от требуемой степени точности) по одной из формул (19)–(22). При $\beta \ll 1$ можно ограничиться одним членом разложения (22).

Важной характеристикой процесса являются ослабление интенсивности ударной волны, скачка плотности и изменение температуры и нормальной составляющей скорости при $M_1 = M_{1\min}$ для случая наличия источника тепла и без него. Для получения этой характеристики дополним формулы (8) известными соотношениями

$$\begin{aligned} \left. \frac{U_{n2}}{U_{n1}} \right|_{\beta=0} &= 1 - \frac{2(M_1^2 - 1)}{M_1^2(\gamma + 1)} = 1 - \frac{\chi_0}{M_1^2 \gamma}, \\ \left. \frac{T_2}{T_1} \right|_{\beta=0} &= 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)(\gamma - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{M_1^2(\gamma + 1)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разделив формулы (23) на выражения (8) и (24), мы получим, принимая во внимание, что все параметры перед фронтом ударной волны (с индексом 1) от энергоподвода не зависят, отношения

$$\frac{p_2}{p_2|_{\beta=0}} = 1 - \frac{\gamma(M_1^2 - 1)}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_2|_{\beta=0}} = 1 - \frac{M_1^2 - 1}{\gamma M_1^2 + 1},$$

$$\frac{U_{n2}}{U_{n2}|_{\beta=0}} = 1 + \frac{M_1^2 - 1}{2 + M_1^2(\gamma - 1)},$$

$$\frac{T_2}{T_2|_{\beta=0}} = 1 + \frac{(M_1^2 - 1)[1 - \gamma^2 M_1^2 + 2\gamma(M_1^2 - 1)]}{(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)(2 + M_1^2(\gamma - 1))}. \quad (25)$$

Выражения (25) вычисляются при $M_1 = M_{1\min}$, которое является функцией от параметра β , что позволяет построить соответствующие зависимости характеристик ударной волны как функций от энергоподвода.

Приведенные выше выводы носят общий характер и не зависят от модели ударного слоя, а также способа подвода тепла, т.е. вида зависимостей $\Delta x(\chi)$, $q(\chi)$. Из формулы (10) следует, что для величины при $q\Delta x(\chi) > 0$, $p_2/p_1 > 1$ всегда выполняется неравенство $p_2/p_1 < 1 + \chi_0 = p_2/p_1|_{\beta=0}$ ($p_2/p_1|_{\beta=0}$ — величина скачка давления при отсутствии подвода тепла), откуда и следует данное утверждение.

Следует обратить внимание на то, что из уравнения (10), казалось бы, следует, что при $M_1 \geq 1$ выполняется соотношение $\chi - \chi_0 \approx \beta + o(\beta^2)$, однако реально оказывается, что $\chi - \chi_0 \approx \sqrt{\beta} + o(\beta)$. В этом нет никакого противоречия, так как при $M_1 \rightarrow 1 + 0$ $p_2/p_1 \rightarrow 1 + 0$ и последнее слагаемое в формуле (10) начинает неограниченно возрастать, что и приводит к тому, что реальная поправка при $\beta \ll 1$ пропорциональна $\sqrt{\beta} > \beta$.

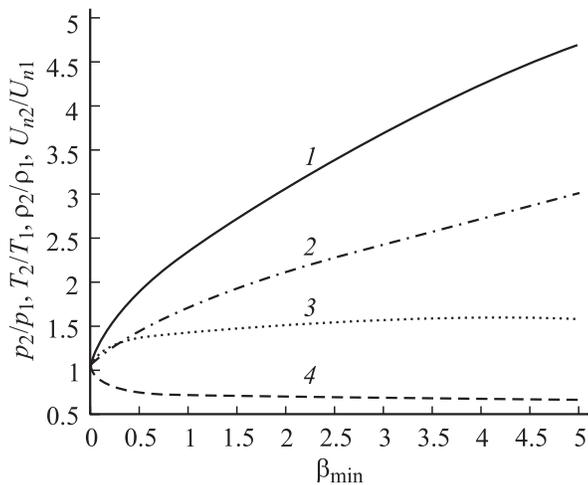


Рис. 3. Зависимость отношений давления (1), температуры (2), плотности (3) и скорости (4) за фронтом ударной волны к соответствующим величинам перед фронтом ударной волны от параметра β_{\min} , характеризующего энергоподвод. Расчет проведен для минимального (при данном β_{\min}) числа Маха $M_{1\min}(\beta_{\min})$, при котором не существует ударной волны (рис. 2).

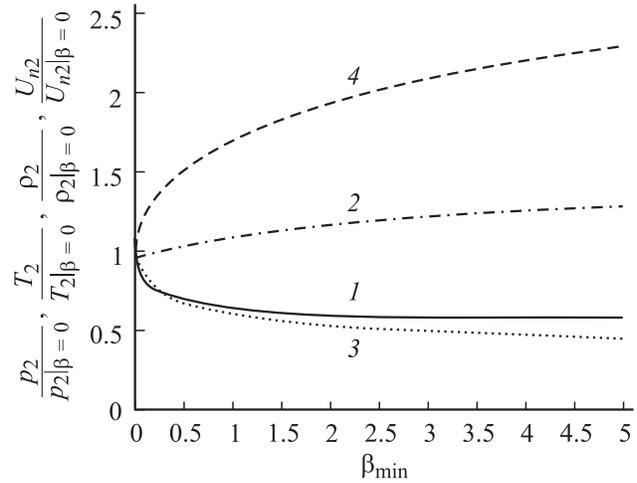


Рис. 4. Зависимость отношений давления (1), температуры (2), плотности (3) и скорости (4) за фронтом ударной волны при наличии энергоподвода к тем же величинам в отсутствие энергоподвода. Расчет проведен для минимального (при данном β_{\min}) числа Маха $M_{1\min}(\beta_{\min})$, при котором не существует ударной волны (рис. 2).

При расчете кривых на рис. 3 по заданному значению β_{\min} вычислялось число Маха M_{\min} и по формулам (23) строились зависимости от β_{\min} отношений параметров за и перед фронтом ударной волны. Для оценки влияния энергоподвода на параметры за фронтом ударной волны по аналогичной схеме по формулам (25) построен рис. 4. Рис. 5 позволяет увидеть, насколько изменится отношение давлений и отношение температур (вычислений при одном и том же числе Маха M_{\min}) при наличии энергоподвода (кривые 1 и 3) и без него ($\beta = 0$, кривые 2 и 4). Из рис. 5 следует, что при малых величинах энергоподвода ($\beta < 0.5$) наличие энергоподвода значительно снижает интенсивность ударной волны практически без увеличения температуры за фронтом ударной волны.

Приведем формулы, позволяющие при малых значениях параметра $\beta_{\min} \leq 0.1$ оценить все рассмотренные выше соотношения — отношения параметров ударной волны за и перед ударным фронтом

$$\frac{p_2}{p_1} \Big|_{M_1=M_{1\min}} = 1 + \sqrt{\beta},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \Big|_{M_1=M_{1\min}} = 1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma(\sqrt{\beta} + 1)},$$

$$\frac{U_{n2}}{U_{n1}} \Big|_{M_1=M_{1\min}} = 1 - \frac{\sqrt{\beta}}{(\gamma + 1)\sqrt{\beta} + \gamma},$$

$$\frac{T_2}{T_1} \Big|_{M_1=M_{1\min}} = 1 + \sqrt{\beta} \left[1 - \frac{1 + \sqrt{\beta}}{(\gamma + 1)\sqrt{\beta} + \gamma} \right] \quad (26)$$

(нижний индекс «min» при β_{\min} для краткости опускается) и отношение параметров в возмущенной области

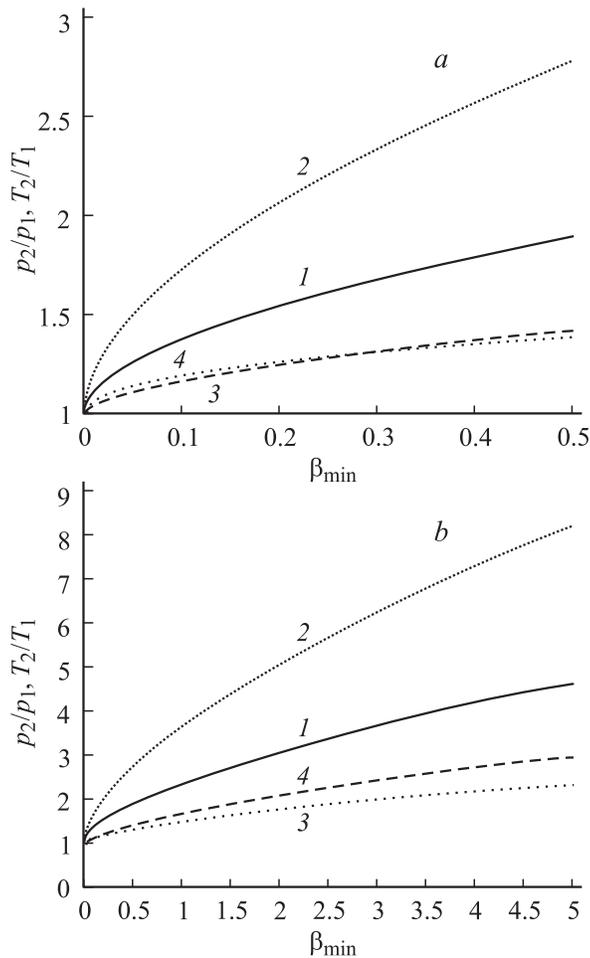


Рис. 5. Зависимость отношений давления (1), температуры (3) за фронтом ударной волны к соответствующим величинам перед фронтом ударной волны от параметра β_{\min} , характеризующего энерговклад. Расчет проведен для минимального (при данном β_{\min}) числа Маха $M_{1\min}(\beta_{\min})$, при котором не существует ударной волны (рис. 2). 2 и 4 — отношение давлений $p_2/p_1|_{\beta=0}$ и температур $T_2/T_1|_{\beta=0}$, рассчитанных при том же числе Маха $M_{1\min}$, но при нулевом энерговкладе (формулы (8) и (24)). *a* — $\beta_{\min} \leq 0.5$, *b* — $\beta_{\min} \leq 5$.

(за фронтом ударной волны) при наличии энерговклада и без него

$$\frac{p_2}{p_2|_{\beta=0}} = 1 - \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_2|_{\beta=0}} = 1 - \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma(\sqrt{\beta} + 1)},$$

$$\frac{U_{n2}}{U_{n2}|_{\beta=0}} = 1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma + \sqrt{\beta}(\gamma - 1)},$$

$$\frac{T_2}{T_2|_{\beta=0}} = 1 - \frac{(\gamma - 1)\sqrt{\beta}}{(1 + \sqrt{\beta})[(\gamma - 1)\sqrt{\beta} + \gamma]}. \quad (27)$$

Предельные значения параметра β , при которых ошибка вычисления по приближенным формулам (26)–(27) не превышает 5%: в формулах (26) для отношения давлений $\beta \leq 0.19$, для отношения плотностей $\beta \leq 5$, для

отношения скоростей $\beta \leq 5$, для отношения температур $\beta \leq 0.33$; в формулах (27) для отношения давлений $\beta \leq 0.13$, для отношения плотностей $\beta \leq 0.35$, для отношения скоростей $\beta \leq 0.38$, для отношения температур $\beta \leq 0.13$.

Заключение

Результаты работы позволяют оценить изменение параметров слабых ударных волн за счет влияния энерговклада в область ударного фронта. Для детального рассмотрения воздействия нагрева на ударную волну при $M > 2$ надо решать кинетическое уравнение. Величина вкладываемой мощности может быть оценена по формуле (13). Для высоты полета 30 000 м, числе Маха 1.2 и площади локального плазменного воздействия 10^{-3} m^2 величина вкладываемой мощности составит порядка 400 W. Поскольку область, занимаемая плазмой, много больше ширины ударного фронта, то место образования скачка уплотнения будет всегда оказываться внутри плазменного слоя, что и обеспечивает плавное изменение параметров ударной волны. При решении конкретных задач обтекания необходимо провести газодинамический расчет с использованием приведенных выше соотношений.

Список литературы

- [1] Белов И.А. Взаимодействие неравномерных потоков с преградами. Л., 1983.
- [2] Георгиевский П.Ю., Левин В.А. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 8. С. 684–687.
- [3] Борзов В.Ю., Рыбка И.В., Юрьев А.С. // ИЖФ. 1994. Т. 62. № 2. С. 243–247.
- [4] Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука, 1987. 295 с.
- [5] Физика быстротекущих процессов / Под ред. Н.А. Златина. Т. 3. М.: Мир, 1971. 358 с.
- [6] Вуллис Л.А. Термодинамика газовых потоков Л.: Гасэнергоиздат, 1950. 304 с.