

## Хаотическая синхронизация однонаправленно связанных электронных сред со встречной волной

© А.А. Коронковский, П.В. Попов, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
Государственный учебно-научный центр „Колледж“,  
410026 Саратов, Россия  
e-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

(Поступило в Редакцию 26 апреля 2004 г.)

Исследована хаотическая синхронизация двух электронно-волновых сред со взаимодействующими встречными волнами и кубической фазовой нелинейностью (ЛОВ с поперечным полем). Для исследования хаотической синхронизации предложена методика, основанная на рассмотрении непрерывного множества фаз хаотического сигнала. Определены характеристики режима хаотической синхронизации в системе однонаправленно связанных ЛОВ, а также изучена сложная пространственная динамика установления режима хаотической синхронизации в активной среде.

### Введение

Исследование хаотической синхронизации автоколебаний является одной из важных задач современной теории нелинейных колебаний и волн [1,2]. Явление синхронизации хаотических колебаний наблюдается в системах самой различной природы, включая физические и биологические системы [3–6]. Изучение явления хаотической синхронизации является весьма важным применительно к передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [7]. Большинство исследований явления хаотической синхронизации было проведено для систем с малым числом степеней свободы. Исследование хаотической синхронизации распределенных электронно-волновых систем не проводилось, хотя изучение данных вопросов представляется весьма важным и актуальным для электроники сверхвысоких частот (см., например, [8–10]).

Вводят различные типы хаотической синхронизации: фазовая, обобщенная, лаг и полная синхронизация [2]. Для описания и анализа фазовой синхронизации вводится фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала [1,2,11,12]. Возникновение фазовой синхронизации означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы  $\langle \phi(t) \rangle$ . В то самое время, если спектральный состав сигнала сложный, не всегда удается охарактеризовать динамику системы с помощью одной фазы [13].

В нашей работе [14] предложен новый подход к анализу хаотической синхронизации, основанный на введении непрерывного множества фаз, которое определяется с помощью непрерывного вейвлетного преобразо-

вания [15,16] хаотического сигнала  $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s,t_0}^*(t) dt, \quad (1)$$

где  $\psi_{s,t_0}(t)$  — вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$ ;

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0 \left( \frac{t-t_0}{s} \right). \quad (2)$$

Временной масштаб  $s$  определяет ширину вейвлета  $\psi_{s,t_0}(t)$ ;  $t_0$  — временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени (\* означает комплексное сопряжение) [16]. Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие „временной масштаб“, как правило, используется вместо понятия „частота“, традиционного для Фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета используется морлет-вейвлет  $\psi_0(\eta) = (1/\sqrt[4]{\pi}) \exp(j\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2)$  [16]. Выбор значения параметра вейвлета  $\omega_0 = 2\pi$  обеспечивает соотношение  $s = 1/f$  между временным масштабом  $s$  вейвлетного преобразования и частотой  $f$  преобразования Фурье.

Вейвлетный спектр

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp[j\phi_s(t_0)] \quad (3)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . Величина  $|W(s, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Удобно также ввести интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (4)$$

В то же самое время естественным образом оказывается определенной фаза  $\psi_s(t) = \arg W(s, t)$  для каждого

временного масштаба  $s$ . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\psi_s(t)$ .

Если существует некоторый диапазон временных масштабов  $[s_1; s_2]$ , такой что для любого временного масштаба  $s \in [s_1; s_2]$  выполняется условие захвата фаз

$$|\psi_{s1}(t) - \psi_{s2}(t)| < \text{const} \quad (5)$$

и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{s\text{nhf}} = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (6)$$

то временные масштабы  $s \in [s_1; s_2]$  являются синхронизованными, а хаотические осцилляторы находятся в режиме синхронизации временных масштабов [14]. В отношении (5)  $\psi_{s1,2}(t)$  — непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам  $s$ .

В данной работе предложенный метод применен для изучения хаотической синхронизации в связанных электронно-волновых средах со встречной волной и кубичной фазовой нелинейностью (связанных ламп обратной волны с поперечным полем). Данная модель представляется простейшей моделью электронных СВЧ генераторов с обратной волной, широко используемых на практике [17].

## 1. Исследуемая модель

Рассмотрим основные уравнения, которые описывают модель двух связанных электронно-волновых сред со встречной волной и кубичной фазовой нелинейностью.

Взаимодействие двух встречных бездисперсных волн может быть описано в линейном приближении системой уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -AI, \quad (7)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + \frac{\partial I}{\partial \xi} = -AF, \quad (8)$$

где  $F = |F| \exp[j\varphi_F]$  и  $I = |I| \exp[j\varphi_I]$  — соответственно безразмерные медленно меняющиеся во времени и пространстве по сравнению с  $\exp(j(\hat{\omega}t - \hat{k}\xi))$  амплитуды электромагнитной и электронной волн;  $\tau$  и  $\xi$  — безразмерные время и координата;  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  — частота и волновое число, соответствующие точке пересечения дисперсионных кривых невзаимодействующих электронной и электромагнитной волн;  $A$  — безразмерный управляющий параметр, который можно рассматривать как безразмерные длину системы или ток электронного пучка [18].

Решение линейных уравнений (7) и (8) предсказывает безграничный экспоненциальный рост амплитуды каждой из волн. Для стабилизации колебаний в систе-

ме взаимодействующих волн необходим учет влияния какого-либо нелинейного явления в электронной волне. Одним из простейших нелинейных эффектов является неизохронность электронов-осцилляторов, выражающаяся в зависимости частоты электрона-осциллятора от его энергии [17,19]. Изизохронность электронов-осцилляторов в системе взаимодействующих встречных волн отражается в нелинейном изменении фазы  $\varphi_1$  электронной волны.

Предположим, что при изменении энергии волны  $W = \alpha I^2$  ( $\alpha$  — коэффициент пропорциональности) та часть фазы электронной волны  $\varphi_1$ , которая пропорциональна продольной координате  $\xi$ , в первом приближении линейно зависит от энергии, что определяется сдвигом частоты излучения за счет эффекта Доплера [19]. Тогда уравнение (8) в системе координат со смещенным временем  $\tau' = (\tau - \xi)/2$ ,  $\xi' = \xi$  можно переписать в виде

$$\frac{\partial I}{\partial \xi'} + j|I|^2 I = -AF, \quad (9)$$

где штрихи у новых переменных опущены.

Система уравнений (7) и (9) описывает процессы в системе взаимодействующих встречных волн с кубической фазовой нелинейностью (ЛОВ с поперечным полем [18]). В автономном режиме уравнения (7) и (9) необходимо дополнить стандартными граничными условиями  $F(\xi = 1, \tau) = 0$  и  $I(\xi = 0, \tau) = 0$ , которые отражают отсутствие электромагнитной и электронной волн на границах системы. Автономная нелинейная динамика ЛОВ с поперечным полем при увеличении бифуркационного параметра  $A$  подробно описана в работах [18,20,21]. При  $\pi/2 < A < 1.83$  в системе возбуждается одночастотный режим колебаний со стационарными пространственными распределениями  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$ . При  $A > 1.83$  система генерирует многочастотные периодические колебания (режим периодической автомодуляции поля), причем при  $A > 2.05$  временная последовательность выходного поля  $F(\tau, \xi = 0)$  имеет вид импульсов с мелкими осцилляциями между ними, возникающими в результате возбуждения сложных „многогорбых“ пространственных распределений  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$ . Причиной возникновения последних является быстрое нелинейное изменение фазы электронной волны вдоль координаты пространства взаимодействия. Наконец, при  $A > 4.1$  возбуждаются хаотические автоколебания [21].

В данной работе будем рассматривать систему двух однонаправленно связанных активных электронно-волновых сред, находящихся в режиме хаотической динамики. Исследуемая связанная система будет описываться следующей системой уравнений

$$\frac{\partial F_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{\partial F_{1,2}}{\partial \xi} = -A_{1,2} I_{1,2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial I_{1,2}}{\partial \xi} + j|I_{1,2}|^2 I_{1,2} = -A_{1,2} F_{1,2}, \quad (11)$$

где индекс 1 соответствует ведущей, а индекс 2 — ведомой активным средам.

Однонаправленная связь между автоколебательными системами записывается в виде нестационарного граничного условия для медленно меняющейся амплитуды поля  $F_2$  ведомой активной среды, при этом граничное условие для первой ведущей активной среды остается неизменным

$$I_1(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_1(\xi = 1.0, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$I_2(\xi = 0, \tau) = 0,$$

$$F_2(\xi = 1.0, \tau) = \rho F_1(\xi = 0.0, \tau), \quad (13)$$

где  $\rho = R \exp[j\theta]$  — комплексный коэффициент связи ( $R$  — амплитуда,  $\theta$  — фаза коэффициента связи).

Отметим, что подобное введение связи, когда управляющий сигнал воздействует только на границе распределенной активной среды, является естественным и физически просто реализуемым в отличие от работ [2,22], посвященных изучению хаотической синхронизации распределенных модельных сред, в которых связь была пространственно однородной, т.е. управляющий сигнал снимался и воздействовал в каждой точке связанных активных сред.

Для ведущей и ведомой систем значения управляющих параметров были зафиксированы равными  $A_1 = 4.2$  и  $A_2 = 4.9$ , что соответствует режимам хаотической автомодуляции поля. Величина фазы коэффициента связи  $\theta$  не влияла на процессы в связанной системе и была выбрана постоянной  $\theta = \pi$ . В представленной работе анализируется установление режима хаотической синхронизации двух распределенных электронно-волновых систем при изменении амплитуды коэффициента связи  $R$ .

## 2. Хаотическая синхронизация

Рассмотрим поведение связанной системы при выше-названных значениях управляющих параметров ведущей и ведомой активных сред при увеличении амплитуды коэффициента связи  $R$ . Будем анализировать колебания  $F_{r1,2} = \text{Re}[F_{1,2}(\xi = 0, \tau)]$  на выходе каждой из активных сред.

На рис. 1, *a* и *b* показаны спектры мощности и фазовые портреты (восстановленные по методу задержек Такенса [23]) колебаний на выходе соответственно ведущей и ведомой системы в автономных режимах колебаний (т.е. при  $R = 0$ ). Из рис. 1, *a* следует, что выходное поле  $F_{r1}$  ведущей системы, которое подается на вход пространства взаимодействия  $\xi = 1$  второй активной среды, демонстрирует Фурье-спектр мощности колебаний, соответствующий хаотическим колебаниям. На фоне сплошного шумового пьедестала, который располагается на уровне примерно — 30 dB, в спектре наблюдается два ярко выраженных пика базовой частоты, которые отмечены в спектре мощности на рис. 1, *a* как  $f_m$  и  $f_b$ . Частота  $f_b$  близка к частоте  $\omega$

синхронизма соответствующих линейных взаимодействующих волн. При уменьшении безразмерного тока пучка  $A_1$  в распределенной системе устанавливается режим периодических колебаний на частоте, близкой к частоте  $f_b$ , которая лежит в СВЧ диапазоне. Вторая частота, обозначенная как  $f_m$  и располагающаяся в низкочастотной части спектра, определяет характерную частоту низкочастотной модуляции амплитуды  $F_1$  поля. С ростом бифуркационного параметра  $A$  колебания в системе усложняются, что хорошо видно из анализа спектра мощности на рис. 1, *b*, построенном при  $A_2 = 4.9$  и  $R = 0$  (автономная генерация). Видно, что шумовой пьедестал в спектре мощности в большей части диапазона частот поднимается до уровня — 5–10 dB, на его фоне уже невозможно выделить какие-либо характерные частоты колебаний в активной среде.

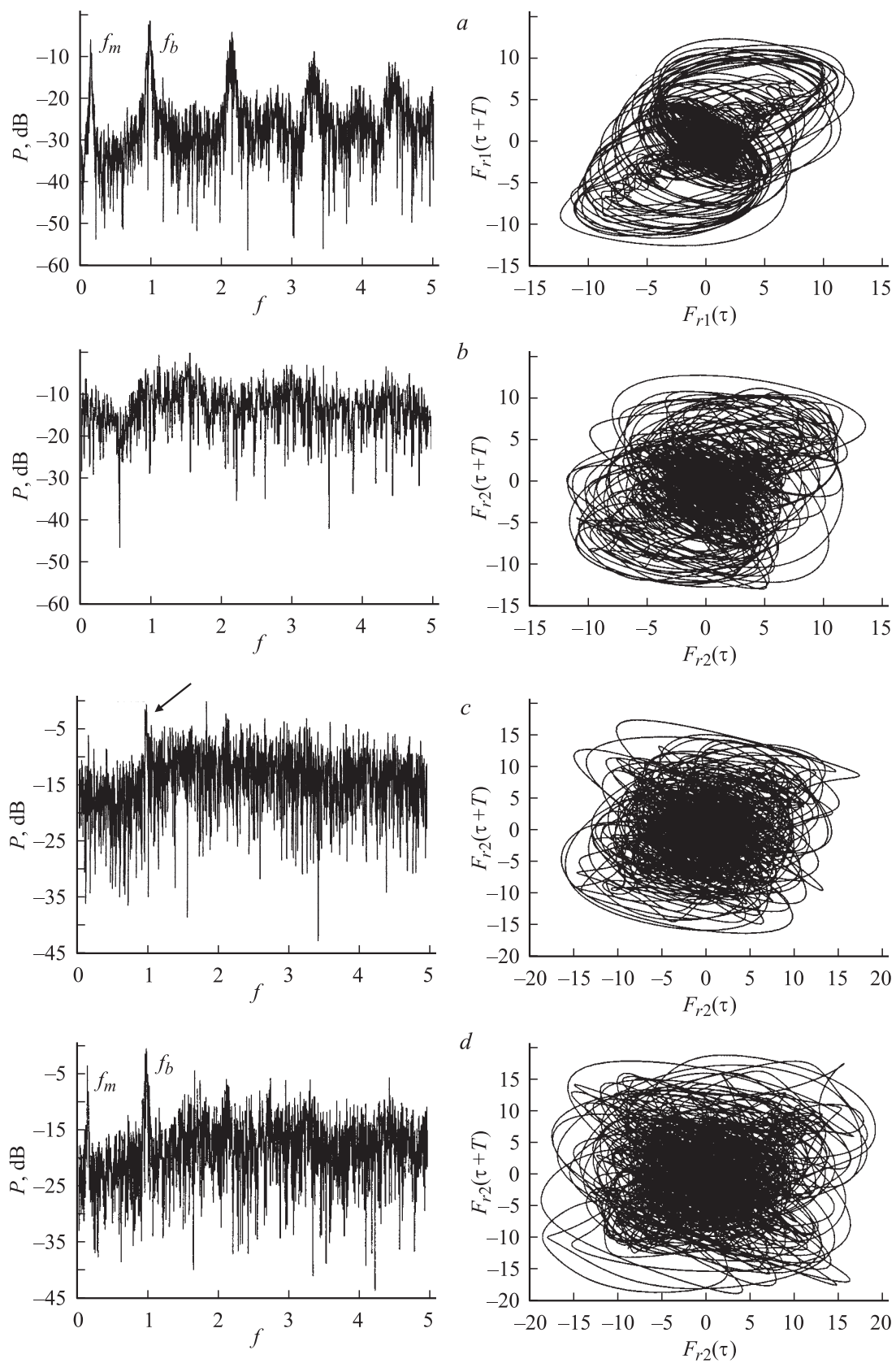
Рассмотрим поведение ведомой системы 2 при взаимодействии на нее поля ведущей системы при увеличении амплитуды  $R$  коэффициента связи между распределенными автоколебательными системами. Рост параметра  $R$  означает, что увеличивается мощность внешнего сигнала, воздействующего на систему, как  $R^2$ .

С ростом параметра связи  $R$  спектра генерации ведомой системы изменяется, что иллюстрируют рис. 1, *c, d*. При малом  $R < 0.3$  (рис. 1, *c*) в спектре на фоне развитого шумового пьедестала появляется слабо выраженная частота (отмечена стрелкой), соответствующая основной частоте  $f_b$  в спектре ведущей системы (рис. 1, *a*). При больших значениях  $R > 0.3$  в спектре ведомой системы возрастает энергия спектральных компонент, соответствующих базовым частотам в спектре мощности ведущей системы (отмечены на рис. 1, *d*, построенном при  $R = 0.5$ ).

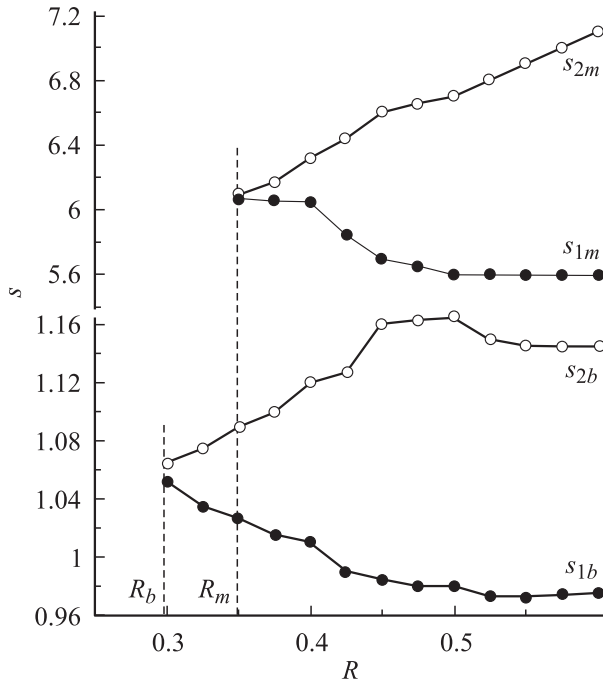
Отметим, что вид фазового портрета колебаний системы (рис. 1) не позволяет корректно ввести фазу хаотического сигнала ни одним из „классических“ методов [1,11–13] из-за сложной топологии хаотического аттрактора. Поэтому применение методики введения семейства фаз с помощью вейвлетного преобразования [14] (см. также [24]) в данном случае является единственным эффективным способом изучения хаотической синхронизации связанных электронно-волновых генераторов.

На рис. 2 показаны границы  $s_1$  и  $s_2$  диапазонов синхронизированных временных масштабов на плоскости  $(R, s)$ .

Особенностью динамики системы двух связанных электронно-волновых сред является то, что синхронизация временных масштабов хаотических сигналов каждой из подсистем при сравнительно большой амплитуде коэффициента связи  $R$  наблюдается для двух диапазонов соответственно вблизи базовых временных масштабов  $s_b = 1/f_b$  и  $s_m = 1/s_m$ . На рис. 2 соответствующие диапазоны синхронизируемых масштабов показаны для области базового масштаба  $s_b$  снизу и масштаба  $s_m$  сверху рисунка.



**Рис. 1.** Спектры мощности и фазовые портреты колебаний в автономных ведущей (a) и ведомой (b) ЛОВ и неавтономной ведомой системе при  $R = 0.2$  (c), 0.5 (d).



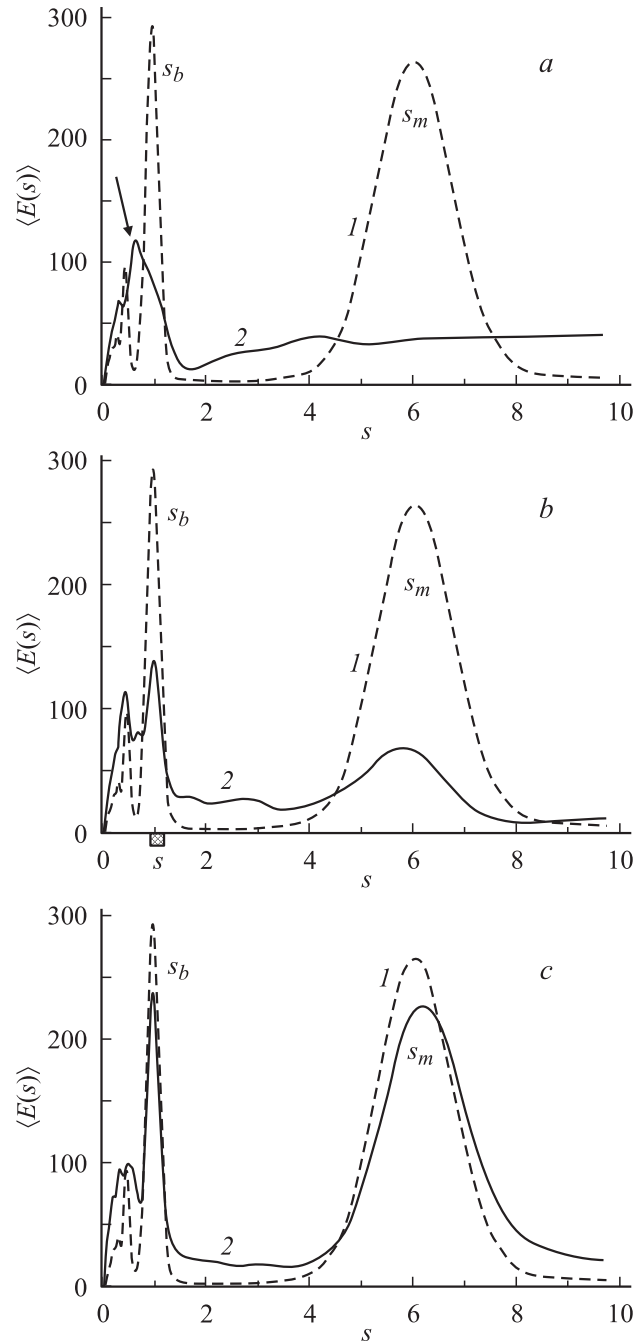
**Рис. 2.** Границы  $s_1$  и  $s_2$  диапазонов синхронизированных временных масштабов на плоскости  $(R, s)$  для базовых масштабов  $s_b$  (снизу) и  $s_m$  (сверху).

Из анализа рис. 2 следует, что при величинах коэффициента связи  $R \in (0, 0.029)$  в системе не наблюдается установления режима хаотической синхронизации. Последнее означает, что не существует ни одного временного масштаба  $s$ , для динамики фазы которого выполнялось бы условие хаотической синхронизации (5). С ростом параметра связи  $R$  возникает диапазон масштабов  $\Delta s = s_2 - s_1$ , для которого выполняется условие захвата фаз (5) и энергия, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля (6). Последнее означает, что в связанных активных средах устанавливается режим хаотической синхронизации временных масштабов [14].

Отметим, что с ростом связи  $R$  вначале происходит синхронизация временных масштабов вблизи базового масштаба  $s_b$  при  $R = R_b$  (отмечен на рис. 2) и только с дальнейшим увеличением коэффициента связи при  $R = R_m > R_b$  имеет место захват фаз временных масштабов в области базового масштаба  $s_m$ , соответствующего частоте модуляции амплитуды выходного поля ЛОВ.

Рассмотрим сначала, с чем связано возникновение диапазона  $\Delta s$  синхронизируемых масштабов (т.е. масштабов, для которых выполняется критерий синхронизации (5) и (6)) вблизи базовой частоты  $f_b = 1/s_b$ . Для этого изучим вид вейвлетных спектров мощности  $\langle E_{1,2}(s) \rangle$ , определяемых интегральным соотношением (4), для ведущей и ведомой систем. Вейвлетные спектры колебаний выходного поля ведущей (штриховая

линия 1) и ведомой (сплошная линия 2) ЛОВ представлены на рис. 3 для различных значений параметра связи  $R$ . Отметим, что вид вейвлетного спектра  $\langle E_1 \rangle$  ведущей ЛОВ не меняется (так как для нее выбрано фиксированное значение параметра  $A_1$  и на нее не воздействует внешнее поле) и представлен на всех рисунках для удобства сравнения с вейвлетными спектрами мощности  $\langle E_2 \rangle$  ведомой ЛОВ при различных  $R$ .



**Рис. 3.** Вейвлетные спектры мощности колебаний выходного поля ведущей (штриховая линия 1) и ведомой (сплошная линия 2) ЛОВ для различных амплитуд коэффициента связи:  $R = 0$  (a),  $0.2$  (b),  $0$  (c).

На рис. 3, *a* показаны вейвлетные спектры мощности колебаний для автономных генераторов. Видно, что колебания в каждой из активных сред имеют существенно различные вейвлетные спектры. Так, в вейвлетном спектре  $\langle E_1 \rangle$  ведомой системы выделяются базовые временные спектры. Так, в вейвлетном спектре  $\langle E_1 \rangle$  ведомой системы выделяются базовые временные масштабы  $s_b$  (соответствующие высокой частоте  $f_b$ ) и  $s_m$  (соответствующий модуляционным колебаниям с основной частотой  $f_m$ ), отмеченные на рис. 3. В вейвлетном спектре автономной ведомой системы четко выделяются временные масштабы, соответствующие высокочастотным спектральным компонентам (отмечены стрелкой на рис. 3, *a*), однако расположение максимума в вейвлетном спектре  $\langle E_2 \rangle$  не соответствует базовому временному масштабу  $s_b$  ведущей системы, т.е. основные частоты в каждой из подсистем не совпадают. Что касается больших масштабов (соответствующих низким модуляционным частотам), то для них вид вейвлетных спектров принципиально различен. В ведомой системе в области масштаба  $s_m$  вейвлетный спектр сплошной и однородный, т.е. модуляционные колебания демонстрируют сплошной шумоподобный спектр без выделенных на фоне шумового пьедестала частот (временных масштабов).

С увеличением коэффициента связи  $R$  условие синхронизации (5) и (6) выполняется только для тех временных масштабов  $s$ , энергия которых в вейвлетных спектрах колебаний ведущей и ведомой систем весьма значительна. Действительно, при  $R \approx 0.3$  условие синхронизации выполняется только для временных масштабов вблизи основного масштаба  $s_b = 1/f_b \approx 1.0$  (см. также рис. 2). Как следует из анализа рис. 3, *b*, это тот диапазон временных масштабов,<sup>1</sup> на который приходится максимальная энергия вейвлетного спектра колебаний. Из рис. 3, *b* видно, что одновременно увеличивается энергия вейвлетного спектра, приходящаяся на масштаб  $s_m$  ведущей системы. Однако при  $R \approx 0.3$  его энергия невелика и синхронизация временных масштабов модуляционных колебаний поля не наблюдается.

При больших коэффициентах связи  $R > 0.35$  вид вейвлетных спектров колебаний полей на выходе ведущей и ведомой систем становятся близкими друг к другу (рис. 3, *c*). В спектрах примерно с одинаковой интенсивностью представлены временные масштабы, соответствующие базовым частотам  $s_m$  и  $s_b$ . Анализ динамики при этом показывает, что условия синхронизации (5) и (6) выполняются для обоих наиболее интенсивных временных масштабов в спектре мощности и соответственно выделяются два диапазона масштабов, в которых имеет место захват фаз (рис. 2 для  $R > 0.35$ ).

Таким образом, синхронизация временных масштабов хаотических колебаний поля в связанных активных средах наблюдается в первую очередь для тех масштабов  $s$ ,

<sup>1</sup> На рисунке он выделен серым цветом и символом  $S$  на оси масштабов  $s$ .

энергия которых в спектре мощности колебаний значительна.

С увеличением связи диапазон временных масштабов, для которых выполняются условия (5) и (6), начинает расширяться. В синхронную динамику начинают вовлекаться масштабы, которые находятся вблизи наиболее интенсивных масштабов и энергия которых тоже достаточно значительна.

Последнее хорошо иллюстрирует рис. 2, из которого следует, что для обоих базовых масштабов  $s_b$  и  $s_m$  наблюдается расширение диапазона синхронизируемых масштабов  $\Delta s$  с ростом величины коэффициента связи  $R$ . При больших амплитудах коэффициента связи  $R$  между ЛОВ диапазон синхронных масштабов  $\Delta s_b = s_{2b} - s_{1b}$  в области базового масштаба  $s_b$  перестает расширяться и, более того, сужается при  $R > 0.5$ . В то же время в области масштабов  $s_m$ , описывающих модуляцию амплитуды выходного поля, диапазон синхронных масштабов  $\Delta s_m = s_{2m} - s_{1m}$  продолжает линейно расширяться с ростом  $R$  за счет роста верхней границы области синхронизированных масштабов  $s_{2m}$ . Последнее связано с тем, что с ростом  $R$  энергия в вейвлетном спектре ведомой системы перераспределяется таким образом, что наблюдается увеличение интенсивности больших масштабов  $s > s_m$ . Тогда наиболее интенсивные временные масштабы оказываются расположенными вблизи верхней границы  $s_{2m}$  синхронизируемых масштабов, поэтому именно эти масштабы оказываются синхронизованными в первую очередь при увеличении связи.

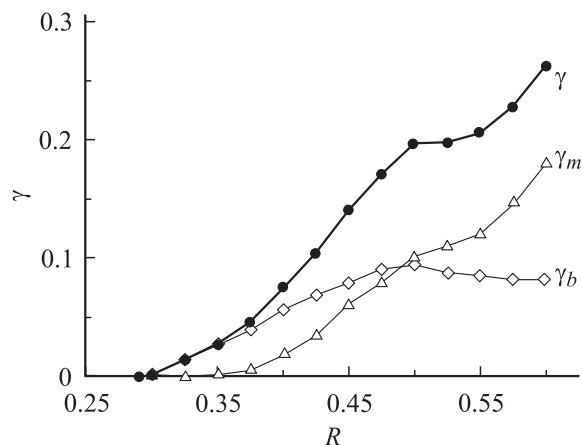
### 3. Мера хаотической синхронизации связанных активных электронно-волновых сред

Введение в рассмотрение непрерывного множества временных масштабов  $s$  с ассоциированными с ними фазами хаотического сигнала и выделение диапазона синхронных масштабов  $\Delta s = s_2 - s_1$  позволяют ввести количественную характеристику меры хаотической синхронизации связанных систем, которая определяется как относительная доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы [14],

$$\gamma = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds / \int_0^{\infty} \langle E(s) \rangle ds, \quad (14)$$

где  $\langle E(s) \rangle$  — интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (4).

Значение величины  $\gamma = 0$  свидетельствует об отсутствии режима хаотической синхронизации связанных подсистем. Величина  $\gamma \neq 0$  означает, что в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов, означающий наличие синхронизированных масштабов, для которых выполняются условия (5) и (6). Значение



**Рис. 4.** Зависимости величин  $\gamma_0$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma$  от амплитуды коэффициента связи  $R$  однонаправленно связанных ЛОВ.

$\gamma = 1$  показывает, что колебания в каждой из подсистем идентичны или сдвинуты друг относительно друга на некоторый интервал времени  $T_\tau$ . Такой режим называется режимом хаотической лагсинхронизации [2]. Рост  $\gamma$  от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы  $s$ . Фактически величина  $\gamma$  характеризует насколько близки друг к другу хаотические колебания в каждой из связанных активных сред.

В нашем случае, когда синхронное поведение наблюдается для двух базовых масштабов, можно ввести меры синхронизации  $\gamma_0$  и  $\gamma_m$  соответственно для каждого из масштабов  $s_b$  и  $s_m$ , а также интегральную характеристику меры синхронизации активной распределенной среды  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_m$ . Зависимость величины  $\gamma$  от коэффициента связи  $R$  характеризует степень хаотической синхронизации колебаний в связанных электронно-волновых системах с обратной волной.

На рис. 4 показаны зависимости величин  $\gamma_b$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma$  от параметра связи  $R$  между подсистемами. Видно, что при малых  $R < 0.4-0.5$  основная доля энергии колебательного процесса, приходящаяся на синхронизированные масштабы, соответствует базовому масштабу  $s_b$  ( $\gamma_0 > \gamma_m$ ), т.е. в первую очередь в связанной системе происходит захват фаз частот  $f \sim f_b$ , близких к частоте синхронизма электронной и электромагнитной волн в активной среде. Далее с ростом  $R$  происходит захват частот, близких к частоте модуляции  $f_m$  поля ведущей ЛОВ. С ростом  $R$  все большее число масштабов, описывающих низкочастотную хаотическую модуляцию выходного сигнала ЛОВ, оказывается синхронизируемыми. Следовательно, относительная доля энергии синхронизируемых низкочастотных модуляционных колебаний  $\gamma_m$  растет с увеличением  $R$ . При  $R > 0.5$  доля энергии синхронных низкочастотных модуляционных временных масштабов  $\gamma_m$  становятся больше величины  $\gamma_b$ , характеризующей долю энергии синхронных ВЧ колебаний.

Интегральная доля энергии  $\gamma$ , приходящейся на синхронные временные масштабы, как видно из рис. 4, растет с ростом амплитуды коэффициента связи. Однако даже при больших величинах  $R$ , когда на ведомую активную среду воздействует сигнал ведущей системы весьма значительной мощности ( $R^2 \sim 0.3-0.4$ ), доля энергии, приходящейся на синхронные масштабы, не превышает величины  $\gamma \sim 0.3$ .

Таким образом, при хаотической синхронизации двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем при увеличении коэффициента связи  $R$  вначале наблюдается синхронизация временных масштабов колебаний вблизи наиболее интенсивного в вейвлетном спектре мощности временного масштаба  $s_b$ , близкого к частоте синхронизма электронной и электромагнитной волн. С ростом  $R$  происходит увеличение энергии синхронизованных масштабов в области базового масштаба  $s_b$  и одновременно возникает синхронизация временных масштабов  $\Delta s_m$ , описывающих низкочастотные модуляционные колебания амплитуды поля  $F$  в ЛОВ. С дальнейшим увеличением связи рост энергии колебательных процессов, приходящейся на синхронные временные масштабы, происходит только за счет увеличения диапазона синхронных масштабов  $\Delta s_m$ . Данное поведение двух связанных ЛОВ количественно описывает мера взаимной хаотической синхронизации  $\gamma = \gamma(R)$ .

#### 4. Пространственная динамика неавтономной активной электронно-волновой среды

Рассмотрим теперь физические процессы, сопровождающие процесс установления режима хаотической синхронизации в неавтономной активной среде взаимодействующих встречных волн. В первую очередь будем интересоваться пространственной динамикой ведомой активной среды при установлении хаотической синхронизации.

Внешний хаотический сигнал  $F_{\text{ext1}}(\tau) = F_1(\tau, \xi = 0)$ , генерируемый ведущей (первой) ЛОВ, воздействует в точке  $\xi = L$  ведомой системы и далее распространяется навстречу электронной волне к выходу  $\xi = 0$  ЛОВ. Здесь  $L$  — безразмерная длина активной среды, которая в нашей нормировке равна  $L = 1.0$ . Режим синхронизации активной электронно-волновой среды в целом (т.е. тот режим, который изучался в предыдущих разделах) означает, что имеет место синхронизация временных масштабов внешнего сигнала  $F_{\text{ext1}}(\tau)$  и сигнала  $F_{\text{out2}}(\tau) = F_2(\tau, \xi = 0)$ , снимаемого с выхода ведомой (второй) среды. Будем теперь анализировать пространственно-временную динамику ведомой системы, анализируя наличие синхронизации временных масштабов внешнего сигнала  $E_{\text{ext1}}(\tau)$  и сигналов  $F_2(\tau, \xi)$ , снимаемых из различных точек  $\xi$  пространства ведомой активной среды.

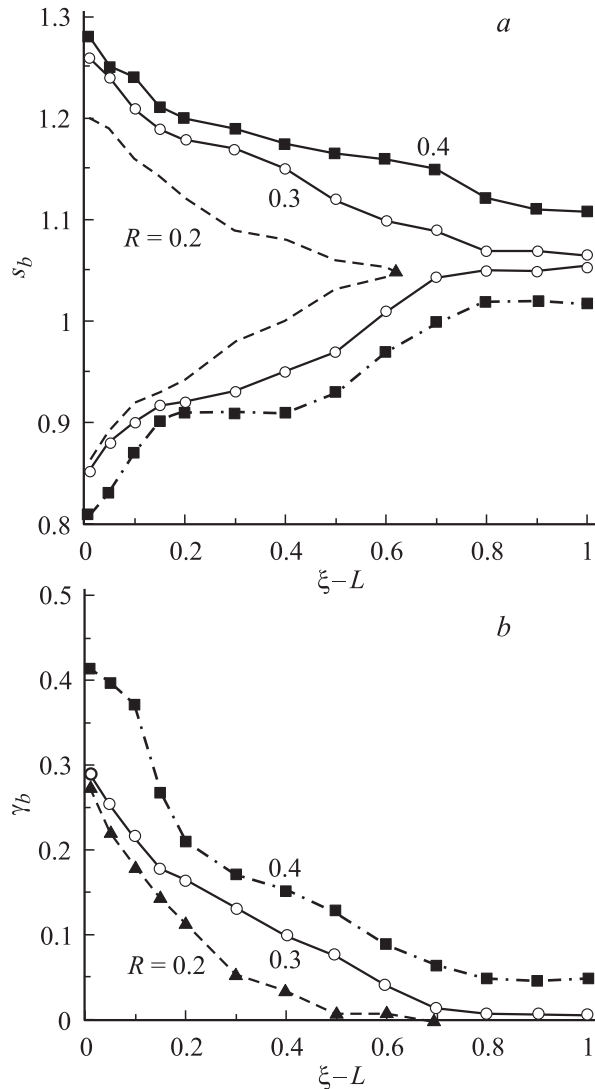
Для определенности рассмотрим синхронизацию временных масштабов, находящихся вблизи наиболее интенсивного масштаба  $s_b$  в вейвлетном спектре мощности внешнего хаотического сигнала. Вблизи этого временного масштаба, как было выше, синхронизация временных масштабов возникает при меньшем значении параметра связи  $R$  (при меньшей энергии внешнего сигнала  $P_{\text{ext}} = R^2 |F_{\text{ext1}}|^2$ ). Будем исследовать диапазон  $\Delta s_b$  синхронных временных масштабов как функцию координаты пространства активной среды. Зависимость  $\Delta s_b(\xi)$  и рассчитанная по ней мера синхронизации  $\gamma(\xi)$  (14) являются характеристиками, описывающими пространственную динамику установления режима хаотической синхронизации активной среды при воздействии внешнего хаотического сигнала на одном из ее концов.

На рис. 5, *a* на плоскости „координата  $(\xi - L)$  пространства взаимодействия, отсчитываемая от входа системы  $\xi = L$ , временные масштабы  $s^*$ “ представлены границы области синхронизованных масштабов в различных сечениях пространства для трех значений амплитуды коэффициента связи  $R$ . Видно, что ширина области временных масштабов, для которых выполняются условия синхронизации (5) и (6), максимальна в области пространства, примыкающей к границе активной среды  $\xi = L = 1.0$ , на которую подается управляющий сигнал ведущей ЛОВ (см. граничные условия (13) для поля  $F_2$  ведомой ЛОВ). Далее по мере продвижения вдоль активной среды к выходу лампы  $\xi = 0$  наблюдается постепенное уменьшение диапазона  $\Delta s_b$  синхронизируемых масштабов. Мера синхронизации  $\gamma_b(\xi)$  (рис. 5, *b*) ведет себя вдоль пространства активной среды аналогично ширине области синхронизируемых масштабов  $\Delta s_b$ . По мере уменьшения координаты  $\xi$  пространства взаимодействия величина энергии вейвлетного спектра колебаний, приходящаяся на область синхронизируемых масштабов, постепенно уменьшается.

Если величина коэффициента связи  $R$  соответствует значениям, при которых не наблюдается хаотическая синхронизация связанных ЛОВ ( $R < 0.29$ ; разделы 2 и 3), то ширина области синхронизируемых масштабов достигает нуля на длине пространства взаимодействия  $\xi_s < L$ . Последнее означает, что в асинхронном хаотическом режиме вдоль пространства взаимодействия неавтономной (ведомой) активной среды наблюдается сложная пространственная динамика захвата фаз временных масштабов колебаний поля  $F_2(\tau, \xi)$ , которая характеризуется следующей зависимостью ширины области синхронизируемых временных масштабов (рис. 5, *a*,  $R = 0.2$ ).

$$\begin{aligned} \Delta s &\neq 0 && \text{при } \xi > L - \xi_s, \\ \Delta s &= 0 && \text{при } \xi < L - \xi_s. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда можно говорить о том, что пространство неавтономной (ведомой) активной среды в асинхронном режиме работы делится на две характерные области. Первая



**Рис. 5.** Границы области синхронизованных масштабов на плоскости „координата  $(\xi - L)$  пространства взаимодействия, отсчитываемая от входа системы  $\xi = L$ , — временные масштабы  $s^*$ “ (*a*) и мера синхронизации  $\gamma_b(\xi)$  как функция координаты  $(\xi - L)$  пространства взаимодействия (*b*), построенные для различных значений амплитуды коэффициента связи  $R$ .

из них длиной  $\xi_s$  и координатами  $\xi \in (L - \xi_s, L)$  примыкает к входу активной среды  $\xi = L$  и характеризуется тем, что колебания поля  $F_2(\tau, \xi)$  в ней демонстрируют хаотическую синхронизацию с колебаниями входного сигнала  $E_{\text{ext1}}(\tau)$  (а следовательно, и отличную от нуля меру хаотической синхронизации  $\gamma_b|_{\xi > L - \xi_s} \neq 0$ ) на временных масштабах, лежащих в некотором диапазоне  $\Delta s$ . Эту область пространства естественно назвать областью синхронных колебаний, а ее длину  $\xi_s$  — длиной синхронизации. Вторая область  $\xi \in (0, L - \xi_s)$  есть область, в которой хаотическая синхронизация разрушается и диапазон синхронизируемых временных масштабов (15), а также мера синхронизации  $\gamma_b$ , в ней равны нулю.



С увеличением коэффициента связи длина синхронизации  $\xi_s$  растет, и при некотором значении  $R = R_b$  (рис. 2) длина синхронизации становится равной длине пространства взаимодействия  $\xi_s \equiv L$ . Последнее означает, что во всем пространстве активной электронно-волновой среды устанавливается режим хаотической синхронизации, а следовательно, можно говорить о хаотической синхронизации ЛОВ как единого целого. Именно этот режим изучался в разделах статьи, когда исследовалась динамика временных масштабов и ассоциированных с ними хаотического сигнала ведомой системы, который снимался с выхода  $\xi = 0$ .

В качестве иллюстрации режима хаотической синхронизации всей активной среды на рис. 5,а показаны зависимости границ области синхронизируемых масштабов, построенные для  $R = 0.3 \approx R_b$ . Видно, что теперь во всех сечениях пространства активной среды наблюдается не равный нулю диапазон синхронных временных масштабов  $\Delta s$ . В этом случае можно говорить о синхронной динамике (с точки зрения хаотической синхронизации) всей активной среды как единого целого. С увеличением параметра связи диапазон синхронизированных временных масштабов  $\Delta s(\xi)$  расширяется (рис. 5,а,  $R = 0.4$ ), что хорошо согласуется с результатами раздела. Динамика относительной энергии вейвлетного спектра колебаний, приходящейся на синхронные временные масштабы в этом случае вблизи входа  $\xi = L$  системы составляет величину 30–40% в точке  $\xi = 0.99L$ . По мере продвижения сигнала вдоль пространства величина  $\gamma_b$  уменьшается, и на выходе системы  $\xi = 0$  доля синхронной энергии не превышает 1–5%.

Отметим, что аналогичные результаты были получены в нашей работе [9] для другой распределенной системы, находящейся под гармоническим внешним воздействием. В ней было показано, что при воздействии внешнего гармонического сигнала на хаотическую генерацию в гиролampe со встречной волной (гирос-ЛВВ) в зависимости от параметров внешнего сигнала возможно установление как режима синхронизации, который характеризуется захватом базовой наиболее интенсивной спектральной составляющей в хаотическом спектре мощности, так и асинхронного режима. В последнем случае захват базовой частоты колебаний, как и в нашем рассмотрении, имел место только на некоторой длине пространства взаимодействия  $\Delta \xi < L$ , где  $L$  — длина пространства взаимодействия гиро-ЛВВ. В работе [9] рассматривалось внешнее гармоническое воздействие, что позволяло анализировать захват единственной базовой частоты в спектре хаотической генерации, однако такое рассмотрение не позволило детально исследовать динамику установления режима вынужденной хаотической синхронизации вдоль пространства активной среды.

В заключение раздела отметим, что на рис. 5 показаны зависимости, построенные для базового масштаба  $s_b$ . Аналогичные зависимости получены при анализе пространственной динамики синхронизируемых масштабов

в области модуляционного масштаба  $s_m$ . Единственное отличие заключается в том, что длина области синхронных масштабов (длина синхронизации) становится равной длине пространства активной среды при больших значениях амплитуды коэффициента связи, чем для базового масштаба  $s_b$ , что согласуется с результатами предыдущих разделов статьи.

## Выводы

В представленной работе с помощью нового предложенного нами [14] метода анализа хаотической синхронизации, основанного на введении множества временных масштабов и ассоциированных с ними фаз хаотического сигнала, анализируются хаотические колебания в двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем. Использование данного метода анализа хаотической синхронизации позволило изучить хаотическую синхронизацию в связанных электронно-волновых генераторах со сложной динамикой, так как имеющиеся классические методы ввода фазы хаотического сигнала не позволяют анализировать подобные хаотические сигналы со сложной топологией аттрактора. Одновременно предложенный метод позволил разделить хаотическую синхронизацию низкочастотных модуляционных колебаний амплитуды поля и синхронизацию высокочастотных спектральных компонент генерации ЛОВ, что также невозможно было бы сделать, используя традиционные подходы к анализу хаотической синхронизации.

Было показано, что с ростом связи между СВЧ генераторами наблюдается возникновение режима хаотической синхронизации, который характеризуется возникновением фазовой связи между временными масштабами хаотических колебаний полей в ведомой и ведущей системах. С увеличением параметра связи вначале возникает захват фаз высокочастотных компонент спектра мощности, соответствующих частотам синхронизма электронной и электромагнитной волн. Синхронизация низкочастотных модуляционных колебаний происходит при больших значениях коэффициента связи. В асинхронном режиме хаотических колебаний пространство активной среды условно делится на две области, в одной из которых, примыкающей ко входу системы  $\xi = L$ , устанавливается хаотическая синхронизация временных масштабов колебаний поля. Длина области синхронных колебаний (длина синхронизации  $\xi_s$ ) растет с ростом связи, и установление режима хаотической синхронизации связанных генераторов определяется условием, что длина синхронизации ведомого генератора становится равной длине активной среды  $\xi_s = L$ .

Авторы благодарны Д.И. Трубецкову за интерес к данной работе, полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ CRDF (грант REC-006) и „Университеты России“ (проект УР.01.01.051), а также ФНП „Династия“ и Международного центра фундаментальной физики.

## Список литературы

- [1] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. N 11. P. 1804–1807.
- [2] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synbronization: a Universal Concep in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [3] *Ticos C.M., Rosa E., Pardo W.B., Walkenstein J.A., Monti M.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. N 14. P. 2929.
- [4] *Anishenko V.A., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., Bordyugov G.V.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. N 10. P. 2339–2348/
- [5] *Tass P.A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. N 8. P. 088101.
- [6] *Prokhorov et al.* // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 041913.
- [7] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [8] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV. № 9. P. 773–792.
- [9] *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // РиЭ. 2003. Т. 48. № 1. С. 116–124.
- [10] *Рыскин Н.М., Тутов В.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 90–94.
- [11] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // РиЭ. 2002. Т. 47. № 2. С. 133–162.
- [12] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2291–2305.
- [13] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* РиЭ. 2004. Т. 49. № 1. С. 123.
- [14] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. Вып. 7. С. 391–395.
- [15] *Wavelets in Physics* / Ed. J.C. Van den Berg. Cambridge University Press, 1998.
- [16] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [17] *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Наука, 2003.
- [18] *Четвериков А.П.* // Изв. РАН. Сер. физ. 1994. Т. 58. № 8. С. 171.
- [19] *Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9, 10. С. 1415.
- [20] *Кузнецов С.П., Четвериков А.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1. С. 109.
- [21] *Четвериков А.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 5. С. 46.
- [22] *Kurths J., Pikovsky A.S.* // Chaos Solit. Fract. 1995. Vol. 5. N 10. P. 1893–1899.
- [23] *Takens F.* // Lectures Notes in Mathematics / Ed. D. Rand, L.-S. Young. New York: Springer Verlag, 1981. P. 366.
- [24] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // ДАН. 2004. Т. 395. № 1. С. 143–145.