01;03

Линейная неустойчивость сдвиговых турбулентных течений, создаваемая мелкими вихрями

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет,
191002 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonalex@yahoo.co.uk

(Поступило в Редакцию 8 января 2004 г.)

На основе анализа упрощенного уравнения для мелкомасштабных компонент скорости, полученного автором ранее, показано, что любое турбулентное течение несжимаемой жидкости становится неустойчивым относительно бесконечно малых возмущений мелкомасштабных компонент скорости при достаточно большом тензоре скорости деформации крупномасштабной скорости. Этот вывод оспаривает утверждение классической теории устойчивости, согласно которой, в частности, течение Пуазейля в круглой трубе является линейно устойчивым относительно бесконечно малых возмущений.

Введение

Поведение турбулентного потока под действием сдвига имеет фундаментальное значение, поскольку именно этот тип течения наиболее распространен в приложениях. Возможно ли подавление турбулентности сдвигом, создаваемым крупномасштабным течением [1]? Наш анализ, основанный на приближенном уравнении для мелкомасштабных компонент скорости [2], покажет, что в линейном приближении турбулентность всегда усиливается сдвигом. Интересно отметить, что имеются данные, основанные на анализе уравнений Орра–Зоммерфельда, которые указывают, что течение Пуазейля в прямой круглой трубе линейно устойчиво относительно бесконечно малых возмущений скорости при сколь угодно больших числах Рейнольдса, а неустойчиво относительно возмущений конечной амплитуды [3,4]. Возможное физическое объяснение этого противоречия будет дано автором в Заключении.

Линейный анализ мелкомасштабных поляризационных фурье-компонент скорости в анизотропной турбулентности

В пребрежении вязкими силами, которые проявляются на малых масштабах, неустойчивость будет определяться наличием положительно действительной части у характеристических показателей $\lambda_{1,2}$ линейной теории устойчивости

$$\lambda_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4Q}, \tag{1}$$

где P содержит только компоненты скорости деформации $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j)$ (здесь U_i — i-я компонента крупномасштабной скорости), а Q содержит еще компоненты вектора крупномасштабной завихренности $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{U}$ [2].

Очевидно, что для неустойчивости вдоль некоторых направлений спектрального пространства достаточно потребовать, чтобы $-(P/2) > 0$, в дальнейшем в данной работе будем искать направления, вдоль которых величина $-(P/2)$ максимальна. Отметим, что квадратный корень в выражении (1) может лишь увеличить значение λ_1. Вращением системы координат симметричный тензор S можно привести к диагональному виду, на главной диагонали которого стоят собственные числа S_{11}, S_{22}, S_{33}, которые можно упорядочить по убыванию

$$S_{11} \geq S_{22} \geq S_{33} \tag{2}$$

с учетом условия несжимаемости

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0. \tag{3}$$

В сферической системе координат, используемой в [2], выражения для величин P и Q [2] приобретут после очевидных преобразований следующий вид:

$$P = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{3}{4}\cos 2\eta - \frac{1}{4}\cos 2\eta\cos 2\theta\right) S_{11} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{3}{4}\cos 2\eta + \frac{1}{4}\cos 2\eta\cos 2\theta\right) S_{22}, \tag{4}$$

$$Q = -\frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\eta)S_{11}^2 - S_{11}S_2\cos 2\eta - \frac{S_{22}^2}{2}(1+\cos 2\theta)(1+\cos 2\eta) + \frac{1}{4}(\cos\theta\cos\eta\Omega_1 + \sin\theta\cos\eta\Omega_2 + \sin\eta\Omega_3)^2, \tag{5}$$

где θ, η — углы в сферической системе координат $\theta \in [0, 2\pi]$, $\eta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{U}$, $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

Введем для удобства функцию f

$$f = -\frac{P}{S_{11}}, \quad S_{11} > 0, \tag{6}$$

максимум которой по угловым переменным мы будем находить. Учитывая (2), явное выражение для функции f, будет следующим:

$$f = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{3}{4}\cos 2\eta + \frac{1}{4}\cos 2\eta\cos 2\theta + \alpha\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{3}{4}\cos 2\eta - \frac{1}{4}\cos 2\eta\cos 2\theta\right), \tag{7}$$

где $\alpha = S_{22}/S_{11}$.

Из (2), (3) следует, что

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{8}$$

Введем новые независимые переменные $a = \cos 2\theta$, $b = \cos 2\eta$, $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Необходимым условием максимума функции f в новых переменных будут соотношения

$$\partial_a f = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}b\alpha = 0, \tag{9}$$

$$\partial_b f = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4}a\alpha. \tag{10}$$

Решений линейной системы (9), (10) нет при $\alpha = 1$, при $\alpha \ne 1$ имеется единственное решение

$$a = 3 + \frac{6}{\alpha - 1}, \tag{11}$$

$$b = -1. \tag{12}$$

Из соотношений (8), (11) следует, что

$$a \le -1. \tag{13}$$

Учитывая вышеприведенные ограничения на переменные a и b, делаем вывод, что максимум функции f по угловым переменным может достигаться лишь на границе области определения этих двух переменных, т.е. на сторонах квадрата. Рассмотрим детально эти четыре стороны квадрата

$$\text{a)}\qquad a = 1, \qquad -1 \le b \le 1,$$

$$f = -\frac{\alpha}{2} + b\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$f_{\max} = 1$ при $b = 1$;

$$\text{b)}\qquad a = -1, \qquad -1 \le b \le 1,$$

$$f = -\frac{1}{2} + b\left(\frac{1}{2} + \alpha\right),$$

$f_{\max} = \alpha$ при $b = 1$;

$$\text{c)}\qquad b = 1, \qquad -1 \le a \le 1,$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2}(1 - \alpha),$$

$f_{\max} = 1$ при $a = 1$;

$$\text{d)}\qquad b = -1, \qquad -1 \le a \le 1,$$

$$f = -1 - \alpha,$$

$f = \text{const}$.

Таким образом, при любом $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ имеется положительный максимум функции f, который равен $f_{\max} = 1$, т.е. любое течение несжимаемой жидкости, имеющее локально крупномасштабный тензор $\mathbf{S} \ne 0$, становится неустойчивым относительно бесконечно малых мелкомасштабных возмущений скорости в системе координат, движущейся с локальной скоростью $\mathbf{U}$, если S_{11} достаточно велико для преодоления сил вязкости [2]

$$\frac{S_{11}}{2} > \nu k_{\max}^2, \tag{14}$$

где ν — коэффициент молекулярной вязкости, $k_{\max} = 2\pi\sqrt{3}/L$, где L — масштаб, разделяющий крупномасштабное движение от мелкомасштабного.

Анализ результатов и заключение

Полученное соотношение (14) показывает, что любое крупномасштабное течение несжимаемой жидкости, обладающее произвольной крупномасштабной завихренностью $\mathbf{\Omega}$, становится линейно неустойчивым в локальной системе координат, движущейся с крупномасштабной скоростью $\mathbf{U}$, относительно бесконечно малых возмущений мелкомасштабной скорости при наличии достаточно большого (превышающего силы вязкости) тензора скорости деформации крупномасштабной скорости $\mathbf{S}$. Встает также вопрос, насколько справедлив подход в классической теории устойчивости, приводящей к уравнению Орра–Зоммерфельда, при котором, в частности, параболический профиль скорости для течения Пуазейля в круглой трубе одновременно воспроизводит крупномасштабную часть течения и мелкомасштабную часть (от параболического, или линейного, профиля имеется вклад в фурье-гармоники малых вихрей). Это значит, что мелкомасштабные составляющие скорости учитываются дважды, а не приводит ли это к фиктивной устойчивости ламинарного течения Пуазейля относительно бесконечно малых возмущений скорости [3,4]? Полученные результаты, прежде всего соотношения (14), интересно было бы проверить экспериментально, создавая очень малые искусственные гармонические мелкомасштабные возмущения наподобие возмущений в работе [4].

Список литературы

[1] *Terry P.W.* // Rev. Modern Phys. 2000. Vol. 72. N 1. P. 109–165.
[2] *Балонишников А.М.* // ЖТФ. 2003. Вып. 10. С. 106–110.
[3] *Drazin P.G., Reid W.H.* An Introduction to Hydrodynamic Stability Theory. Cambridge University Press, 1980.
[4] *Hof B., Juel A., Mullin T.* // Phys. Rev. Let. 2003. Vol. 91. N 24. P. 244–502.