

01;03

## Скорость нестационарного испарения сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры вблизи ее поверхности

© Ю.И. Яламов, М.К. Кузьмин

Московский государственный областной университет,  
105005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 2004 г.)

Исследован общий случай нестационарного процесса испарения и конденсационного роста неподвижной сферической капли, когда температура ее поверхности и концентрация насыщенных паров на ней являются переменными величинами и при этом учитываются скачки концентрации и температуры на слое Кнудсена. Получено общее для всех времен выражение для скорости изменения радиуса капли, из которого с использованием асимптотических разложений функций выделены первые приближения, отдельно для значений времени, близких к нулю, и отдельно для больших его значений. Проведен анализ полученных формул и их связи с известными из предшествующих теорий формулами, для чего найдены численные значения скорости испарения капель воды в воздухе в широком диапазоне начальных условий.

### Введение и постановка задачи

В статьях [1,2] нами была рассмотрена теория нестационарного процесса испарения и конденсационного роста неподвижной сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры на слое Кнудсена вблизи ее поверхности. В этих статьях было найдено общее для всех времен выражение для скорости изменения радиуса капли, из которого выделены формулы для значений времени, как близких к нулю, так и больших, и установлены границы применимости ранее полученных формул для квазистационарного и нестационарного изменения радиуса капли. При постановке граничных условий в упомянутых статьях предполагалось, что концентрация насыщенных паров на поверхности капли постоянна, хотя температура на той же поверхности может испытывать незначительные изменения.

В настоящей статье анализируется более общий случай исследуемых процессов, когда температура поверхности капли и концентрация насыщенных паров на ней являются переменными величинами, связанными линейным приближением уравнения Клапейрона–Клаузиуса.

При решении указанной задачи предполагается, что первая компонента бинарной газовой смеси образована молекулами вещества капли, а вторая компонента — молекулами несущего газа, не испытывающего фазового перехода в рассматриваемом интервале температур. При этом, следуя Максвеллу [3], концентрация пара у поверхности капли предполагается равной концентрации насыщенного пара при температуре ее поверхности. Будем полагать, что радиус рассматриваемой капли  $R$  много больше длины свободного пробега молекул газа при данной температуре ( $R \gg \lambda$ ), но в то же время не настолько большой, чтобы не учитывать скачки концентрации и температуры. Распределение (относительной) концентрации пара  $c_1$  и температура парогазовой смеси  $T$  удовлетворяют следующей системе уравнений с

начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c_1}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$c_1(r, t)|_{t=0} = c_{10}, \quad c_1(r, t)|_{r \rightarrow +\infty} = c_{1\infty} = c_{10}, \quad (3)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad T(r, t)|_{r \rightarrow +\infty} = T_\infty = T_0, \quad (4)$$

$$[c_1(r, t) - c_{1s}(t)]|_{r=R} = \left( K_c^{(c)} \frac{\partial c_1}{\partial r} + K_c^{(T)} \frac{1}{T_0} \frac{\partial T}{\partial r} \right) |_{r=R}, \quad (5)$$

$$[T(r, t) - T_s(t)]|_{r=R} = \left( K_T^{(T)} \frac{\partial T}{\partial r} + K_T^{(c)} T_0 \frac{\partial c_1}{\partial r} \right) |_{r=R}, \quad (6)$$

$$LDnm_1 \frac{\partial c_1}{\partial r} |_{r=R} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} |_{r=R}, \quad (7)$$

где  $r$  — радиальная координата сферической системы координат с началом в центре капли;  $t$  — время;  $D = nm_2 D_{12} / \rho$ , где  $D_{12}$  — коэффициент взаимной диффузии компонент бинарной смеси;  $n = n_1 + n_2$ ;  $n_1, m_1$  и  $n_2, m_2$  — концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно,  $\rho$  — плотность парогазовой смеси;  $a$  — коэффициент температуропроводности бинарной смеси; в граничные условия (5)–(7) входят  $K_c^{(c)}, K_c^{(T)}, K_T^{(T)}, K_T^{(c)}$  — газокINETические коэффициенты скачков концентрации и температуры [4,5];  $L$  — удельное тепло фазового перехода вещества капли;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности парогазовой смеси.

К условиям (1)–(7) присоединим линейное приближение уравнения Клапейрона–Клаузиуса [6], справедливое при малом изменении температуры поверхности капли,

$$c_{1s}(t) = c_{1s0} \{ 1 + v_{s0} [T_s(t) - T_{s0}] \}, \quad (8)$$

где  $c_{1s}(t) = c_1(T_s) = n_1(T_s)/n$ ;  $n_1(T_s)$  — концентрация насыщенных паров вещества капли при температуре ее

поверхности  $T_s = T_s(t)$ , причем

$$c_{1s}(t)|_{r=0} = c_{1s0}, \quad T_s(t)|_{r=0} = T_{s0},$$

$$v_{s0} = \frac{Lm_1 - kT_{s0}}{kT_{s0}^2}, \quad (9)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Следует заметить, что в выражении (9) величина  $Lm_1$  на порядок больше величины  $kT_{s0}$  для большинства жидкостей (сюда относятся вода, спирты, эфиры) при температурах поверхности капли, расположенных ниже температуры кипения [7], поэтому в наших рассмотренных полагаем  $v_{s0} > 0$ .

Гарничные условия (5), (6) с помощью равенства (7) можно представить в более удобном для исследования виде

$$[c_1(r, t) - c_{1s}(t)]|_{r=R} = \chi_c \frac{\partial c_1}{\partial r}|_{r=R}, \quad (10)$$

$$[T(r, t) - T_s(t)]|_{r=R} = \chi_T \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R}, \quad (11)$$

где

$$\chi_c = K_c^{(c)} - \frac{l}{\kappa T_0} K_c^{(T)}, \quad \chi_T = K_T^{(T)} - \frac{\kappa T_0}{l} K_T^{(c)}, \quad l = LDnm_1.$$

Величины  $\chi_c, \chi_T$ , введенные в рассмотрение нами впервые в статьях [1,2], называем составными коэффициентами скачков концентрации и температуры соответственно. Они неотрицательны, а обращение в нуль любого из них является необходимым и достаточным условием отсутствия соответствующего скачка. Левые части соотношений (10) и (11) представляют собой функции от  $t$ , введем для них обозначения

$$J_c(t) = [c_1(r, t) - c_{1s}(t)]|_{r=R},$$

$$J_T(t) = [T(r, t) - T_s(t)]|_{r=R}. \quad (12)$$

## Метод решения

Чтобы решить задачу, используем интегральные преобразования Лапласа [8], введя следующие обозначения:

$$S(r, p) = \int_0^{\infty} c_1(r, t) \exp(-pt) dt,$$

$$\theta(r, p) = \int_0^{\infty} T(r, t) \exp(-pt) dt.$$

С помощью начальных условий (3), (4) находим соответствующие изображения уравнений (1) и (2)

$$DS'' + \frac{2D}{r} S' - pS + c_{10} = 0,$$

$$a\theta'' + \frac{2a}{r} \theta' - p\theta + T_0 = 0,$$

представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для неизвестных функций  $S(r, p), \theta(r, p)$ , где  $r$  — независимая переменная, а  $p$  играет роль параметра. Общее решение каждого из найденных линейных уравнений с переменными коэффициентами соответственно имеет вид [9]

$$S(r, p) - \frac{c_{10}}{p} = \frac{A}{r} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} r\right) + \frac{A'}{r} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{D}} r\right), \quad (13)$$

$$\theta(r, p) - \frac{T_0}{p} = \frac{B}{r} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} r\right) + \frac{B'}{r} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} r\right), \quad (14)$$

где  $A, A', B, B'$  — величины („постоянные“ интегрирования), определяемые условиями задачи.

Прежде всего с учетом граничных условий (3), (4) находим

$$A' = B' = 0. \quad (15)$$

Теперь, введя обозначения

$$S_s(p) = \int_0^{\infty} c_{1s}(t) \exp(-pt) dt,$$

$$\theta_s(p) = \int_0^{\infty} T_s(t) \exp(-pt) dt,$$

запишем граничные условия (7), (8), (10), (11) в пространстве изображений

$$\left. \begin{aligned} (1 + \chi_c p_1) q_1 A - RS_s &= -\frac{c_{10} R}{p}, \\ (1 + \chi_T p_2) q_2 B - R\theta_s &= -\frac{T_0 R}{p}, \\ l p_1 q_1 A + \kappa p_2 q_2 B &= 0, \\ S_s - c_{1s0} v_{s0} \theta_s &= \frac{c_{1s0}}{p} (1 - v_{s0} T_{s0}), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{R} + \sqrt{\frac{p}{D}}, \quad p_2 = \frac{1}{R} + \sqrt{\frac{p}{a}},$$

$$q_1 = \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} R\right), \quad q_2 = \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} R\right).$$

Решая алгебраическую систему уравнений (16), находим

$$A = -\varepsilon \kappa R \sqrt{Da} \frac{p_2}{p \delta q_1}, \quad B = \varepsilon l R \sqrt{Da} \frac{p_1}{p \delta q_2}, \quad (17)$$

$$S_s = \frac{1}{p} \left[ c_{10} - \frac{\varepsilon \kappa}{\delta} (\chi_c p + a_1 \sqrt{p} + a_2) \right], \quad (18)$$

$$\theta_s = \frac{1}{p} \left[ T_0 + \frac{\varepsilon l}{\delta} (\chi_T p + b_1 \sqrt{p} + b_2) \right], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_c - c_{1s0}v_{s0}\varepsilon_T, \quad \varepsilon_c = J_c(t)|_{t=0}, \quad \varepsilon_T = J_T(t)|_{t=0}; \\ \delta &= g_0p + g_1\sqrt{p} + g_2; \\ g_0 &= \kappa\chi_c + c_{1s0}v_{s0}l\chi_T, \quad g_1 = \kappa a_1 + c_{1s0}v_{s0}lb_1, \\ g_2 &= \kappa a_2 + c_{1s0}v_{s0}lb_2; \\ a_1 &= \frac{\chi_c}{R}(\sqrt{D} + \sqrt{a}) + \sqrt{D}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{Da}}{R^2}(R + \chi_c); \\ b_1 &= \frac{\chi_T}{R}(\sqrt{D} + \sqrt{a}) + \sqrt{a}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{Da}}{R^2}(R + \chi_T).\end{aligned}\quad (20)$$

Обозначив  $\sqrt{p}$  через  $z$ , рассмотрим квадратный трехчлен  $\delta = g_0z^2 + g_1z + g_2$ . Корни его  $z_1, z_2$  действительны и различны, ибо

$$\begin{aligned}D_\delta &= g_1^2 - 4g_0g_2 = \left[ \frac{g_0}{R}(\sqrt{D} - \sqrt{a}) + \kappa\sqrt{D} - c_{1s0}v_{s0}l\sqrt{a} \right]^2 \\ &+ 4\kappa c_{1s0}v_{s0}l\sqrt{Da} > 0.\end{aligned}$$

Обозначив через

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -z_1 = (g_1 - \sqrt{D_\delta})/2g_0, \\ \beta_2 &= -z_2 = (g_1 + \sqrt{D_\delta})/2g_0\end{aligned}$$

положительные величины, имеем

$$\delta = g_0(\sqrt{p} + \beta_1)(\sqrt{p} + \beta_2).$$

В силу соотношений (15), (17) находим следующие выражения для функций (13), (14):

$$S(r, p) = \frac{c_{10}}{p} - \frac{\varepsilon\kappa R\sqrt{Da}}{r} \cdot \frac{p_2}{p\delta} \exp(-\alpha_c\sqrt{p}), \quad (21)$$

$$\theta(r, p) = \frac{T_0}{p} - \frac{\varepsilon l R\sqrt{Da}}{r} \cdot \frac{p_1}{p\delta} \exp(-\alpha_T\sqrt{p}), \quad (22)$$

где  $\alpha_c = (r - R)/\sqrt{D}$ ,  $\alpha_T = (r - R)/\sqrt{a}$ .

В пространстве оригиналов применяем следующие обозначения часто используемых ниже функций:

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \exp(\beta^2 t + \alpha\beta) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t}\right),$$

$$\varphi(\beta, t) = 1 - \Phi(0, \beta, t) = \exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}).$$

Переходя в пространство оригиналов, по выражениям (18), (19) находим соответственно зависимость концентрации насыщенных паров на поверхности капли и температуру на ней от времени

$$c_{1s}(t) = c_{10} - \varepsilon\kappa \left[ \frac{a_2}{g_2} + \sum_{j=1}^2 A_s(\beta_j)\varphi(\beta_j, t) \right], \quad (23)$$

$$T_s(t) = T_0 - \varepsilon l \left[ \frac{b_2}{g_2} + \sum_{j=1}^2 B_s(\beta_j)\varphi(\beta_j, t) \right], \quad (24)$$

где

$$A_s(\beta_j) = \frac{\chi_c\beta_j^2 - a_1\beta_j + a_2}{g_0\beta_j^2 - g_2}, \quad B_s(\beta_j) = \frac{\chi_T\beta_j^2 - b_1\beta_j + b_2}{g_0\beta_j^2 - g_2}.$$

По изображениям (21) и (22) находим в пространстве оригиналов соответственно распределение концентрации пара и поле температуры в окружающей каплю среде

$$c_1(r, t) = c_{10} - \frac{\varepsilon\kappa\sqrt{D}}{r} \sum_{j=1}^2 A(\beta_j)\Phi(\alpha_c, \beta_j, t), \quad (25)$$

$$T(r, t) = T_0 - \frac{\varepsilon l\sqrt{a}}{r} \sum_{j=1}^2 B(\beta_j)\Phi(\alpha_c, \beta_j, t), \quad (26)$$

где

$$A(\beta_j) = \frac{R\beta_j - \sqrt{a}}{g_0\beta_j^2 - g_2}, \quad B(\beta_j) = \frac{R\beta_j - \sqrt{D}}{g_0\beta_j^2 - g_2}.$$

До сих пор радиус капли  $R$  полагался постоянной величиной, что допустимо только в случае, когда масса капли значительно больше массы вещества, испарившегося с поверхности капли за время рассматриваемого процесса.

Как известно [3,10], скорость нестационарного изменения радиуса капли определяется формулой

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Dnm_1}{\gamma} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial r}|_{r=R},$$

где  $\gamma$  — плотность вещества капли,  $(\partial c_1/\partial r)|_{r=R}$  находится из уравнения (25).

Таким образом, имеем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon Dnm_1\kappa}{\gamma R^2} \left[ \frac{\sqrt{Da}}{g_2} + \sum_{j=1}^2 C(\beta_j)\varphi(\beta_j, t) \right], \quad (27)$$

где

$$C(\beta_j) = \frac{R^2\beta_j^2 - R(\sqrt{D} + \sqrt{a})\beta_j + \sqrt{Da}}{g_0\beta_j^2 - g_2}.$$

## Анализ полученных решений

Все полученные в пространстве оригиналов функции (23)–(27) линейно зависят от величины  $\varepsilon$ , определяемой выражением (20), и очевидно, что процесс испарения ( $dR/dt < 0$ ) или конденсационного роста ( $dR/dt > 0$ ) аэрозольной капли будет иметь место лишь тогда, когда  $\varepsilon \neq 0$ , в противном случае, как показывает соотношение (27),  $dR/dt = 0$ .

Легко показать, например, используя изображения (18), (19) соответствующих функций (23), (24), что температура поверхности капли и концентрация насыщенных паров на ней могут быть постоянными тогда и только тогда, когда

$$D = a, \quad \chi_c = \chi_T.$$

Рассмотрим поведение уравнений (23), (24) при  $t \rightarrow 0_+$ , для которых получаем

$$c_{1s}(t) \rightarrow c_{10} - \frac{\varepsilon\kappa\chi_c}{g_0}, \quad T_s(t) \rightarrow T_0 + \frac{\varepsilon l\chi_T}{g_0}.$$

Отсюда, вообще говоря, следует, что

$$c_{1s}(t)|_{t \rightarrow 0_+} \neq c_{1s}(t)|_{t=0} = c_{1s0}, \quad T_s(t)|_{t \rightarrow 0_+} \neq T_s(t)|_{t=0} = T_{s0}.$$

Обозначив  $\Delta c_{1s} = c_{1s}(t)|_{t \rightarrow 0_+} - c_{1s}(t)|_{t=0}$ ,  $\Delta T_s = T_s(t)|_{t \rightarrow 0_+} - T_s(t)|_{t=0}$ , находим

$$\Delta c_{1s} = \frac{c_{1s0}v_{s0}}{g_0} (\varepsilon_c l\chi_T + \varepsilon_T \kappa\chi_c),$$

$$\Delta T_s = \frac{1}{g_0} (\varepsilon_c l\chi_T + \varepsilon_T \kappa\chi_c).$$

Таким образом, функции  $c_{1s}(t)$ ,  $T_s(t)$  в точке  $t = 0$  испытывают скачок в рассматриваемом здесь смысле. Можно говорить об аналогичном скачке функций (12) в той же точке  $t = 0$ .

Представляет интерес сопоставление выражений функций, определяющих распределения концентрации пара и поля температуры на внешней границе слоя Кнудсена и на поверхности капли внутри этого слоя. Из выражений (25), (26) при  $r = R$  (т.е. на внешней границе слоя Кнудсена) получаем

$$c_1(r, t)|_{r=R} = c_{10} - \frac{\varepsilon\kappa\sqrt{D}}{R} \left[ \frac{\sqrt{a}}{g_2} - \sum_{j=1}^2 A(\beta_j)\varphi(\beta_j, t) \right], \quad (28)$$

$$T(r, t)|_{r=R} = T_0 - \frac{\varepsilon l\sqrt{a}}{R} \left[ \frac{\sqrt{D}}{g_2} - \sum_{j=1}^2 B(\beta_j)\varphi(\beta_j, t) \right]. \quad (29)$$

Разница между значениями выражений (28), (29) и соответствующих выражений (23), (24) обнаруживает факт влияния слоя Кнудсена на рассматриваемые процессы.

Проведем теперь подробный анализ выражения (27) для скорости нестационарного изменения радиуса капли, полученного для любого допустимого времени от 0 до  $+\infty$ . Заметим прежде всего, что формула (27) является обобщением формулы

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R + \chi_c} \left[ 1 + \frac{R}{\chi_c} \varphi(\beta, t) \right], \quad (30)$$

где  $\xi = D(c_{1\infty} - c_{1s0})nm_1/\gamma$ ,  $\beta = (R + \chi_c)\sqrt{D}/\chi_c R$  из работ [1,2].

Формула (30) получается из (27) при  $v_{s0} = 0$ .

Рассмотрим асимптотические разложения функции  $\varphi(\beta_j, t)$  для значений  $t$ , близких к нулю, и больших значений  $t$  соответственно

$$\varphi(\beta_j, t) = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_j^2 t)^k}{k!} \right] \times \left\{ 1 - 2\beta_j \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta_j^2 t)^m}{m!(2m+1)} \right] \right\}, \quad (31)$$

$$\varphi(\beta_j, t) = \frac{1}{\beta_j \sqrt{\pi t}} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2\beta_j^2 t)^m} \right]. \quad (32)$$

Взяв нулевые и первые приближения из разложений (31) и (32), получим соответствующие приближения формулы (27)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa}{\gamma g_0},$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa}{\gamma g_0} \left[ 1 - \frac{2}{g_0} \sqrt{\frac{t}{\pi}} (\kappa\sqrt{D} + c_{1s0}v_{s0}l\sqrt{a}) \right], \quad (33)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa \sqrt{Da}}{\gamma g_0 R^2},$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa \sqrt{Da}}{\gamma g_0 R^2} \times \left[ 1 + \frac{1}{g_2 \sqrt{\pi t}} (\kappa\sqrt{a} + c_{1s0}v_{s0}l\sqrt{D}) \right]. \quad (34)$$

Важно отметить, что формулы (34), полученные нами для значений времени  $t \gg 0$ , являются обобщениями хорошо известных формул [3,10]

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R} \left( 1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}} \right), \quad (35)$$

обычно получаемых из решения только одного стационарного или соответственно нестационарного уравнений диффузии без учета скачка концентрации (а также без учета процесса теплопроводности, следовательно, и скачка температуры). Формулы (35) получаются из формул (34) при  $\chi_c \rightarrow 0$ ,  $v_{s0} \rightarrow 0$  ( $\chi_T \rightarrow 0$ ).

Для общей формулы (27) и формулы (33) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa}{\gamma g_0}$$

— конечное значение, тогда как для второй из формул (35) при  $t \rightarrow 0_+$  имеем стремление  $dR/dt$  к бесконечности. Для формул (27) и (34) при  $t \rightarrow +\infty$  находим

$$\frac{dR}{dt} \rightarrow \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa \sqrt{Da}}{\gamma g_2 R^2}.$$

Для того чтобы более точно оценить влияние учитываемых нами факторов на процесс нестационарного испарения и конденсационного роста сферической капли, проанализируем численные значения для скорости изменения радиуса капли, вычисляя их по формулам (33)–(35), для случая испарения ( $\varepsilon < 0$ ,  $\xi < 0$ ) водяных капель в воздухе. В дальнейшем будем писать коротко: „скорость испарения капли“, имея в виду „скорость изменения радиуса капли при ее испарении“. Представляет интерес сравнение не только численных значений скорости испарения, вычисленных по полученным нами впервые формулам (33) и (34), соответствующим значениям времени, близким к нулю, и большим его значениям, между собой, а также сравнение

указанных численных значений с аналогичными значениями, вычисленными по формулам (35). Последнее оправдано тем, что выражения (33), (34) включают в себя составные коэффициенты скачков концентрации и температуры, а формулы (35) получены в предшествующих теориях [3,10] без учета скачков концентрации и температуры. Кроме того, в выражения (35) температура в явном виде не входит, поэтому при сравнении значений скорости испарения капли, найденных по этим формулам и по формулам (33), (34), в последних из них полагаем  $T_0 = T_{s0}$ , следовательно,  $\xi = \varepsilon D n m_1 / \gamma$ .

Очевидно, что первые уравнения из (33)–(35) легко интегрируются, из них можем найти средние скорости испарения ( $v = (R_2 - R_1)/(t_2 - t_1)$ ), в обозначении которых используем индексы 0,  $\infty$ ,  $k$ , указывающие на то, что соответствующая скорость найдена по формуле, полученной для значений времени, близких к нулю, для больших его значений или по квазистационарной формуле,

$$v_0 = \frac{\xi \kappa}{g_0}, \quad v_\infty = \frac{\xi \kappa}{g_0 + (\kappa + c_{1s0} v_{s0} l) R_m}, \quad v_k = \frac{\xi}{R_m},$$

где  $R_m = (R_1 + R_2)/2$ .

Положив

$$v_0 = \alpha_{0\infty} v_\infty, \quad v_0 = \alpha_{0k} v_k, \quad v_k = \alpha_{k\infty} v_\infty,$$

имеем следующие выражения положительных величин:

$$\alpha_{0\infty} = 1 + (1 + \xi) \alpha_{0k}, \quad \alpha_{0k} = \frac{\kappa R_m}{g_0},$$

$$\alpha_{k\infty} = 1 + \xi + \frac{1}{\alpha_{0k}}, \quad (36)$$

где  $\xi = c_{1s0} v_{s0} l / \kappa > 0$ , из которых заключаем

$$|v_\infty| < |v_0|, \quad |v_\infty| < |v_k|.$$

Так как величина  $\alpha_{0k}$  пропорциональна величине  $R_m$ , то расхождение между скоростями  $v_0$  и  $v_k$  изменится пропорционально этой же величине. Численные значения величин  $\alpha_{0\infty}$ ,  $\alpha_{0k}$ ,  $\alpha_{k\infty}$ , определяемых формулами (36), для значений  $R_m$ , равных  $1\mu$ ,  $5\mu$ ,  $10\mu$ , при некоторых начальных температурах представлены в табл. 1–3.

По значениям величины  $\alpha_{0\infty}$  в табл. 1 можно сказать, что разница между скоростями испарения капель, рассчитанными по первым формулам из (33) и (34), полученным соответственно для значений времени, близких к нулю, и для больших его значений, весьма ощутима. Причем с изменением начальной температуры в рассматриваемом интервале она претерпевает незначительные изменения, но при тех же температурах соотношение между указанными скоростями существенно меняется с изменением значения  $R_m$ , обнаруживая факт резкого убывания  $|(dR/dt)_\infty|$  с увеличением размера капли. Величина  $\alpha_{0k}$  уменьшается с повышением температуры.

**Таблица 1.** Значения коэффициента  $\alpha_{0\infty} = v_0/v_\infty$

$T_0, \text{K}$		283	293	303	313	323
$R_m \cdot 10^{-6}, \text{m}$	1	7.77	7.19	6.74	6.62	6.64
	5	34.84	31.95	29.72	29.09	29.20
	10	68.69	62.89	58.44	57.17	57.40

**Таблица 2.** Значения коэффициента  $\alpha_{0k} = v_0/v_k$

$T_0, \text{K}$		283	293	303	313	323
$R_m \cdot 10^{-6}, \text{m}$	1	2.80	1.78	1.12	0.73	0.49
	5	13.98	8.90	5.58	3.65	2.45
	10	27.97	17.79	11.17	7.30	4.90

**Таблица 3.** Значения коэффициента  $\alpha_{k\infty} = v_k/v_\infty$

$T_0, \text{K}$		283	293	303	313	323
$R_m \cdot 10^{-6}$	1	2.78	4.04	6.04	9.06	13.55
	5	2.49	3.59	5.32	7.97	11.92
	10	2.46	3.54	5.23	7.83	11.72

Значения величины  $\alpha_{k\infty}$  в табл. 3 показывают, что на величину соотношения между скоростями  $v_k$  и  $v_\infty$  размер капли не оказывает существенного влияния и расхождение между значениями этих скоростей при температуре  $T_0 = 283 \text{ K}$  не столь значительно:  $v_k \approx 2.5 v_\infty$ , а в повышении начальной температуры расхождение между ними увеличивается.

Оказывается, что расхождения между значениями скорости испарения, рассчитываемыми по первым формулам и соответственно по вторым формулам из (35) и (34) (при одних и тех же начальных условиях) почти одинаковы. Для того чтобы убедиться в справедливости этого предложения, обратим внимание на то, что вторые формулы от соответствующих первых формул отличаются лишь заключенными в скобки выражениями для вторых формул. Интересующее нас выражение из второй формулы (34) представим в виде  $1 + \alpha R / \sqrt{\pi D t}$ , где  $\alpha = (1 + \xi \sqrt{D/a}) / (1 + \xi + g_0 / \kappa R)$ , и для случая испарения водяных капель в воздухе при  $R = \lambda \cdot 10^2$  принимает значения, указанные в табл. 4.

Причем влияние величины  $R$  на значения  $\alpha$  весьма мало, следовательно,  $\alpha \approx 1$  независимо от размера испаряющейся водяной капли. Таким образом, выражения, которыми вторые формулы из (34) и (35) отличаются от соответствующих первых формул, для случая испарения водяных капель в воздухе имеют почти одинаковые значения.

К представленным выше табл. 1–3 сравнения скоростей следует добавить таблицу значений скорости испарения капли, вычисленных по одной из рассматриваемых формул при тех же начальных условиях. По первой из формул (33) получаем следующую табл. 5 значений

Таблица 4.

$T_0$ , К	$\alpha$
283	0.937
293	0.935
303	0.941
313	0.964
323	1.004

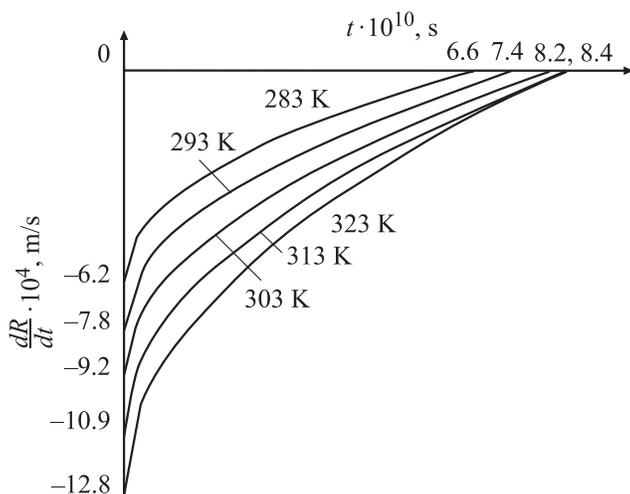
Таблица 5.

$T_0$ , К	$v_0 \cdot 10$ , m/s
283	-6.22
293	-7.79
303	-9.20
313	-10.89
323	-12.78

скорости испарения водяной капли в сухом воздухе при указанных начальных температурах.

Отметим, что, согласно только что упомянутой формуле, средняя и мгновенная скорости совпадают, т.е.  $v_0 = (dR/dt)_0$ . Заметим еще, что для общей формулы (27) предел выражения для скорости изменения радиуса капли при  $t \rightarrow 0_+$  совпадает с выражением правой части первой из формул (33). Отсюда можно сказать, что табл. 5 дает значения скорости испарения капель воды в сухом воздухе в начальный момент этого процесса (при  $T_0 = T_{s0}$ ).

Из формул (33)–(35) осталось проанализировать вторую из формул (33). Ее правая часть в отличие от первой из формул (33) зависит от времени. Поэтому представляет интерес исследование по ней зависимости скорости изменения радиуса капли от времени в процессе ее испарения. Для случая испарения водяных капель



в сухом воздухе при некоторых начальных температурах согласно второй формуле (33) получаем графики, представленные на рисунке. Из этих графиков следует, что скорость испарения в течение весьма короткого времени от начала процесса (менее одной наносекунды) достигает нулевого значения.

## Заключение

Полученное в работе общее для всех времен выражение для скорости нестационарного изменения радиуса капли и выделенные из него приближения как для значений времени, близких к нулю, так и для больших его значений позволяют учитывать большое число факторов, существенно влияющих на рассматриваемый процесс. Проведенный анализ полученных формул с использованием найденных численных значений скорости испарения водяных капель в воздухе позволяет сделать вывод о том, что имеет место очень резкое падение скорости нестационарного испарения капель от начала процесса за короткое время; далее, изменения начальной температуры и размера капель существенно сказываются на величине этой скорости. Из сравнения значений скорости испарения, рассчитанных по найденным в работе формулам и по известным из предшествующих теорий формулам квазистационарного и нестационарного режимов испарения, не учитывающих прежде всего скачки концентрации и температуры, можно сказать, что последние формулы имеют очень узкие границы применимости и могут быть заменены более общими соответствующими формулами, полученными в настоящей работе.

## Список литературы

- [1] Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. // ДАН. 2003. Т. 392. № 1. С. 44–47.
- [2] Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. // ТВТ. 2003. Т. 41. № 5. С. 779–784.
- [3] Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 91 с.
- [4] Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
- [5] Алехин Е.И., Яламов Ю.И. Математические основы решения граничных задач кинетической теории многокомпонентных газов вблизи конденсированной фазы. М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской, 1991. 150 с.
- [6] Nix N., Fukuta N. // J. Chem. Phys. 1973. Vol. 58. N 4. P. 1735.
- [7] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
- [8] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.
- [9] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 332 с.
- [10] Колесник И.Я. // Коллоидный журнал. 1968. Т. XXX. № 4. С. 527–532.