01;03

Затухание продольных колебаний давления в цилиндрической кювете

© А.А. Пикулев

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: pikulev@expd.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 9 июня 2004 г.)

Рассмотрены продольные акустические колебания в кювете цилиндрической формы. Получены выражения для распределения температуры и скорости в периодически нестационарном пограничном слое. Найдено выражение для характерного времени затухания колебаний давления.

Введение

Возникновение продольных колебаний давления в резонаторах цилиндрической формы является довольно широко распространенным явлением. Наиболее известные примеры — духовые музыкальные инструменты, флейта, орган и т. п., где звукоизвлечение основано на эффекте автоколебаний [1]. При этом тембр звучания зависит от материала, конструкции инструмента, а также способа звукоизвлечения. Как хорошо известно, тембр инструмента связан со спектральным распределением мощности звукового излучения инструмента по высшим гармоникам. Спектральная мощность излучения определяется разностью энергии, затрачиваемой внешним источником в единицу времени на генерацию данной гармоники и мощности диссипации. Величина последней в первую очередь связана с влиянием эффектов вязкости и теплопроводности и определяется геометрией акустического резонатора.

Кроме духовых музыкальных инструментов, продольные колебания давления (регулярно приводящие к негативным последствиям) наблюдаются в водопроводных трубах, причем возникновение таких волн давления также связано с эффектом автоколебаний [2].

В качестве другого примера можно привести случай герметичных кювет лазеров с ядерной накачкой, где генерация продольных волн давления происходит посредством неоднородного по длине кюветы импульсного нагрева газовой смеси [3]. После окончания импульса в кюветах наблюдаются колебания давления, причем амплитуда колебаний уменьшается с течением времени [4,5]. Поскольку давление определяет величину энергии, вложенной в активную среду лазера, и является важной характеристикой газодинамических процессов, происходящих в лазерной кювете, именно оно обычно является тем параметром, по которому тестируют результаты численного моделирования газодинамики лазеров с ядерной накачкой. С другой стороны, численное моделирование продольных колебаний давления с учетом затухания достаточно сложно, что связано с повышением размерности задачи и возникновением двух масштабов длины в поперечном к боковым стенкам кюветы направлении: основное течение и значительно более тонкая область пограничного слоя. Эти особенности течения могут приводить к низкой точности расчетов: так, в работе [4] эффект численной вязкости [6] привел к существенно более быстрому затуханию колебаний давления, чем это наблюдалось в эксперименте.

В данной работе предложена газодинамическая модель продольных акустических колебаний давления в кювете цилиндрической формы, которая позволяет описать структуру периодически нестационарного пограничного слоя температуры и скорости и получить простое выражение для характерного времени затухания волн давления.

1. Основные уравнения

Полная система уравнений газодинамики состоит из уравнений сохранения количества движения, уравнения неразрывности и энергии (в пренебрежении энергией диссипации), которые имеют следующий вид [7,8]:

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho\mathbf{u}+(\nabla,\mathbf{u})\rho\mathbf{u}=-\nabla p+(\nabla,\mu\nabla)\mathbf{u}+\nabla\{\mu(\nabla,\mathbf{u})\}/3,\\
\partial_t\rho+(\nabla,\rho\mathbf{u})=0,\\
\partial_t\{p/(\gamma-1)+\\
+\rho\mathbf{u}^2/2\}+\big(\nabla,\mathbf{u}\{\gamma p/(\gamma-1)+\rho\mathbf{u}^2/2\}\big)=(\nabla,\lambda\nabla)T,
\end{cases}
\qquad (1)
$$

где $\mathbf{u}\equiv(u,v,w)$, ρ, T, p — вектор скорости, плотность, температура и давление газа соответственно; μ — коэффициент динамической вязкости; λ — коэффициент теплопроводности; γ — показатель адиабаты.

Предполагаем, что координатная ось $0z$ направлена параллельно образующим цилиндрической поверхности кюветы, длина кюветы равна $2L$. Геомтерия задачи представлена на рис. 1.

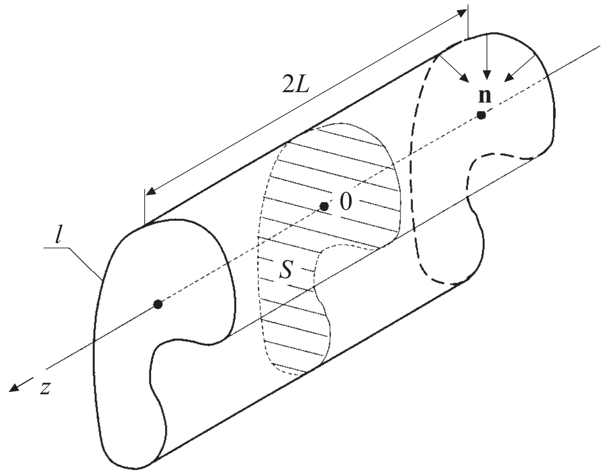

Рис. 1. Схема цилиндрической кюветы.

Рассмотрим колебания давления в акустическом приближении, а именно предполагаем, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \Delta\rho, & |\Delta\rho| \ll \rho_0, \\ p = P_0 + \Delta p, & |\Delta p| \ll P_0, \end{cases} \tag{2}$$

где P_0, ρ_0 — средние значения давления и плотности газа в кювете.

Используя выражения (2) и пренебрегая членами второго порядка малости и выше, из системы (1) получаем

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \mathbf{u} = -\nabla(\Delta p) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mu\nabla(\nabla, \mathbf{u})/3, \\ \partial_t \Delta\rho + \rho_0(\nabla, \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \Delta p + \gamma P_0(\nabla, \mathbf{u}) = (\gamma - 1)\lambda\nabla^2 T. \end{cases} \tag{3}$$

Основными причинами затухания продольных колебаний давления являются напряжения силы вязкого трения на боковых стенках кюветы (влияние вязкости) и процесс кондуктивной теплопроводности через эти стенки (влияние теплопроводности). В связи с периодическим характером изменения давления процессы вязкости и теплопроводности будут существенны лишь в пристеночной области (пограничном слое) с характерным размером δ. Ниже будем предполагать, что все линейные размеры кюветы (длина, поперечный размер), а также радиус кривизны поверхности боковых стенок кюветы существенно превосходят характерную толщину пограничного слоя температуры и скорости. Выполнение этих условий приводит к тому, что в уравнениях (3) можно пренебречь влиянием формы поперечного сечения кюветы на структуру пограничного слоя и считать пограничный слой локально плоским. Кроме того, в системе (3) можно пренебречь продольными диффузионными членами по сравнению с поперечными, т. е. положить $\nabla^2 \approx \nabla^2_{x,y}$, где $\nabla^2_{x,y} = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ — поперечный оператор Лапласа.

Наличие пограничного слоя приводит к неоднородности давления по поперечному сечению кюветы даже в случае возбуждения только продольных акустических волн; характерное время поперечной релаксации давления составляет величину $\tau \sim \delta/\upsilon$, где υ — скорость звука. Аналогично продольная релаксация давления характеризуется длительностью $T \sim L/\upsilon$, которая существенно превосходит время поперечной релаксации $T \gg \tau$. Поэтому с точки зрения временны́х масштабов, бóльших времени поперечной релаксации, давление в кювете можно считать однородным по поперечному сечению.

Для получения уравнения для давления проведем усреднение системы (3) по поперечному сечению кюветы S. Учитывая условие прилипания на боковых стенках кюветы и пренебрегая продольной вязкостью и теплопроводностью по сравнению с поперечной, для первого и третьего уравнений системы (3) получаем следующие выражения (нормаль n направлена внутрь кюветы):

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \langle w \rangle = -\partial_z \Delta p - \frac{1}{S} \oint\limits_l \mu \frac{\partial w}{\partial n}\, dl, \\ \frac{\partial_t \Delta p}{\gamma - 1} + \frac{\gamma P_0 \partial_z \langle w \rangle}{\gamma - 1} = -\frac{1}{S} \oint\limits_l \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, dl, \end{cases} \tag{4}$$

где $\langle \ldots \rangle$ обозначает усреднение величины по поперечному сечению кюветы, l — периметр поперечного сечения кюветы.

Для поправки давления справедливо соотношение $\langle \Delta p \rangle \cong \Delta p$. Из системы (4) получаем неоднородное волновое уравнение для давления

$$\partial^2_{tt} \Delta p - \upsilon^2 \partial^2_{zz} \Delta p = -\frac{\gamma - 1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \oint\limits_l \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, dl + \frac{\gamma P_0}{\rho_0 S} \frac{\partial}{\partial z} \oint\limits_l \mu \frac{\partial w}{\partial z}\, dl. \tag{5}$$

Связь давления, температуры и плотности идеального газа выражается законом Менделеева–Клайперона [7], который в акустическом приближении имеет вид

$$\Delta p/(\gamma - 1) = c_V T_0 \Delta\rho + c_V \rho_0 \Delta T, \tag{6}$$

где c_V — теплоемкость при постоянном объеме; T_0 — средняя температура газа в кювете, равная температуре стенки; ΔT — поправка температуры $T = T_0 + \Delta T$.

Используя соотношение (6) и уравнение неразрывности (второе уравнение системы (3)), приведем уравнения сохранения количества движения вдоль оси 0z и энергии к следующему виду:

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t w = -\partial_z \Delta p + \mu \nabla^2_{x,y} w, \\ c_p \rho_0 \partial_t \Delta T = \partial_t \Delta p + \lambda \nabla^2_{x,y} \Delta T, \end{cases} \tag{7}$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Уравнения (5) и (7) образуют замкнутую систему интегродифференциальных уравнений затухающих продольных колебаний давления в акустическом приближении.

Приведем решение этой системы в предположении слабого затухания. В данном случае решение уравнения (5) для давления представляет собой интерференцию стоячих волн с медленно меняющимися амплитудами P_n

$$\Delta p = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(k_n z) \exp(i\omega_n t + i\varphi_n), \qquad (8)$$

где $k = \pi n/L$ — волновое число; $\omega_n = k_n \upsilon$ — круговая частота n-й моды колебаний; φ_n — фаза колебаний.

В выражении (8) учтены граничные условия на торцах кюветы $\partial_z \Delta p(t, \pm L) = 0$. Из требования медленности затухания колебаний следует условие $|\partial_t P_n| \ll \omega_n P_n$, поэтому давление в уравнениях системы (7) имеет вид (8), причем амплитуды P_n считаются не зависящими от времени (квазистационарными).

2. Вычисление силы вязкого трения и потока тепла на стенку кюветы

В связи с линейностью уравнений (7) их решение можно искать в виде суперпозиции решений для волн давления вида (из соображений удобства вычислений в выражении (9) вместо стоячих волн использованы бегущие волны)

$$p_n = P_n \exp(i\omega_n t \pm i k_n z + i\varphi_n), \qquad (9)$$

где „плюс“ относится к волнам, бегущим справа налево, а „минус“ — слева направо.

Стоячие волны вида (8) могут быть получены суперпозицией двух бегущих в разные стороны волн одинаковой амплитуды. После подстановки выражения (9) система (7) принимает вид (здесь x — координата, совпадающая с внутренней нормалью к стенке; на стенке $x = 0$)

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t w_n = \pm i k_n p_n + \mu \partial^2_{xx} w_n, \\ c_p \rho_0 \partial_t T_n = i\omega_n p_n + \lambda \partial^2_{xx} T_n. \end{cases} \qquad (10)$$

В качестве граничных условий для системы (10) используем условие прилипания $w_n(0, z, t) = 0$ и равенство температуры газа температуре стенки $T_n(0, z, t) = 0$. На бесконечности потребуем, чтобы скорость и температура были ограничены $|w_n(+\infty, z, t)| < \infty$, $|T_n(+\infty, z, t)| < \infty$. Ниже нас будет интересовать решение при $t \to \infty$, т. е. только частное решение системы (10), поэтому начальных условий задавать не будем. Решение уравнений (10) ищем в виде

$$\begin{cases} w_n = W_n(x) \exp(i\omega_n t \pm i k_n z + i\varphi_n), \\ T_n = T_n(x) \exp(i\omega_n t \pm i k_n z + i\varphi_n). \end{cases} \qquad (11)$$

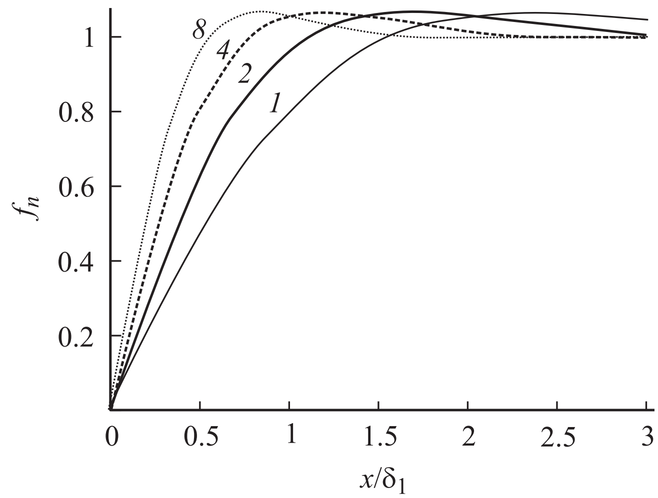

Рис. 2. Относительное распределение температуры и скорости в пограничном слое (около кривых — номера мод).

Подставляя в уравнения (10) выражения (9) и (11), получаем следующие дифференциальные уравнения для амплитуд W_n и $\hat{T}_n$:

$$\begin{cases} \mu \partial^2_{xx} W_n - i\omega_n \rho_0 W_n = \mp i k_n P_n, \\ \lambda \partial^2_{xx} \hat{T}_n - i\omega_n c_p \rho_0 \hat{T}_n = -i\omega_n P_n. \end{cases} \qquad (12)$$

Частные решения неоднородных уравнений (12) с вышеприведенными граничными условиями имеют вид

$$\begin{cases} W_n = \pm P_n \big(1 - \exp\{-x(i+1)(\omega_n/2\nu)^{1/2}\}\big)/\rho_0 \upsilon, \\ \hat{T}_n = P_n \big(1 - \exp\{-x(i+1)(\omega_n/2\chi)^{1/2}\}\big)/c_p \rho_0, \end{cases} \qquad (13)$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ — коэффициент кинематической вязкости; $\chi = \lambda/c_p\rho_0$ — коэффициент температуропроводности.

Из уравнений (13) видно, что толщина пограничного слоя для n-й моды в случае установившихся колебаний давления не зависит от времени и составляет величину порядка $\delta_n^{\upsilon} = (2\nu/\omega_n)^{1/2}$ для пограничного слоя скорости и $\delta_n^T = (2\chi/\omega_n)^{1/2}$ в случае пограничного слоя температуры. На рис. 2 представлено относительное распределение скорости и температуры для нескольких мод колебаний в пограничном слое, которое имеет универсальный вид $f_n(x) = 1 - \exp(-x/\delta_n)\cos(x/\delta_n)$.

Из формул (11), (13) легко определить величину напряжения силы вязкого трения, действующего на стенку кюветы, а также величину плотности потока тепла через эту стенку, которые на угол $\pi/4$ опережают давление по фазе,

$$\begin{cases} \mu \partial_x w_n(0, z, t) = \pm p_n (\nu\omega_n)^{1/2} \exp(i\pi/4)/\upsilon, \\ \lambda \partial_x T_n(0, z, t) = p_n (\chi\omega_n)^{1/2} \exp(i\pi/4). \end{cases} \qquad (14)$$

3. Затухание колебаний давления

Для определения скорости затухания колебаний давления подставим значения напряжения силы вязкого трения и плотности потока тепла (14) в уравнение (5). Учитывая условие медленного изменения амплитуды колебаний давления $|\partial_t P_n| \ll \omega_n P_n$, получаем следующее уравнение:

$$\partial_{tt}^2 p_n - \upsilon^2 \partial_{zz}^2 p_n = -ilp_n\omega_n^{3/2}\{\nu^{1/2} + (\gamma - 1)\chi^{1/2}\} \times \exp(i\pi/4)/S. \quad (15)$$

Отметим, что вид уравнения (15) не зависит от направления движения бегущих волн, т.е. изменение амплитуды колебаний со временем как для бегущих, так и для стоячих волн одинаково. Решение уравнения (15) ищем в виде

$$p_n = P_n \exp(i\omega_n t - i\Delta\omega_n t - ik_n z - t/\tau_n), \quad (16)$$

где $\Delta\omega_n \ll \omega_n$ — затягивание частоты колебаний; $\tau_n \gg 1/\omega_n$ — характерное время затухания n-й моды колебаний давления.

Подставляя (16) в (15) и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем окончательное выражение

$$1/\tau_n = \Delta\omega_n = l\omega_n^{1/2}\{\nu^{1/2} + (\gamma - 1)\chi^{1/2}\}/\{2^{3/2}S\}. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что высшие моды затухают быстрее ($\tau_n \sim 1/n^{1/2}$), чем низшие, поэтому спектр свободных колебаний со временем вырождается до основной моды.

Итак, влияние вязкости и теплопроводности приводит к двум эффектам: 1) экспоненциальному затуханию колебаний давления и 2) затягиванию частоты колебаний. Второй эффект является незначительным и в большинстве случаев им можно пренебречь. Из формулы (17) следует, что с увеличением поперечного сечения кюветы характерное время затухания возрастает, например, в случае кюветы круглого сечения $\tau_n \sim r$, где r — радиус кюветы.

В качестве приложения в таблице приведены некоторые характерные параметры первой моды колебаний давления для нескольких инертных газов для лазерной установки ЛУНА-2М [9]. Полная длина лазерных кювет составляет 2.4 m, поперечное сечение $S = 2.1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$, периметр поперечного сечения $l = 0.48$ m [9]. При проведении расчетов было принято $T_0 = 300$ K. Расчеты показывают, что в данном случае вклад теплопроводности в скорость затухания колебаний давления составляет около 45%, а вязкости — приблизительно 55%. Из таблицы видно, что толщина пограничного слоя скорости и температуры составляет доли миллиметра, характерное время затухания — десятки миллисекунд, а относительное затягивание частоты колебаний — несколько процентов. Отметим, что эти значения являются типичными для герметичных кювет лазеров с ядерной накачкой.

Некоторые параметры основной моды колебаний давления в лазерных кюветах установки ЛУНА-2М [9] для нескольких инертных газов

	He		Ne		Ar	
P_0, atm	1	2	0.7	1	0.25	0.5
δ_1^υ, mm	0.29	0.21	0.30	0.25	0.35	0.25
δ_1^T, mm	0.35	0.25	0.35	0.3	0.42	0.3
τ_1, ms	13	19	29	35	34	49
$\Delta\omega_1/\omega_1$, %	3.0	2.1	3.0	2.5	3.6	2.5

Список литературы

[1] Музыкальный энциклопедический словарь / Под ред. Г.В. Келдыша. М.: Сов. энциклопедия, 1990. 672 с.
[2] *Гиргидов А.Д.* Механика жидкости и газа (гидравлика). СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 545 с.
[3] *Sinyanskii A.A., Melnikov S.P.* // Proc. SPIE. 1998. Vol. 3686. P. 43–55.
[4] *Андросенко А.А., Андросенко П.А., Гусев Н.В., Дьяченко П.П.* // Тр. отраслевой конф. „Физика ядерно-возбуждаемой плазмы и проблемы лазеров с ядерной накачкой“. Обнинск, 1993. Т. 2. С. 23–44.
[5] *Torczynski J.R., Gross R.J., Hays G.N.* et al. // Nuc. Sci. and Eng. 1989. Vol. 101. N 3. P. 280–284.
[6] *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2. 552 с.
[7] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М. Наука, 1973. 848 с.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
[9] *Воинов А.М., Довбыш Л.Е., Кривоносов В.Н.* и др. // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов. 2000. № 2/3. С. 63–68.