01;05

Эффективная диэлектрическая проницаемость трехкомпонентных композиционных материалов с анизотропной структурой

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,
03680 Киев, Украина
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2004 г.)

Аналитически рассчитаны средние электрические характеристики диэлектрического матричного композита, содержащего однонаправленные волокна двух разновидностей. Волокна различаются физическими свойствами и размерами поперечного сечения; они сгруппированы в периодически чередующиеся слои и в целом придают материалу аназотропные свойства. Расчеты основаны на точном решении задачи о взаимодействии цилиндрических тел во внешнем электрическом поле.

Введение

В работе исследуются электрические характеристики композиционного диэлектрика, представляющего собой матрицу, армированную длинными цилиндрическими волокнами двух видов, имеющих разные проницаемости и радиусы. Волокна параллельны друг другу и образуют в пространстве квадратную решетку. Каждый вид волокон сгруппирован в периодически чередующиеся слои. Хотя рассматриваемый композит состоит из однородных в отдельности веществ, в целом он приобретает анизотропные свойства. Электрические характеристики композиционных материалов с таким строением вызывают интерес в связи с изучением некоторых объектов, существующих в естественных условиях, а также в связи с разработкой композитов в электротехнике, механике и теплофизике [1–4].

Вычисление тензора эффективной диэлектрической проницаемости проводится по обычной схеме: рассчитывается локальное электрическое поле в системе и затем выполняется процедура его пространственного осреднения. В силу регулярного строения системы достаточно рассчитать поле в ячейке периода. Последняя выбирается из условия, что ее стороны совпадают с эквипотенциалями и силовыми линиями поля. При вычислении локального электрического поля существенно используется точное решение задачи о взаимодействии двух параллельных цилиндров во внешнем однородном электрическом поле [5]. Расчеты можно проводить с любой степенью приближения. Однако с увеличением точности вычислений аналитические выражения эффективных параметров становятся громоздкими и плохо обозримыми. Для выяснения отличительных особенностей в поведении средних характеристик изучаемой структуры достаточно ограничиться рассмотрением случая относительно малой концентрации включений, что значительно упрощает все вычисления и дает вполне обозримые результаты.

Локальные и средние электрические поля

Рассмотрим неограниченную диэлектрическую среду с проницаемостью ε_1, в которой двоякопериодически расположены однонаправленные цилиндрические волокна с проницаемостями ε_2 и ε_3 и радиусами r_1 и r_2 соответственно. Плоскость в поперечном сечении к осям волокон условно разделена на квадратные ячейки периода с линейным размером h. Оси волокон совпадают с вершинами ячеек периода. Каждая разновидность включений сгруппирована в ряды, которые периодически чередуются вдоль оси x (рис. 1). Концентрации включений в материале s_1 и s_2 определяются, очевидно, соотношениями

$$s_1 = \pi r_1^2/2h^2, \quad s_2 = -\pi r_2^2/2h^2. \tag{1}$$

Внешнее однородное электрическое поле направлено нормально к осям волокон.

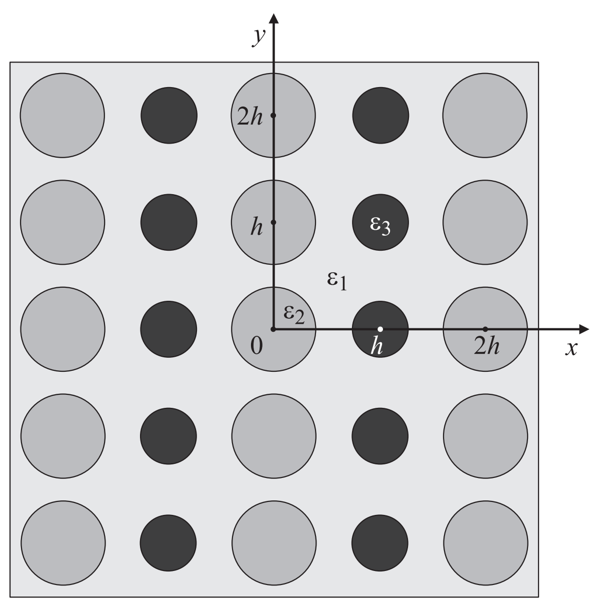

Рис. 1. Фрагмент композитного диэлектрического материала с квадратной укладкой длинных волокон круглого сечения.

При этих условиях электрическое поле в материале двумерное и его можно рассчитать с любой степенью приближения. Схема расчета состоит из следующих моментов. Электрическое поле внутри включения и в его окрестности находится как результат взаимодействия выделенного включения отдельно с каждым другим включением в системе. Парные взаимодействия затем суммируются. При этом используется точное решение модельной задачи о взаимодействии двух параллельных цилиндрических тел с произвольными диэлектрическими проницаемостями и радиусами во внешнем однородном электрическом поле [5]. Взаимное влияние включений друг на друга математически выражается диполь-дипольными взаимодействиями. Это индуцированные диполи, расположенные внутри окружностей, ограничивающих цилиндрические включения на плоскости; их число бесконечно велико, но с увеличением порядка моменты диполей неограниченно уменьшаются. Если концентрация включений мала, как принято в настоящей работе, то в расчетах можно ограничиться однодипольным приближением. В этом случае учитываются взаимодействия только между первыми диполями, которые расположены в центрах окружностей, имеют наибольший момент и, следовательно, вносят основной вклад во взаимное влияние включений друг на друга в системе. Для уточнения расчетов необходимо учитывать вторые и последующие диполи, моменты и координаты которых определяются заданными параметрами системы и находятся простыми соотношениями.

Следуя этой схеме вычислений, запишем выражения электрического поля в квадратной ячейке, совместив для определенности начало прямоугольной системы координат с осью включения, имеющего диэлектрическую проницаемость ε_2. При учете только первых индуцированных диполей электрическое поле определяется следующими выражениями: в окрестности включения

$$E_1(z) = E_0 - \bar{E}_0\Big\{\Delta_{12}r_1^2 z^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big[\Delta_{12}r_1^2(z-a_{mn})^{-2} + \Delta_{13}r_2^2(z-b_{mn})^{-2}\big]\Big\}, \quad (2)$$

внутри включения

$$E_2(z) = (1+\Delta_{12})\Big\{E_0 - \bar{E}_0\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big[\Delta_{12}r_1^2(z-a_{mn})^{-2} + \Delta_{13}r_2^2(z-b_{mn})^{-2}\big]\Big\}\Big\}. \quad (3)$$

Здесь $E_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2)$ — напряженность электрического поля в комплексной форме

$$E_\nu(z) = E_{x\nu} - iE_{y\nu} \quad (z = x + iy); \quad (4)$$

$E_0 = E_{0x} - iE_{0y}$ — напряженность внешнего однородного электрического поля; черта над величиной E_0 означает операцию комплексного сопряжения; $\Delta_{1\nu}$ $(\nu = 2, 3)$ — параметр, характеризующий оноосительную диэлектрическую проницаемость включений каждого типа,

$$\Delta_{1\nu} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_\nu}{\varepsilon_1 + \varepsilon_\nu} \quad (-1 \le \Delta_{1\nu} \le 1). \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что

$$\Delta_{1\nu} = -\Delta_{\nu 1}. \quad (6)$$

В выражениях (2) и (3) a_{mn} — координаты диполей, расположенных в центрах включений, имеющих диэлектрическую проницаемость ε_2 и радиус r_1 (исключая диполь включения, где определяется электрическое поле, т.е. в начале координат); b_{mn} — координаты диполей, расположенных в центрах включений с диэлектрической проницаемостью ε_3 и радиусом r_2. В соответствии с рис. 1 имеем на оси x

$$a_{mn} = \pm 2mh, \quad b_{mn} = \pm h(2m-1);$$

на оси y

$$a_{mn} = \pm 2nh;$$

вне осей

$$a_{mn} = h(\pm 2m \pm in), \quad b_{mn} = h[\pm(2m-1) \pm in],$$

где $m, n = 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем при вычислении эффективных параметров системы понадобится также выражение электрического поля во включении с диэлектрической проницаемостью ε_3 и в его непосредственной окрестности. В этом случае можно воспользоваться выражениями (2) и (3) с очевидной заменой

$$E_2(z) \to E_3(z), \quad \Delta_{12} \leftrightarrow \Delta_{13}, \quad r_1 \leftrightarrow r_2. \quad (7)$$

При этом начало системы координат переносится в центр включения с диэлектрической проницаемостью ε_3.

Выражения (2) и (3) учитывают взаимодействие включений в первом приближении. Если концентрация включений столь мала, что влияние их друг на друга несущественно, то в выражениях (2) и (3) можно пренебречь двойными суммами. В результате получим

$$E_1(z) = E_0 - \bar{E}_0\Delta_{12}r_1^2 z^{-2}, \quad E_2(z) = E_0(1+\Delta_{12}). \quad (8)$$

В этом случае во всех включениях электрическое поле однородно. Выражения (8) (и аналогичные формулы для включения с проницаемостью ε_3) определяют электрическое поле в рассматриваемом композите в нулевом приближении.

Чтобы определить эффективные параметры системы, необходимо осреднить локальное электрическое поле по пространству в плоскости, нормальной к осям волокон,

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \hat{\varepsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (9)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$ — тензор эффективной диэлектрической проницаемости; он симметричен и имеет две составляющие: $\varepsilon_{\text{eff}\,xx}$ и $\varepsilon_{\text{eff}\,yy}$.

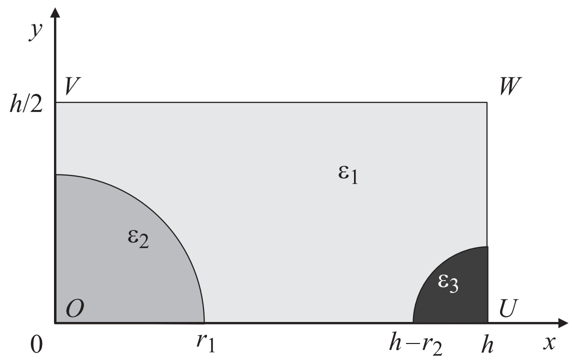

Рис. 2. Расчетная ячейка для вычисления эффективных параметров.

В силу регулярной структуры композита достаточно провести осреднение электрического поля в одной ячейке периода. В нее должны входить включения двух разновидностей. В качестве расчетной ячейки можно взять прямоугольник, показанный на рис. 2. Выбор такой ячейки диктуется следующими соображениями. Если внешнее электрическое поле направлено вдоль оси x ($E_0 = E_{0x}$), то отрезки OV и UW будут эквипотенциалями, а отрезки OU и VW — силовыми линиями поля. Если же внешнее электрическое поле ориентировано в направлении оси y ($E_0 = iE_{0y}$), эквипотенциалями будут отрезки OU и VW, а силовыми линиями — отрезки OV и UW. Таким образом, в зависимости от выбора направления внешнего поля в системе на одних граничных линиях периодической ячейки $OUWV$ сохраняет постоянное значение потенциал, а на других — касательная напряженность электрического поля. Расчеты среднего поля в этом случае упрощаются и сводятся к вычислению контурных интегралов.

Пусть внешнее электрическое поле направлено в системе вдоль оси x: $E_0 = E_{0x}$. Тогда средние значения поля запишутся так:

$$\langle D_x\rangle = \frac{2}{h}\left[\varepsilon_2\int_0^{r_1} E_{2x}(y)dy + \varepsilon_1\int_{r_1}^{h/2} E_{1x}(y)dy\right],$$

$$\langle E_x\rangle = \frac{1}{h}\Bigg[\int_0^{r_1} E_{2x}(x)dx + \int_{r_1}^{h/2} E_{1x}(x)dx + \int_{h/2}^{h-r_2} E_{1x}(x)dx + \int_{h-r_2}^{h} E_{3x}(x)dx\Bigg]. \quad (10)$$

Заметим, что в последнем выражении значения поля $E_{1x}(x)$ на интервалах $[r_1, h/2]$ и $[h/2, h-r_2]$ различаются так, как это было отмечено при введении преобразований (7). Вычисления дают

$$\langle D_x\rangle = \varepsilon_1\big[1 - 2(2-A_1)\Delta_{12}r_1^2 + 2B_1\Delta_{13}r_2^2 - 2\Delta_{12}^2 r_1^2\Psi_1(r_1) - 2\Delta_{12}\Delta_{13}r_2^2\phi_1(r_1)\big]. \quad (11)$$

Здесь A_1 и B_1 — постоянные, численные значения которых определяются формулами

$$A_1 = -4\Bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+16m^2} + \frac{1}{1-4m^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+2n}{(1+2n)^2+16m^2} + \frac{1-2n}{(1-2n)^2+16m^2}\right]\Bigg\} = 0.893051,$$

$$B_1 = -4\Bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+4(2m-1)^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+2n}{(1+2n)^2+4(2m-1)^2} + \frac{1-2n}{(1-2n)^2+4(2m-1)^2}\right]\Bigg\} = -1.106949. \quad (12)$$

Функции $\Psi_1(r_1)$ и $\phi(r_1)$ имеют следующие выражения:

$$\Psi_1(r_1) = -2\Bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{r_1}{r_1^2+4m^2} + \frac{r_1}{r_1^2-m^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r_1+n}{(r_1+n)^2+4m^2} + \frac{r_1-n}{(r_1-n)^2+4m^2}\right]\Bigg\},$$

$$\phi_1(r_1) = -2\Bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{r_1}{r_1^2+(2m-1)^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r_1+n}{(r_1+n)^2+(2m-1)^2} + \frac{r_1-n}{(r_1-n)^2+(2m-1)^2}\right]\Bigg\}. \quad (13)$$

Здесь и далее формулы записаны в относительных величинах

$$r_{1,2*} = \frac{r_{1,2}}{h}, \quad |E_{1,2,3*}| = \frac{|E_{1,2,3}|}{|E_0|}, \quad \varepsilon_{1,2,3*} = \frac{\varepsilon_{1,2,3}}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 — электрическая постоянная; для краткости в последующих выражениях звездочки опускаются.

Необходимо отметить, что формула (11) не симметрична относительно равноправных параметров Δ_{12} и Δ_{13}, r_1 и r_2. Это объясняется тем, что выражение, определяющее величину $\langle D_x\rangle$, зависит от способа ее вычисления. В формуле (11) поток вектора $\mathbf{D}$ в расчетной ячейке (рис. 2) определялся интегралом (10) на отрезке OV. Если провести такие же вычисления, но на отрезке UW, что равносильно, то получим выражение

$$\langle D_x\rangle = \varepsilon_1\big[1 - 2(2-A_1)\Delta_{13}r_2^2 + 2B_1\Delta_{12}r_1^2 - 2\Delta_{13}^2 r_2^2\Psi_1(r_2) - 2\Delta_{12}\Delta_{13}r_1^2\phi_1(r_2)\big]. \quad (14)$$

Хотя по внешнему виду выражения (11) и (14) различаются, в действительности они определяют одну и ту же величину $\langle D_x \rangle$ (в этом можно убедиться непосредственными вычислениями) и переходят друг в друга при замене параметров $\Delta_{12} \leftrightarrow \Delta_{13}$, $r_1 \leftrightarrow r_2$.

Определим $\langle D_x \rangle$ как среднее арифметическое

$$\langle D_x \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle D_x \rangle_{OV} + \langle D_x \rangle_{UW}\right], \tag{15}$$

где индексы OV и VW означают участки интегрирования.

В результате получим выражение

$$\langle D_x \rangle = \varepsilon_1\big[1 - (2 - A_1 - B_1)(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2) - \Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_1(r_1, r_2) - \Delta_{12}^2 r_1^2 \Psi_1(r_1) - \Delta_{13}^2 r_2^2 \Psi_1(r_2)\big]. \tag{16}$$

Здесь обозначено

$$\Phi_1(r_1, r_2) = r_2^2\phi_1(r_1) + r_1^2\phi_1(r_2). \tag{17}$$

Выражение (16), как видно, симметрично относительно параметров Δ_{12} и Δ_{13}, r_1 и r_2 и в таком виде будет использовано в дальнейших расчетах.

Вычисление электрического поля с действиями, аналогичными тем, которые приведены выше, дают в конечном итоге следующее выражение:

$$\langle E_x \rangle = 1 + (2 + A_2 + B_2)(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2) + \Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_2(r_1, r_2) + \Delta_{12}^2 r_1^2 \Psi_2(r_1) + \Delta_{13}^2 r_2^2 \Psi_2(r_2). \tag{18}$$

Здесь постоянные A_2 и B_2 определяются формулами

$$A_2 = 4\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1 - 4(2m-1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - 2(2m-1)}{[1 - 2(2m-1)]^2 + 4n^2} + \frac{1 + 2(2m-1)}{[1 - 2(2m-1)]^2 + 4n^2}\right]\right\} = -1.390452,$$

$$B_2 = 4\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1 - 16m^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 + 4n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - 4m}{(1 - 4m)^2 + 4n^2} + \frac{1 + 4m}{(1 + 4m)^2 + 4n^2}\right]\right\} = 0.318397. \tag{19}$$

Функции $\Phi_2(r_1, r_2)$ и $\Psi_2(r_{1,2})$ в соотношении (18) имеют выражения

$$\Phi_2(r_1, r_2) = r_1^2\phi_2(r_2) + r_2^2\phi_2(r_1),$$

$$\Psi_2(r_{1,2}) = 2\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{1,2}}{r_{1,2}^2 - 4m^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{1,2}}{r_{1,2}^2 + n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r_{1,2} - 2m}{(r_{1,2} - 2m)^2 + n^2} + \frac{r_{1,2} + 2m}{(r_{1,2} + 2m)^2 + n^2}\right]\right\}, \tag{20}$$

где обозначено

$$\phi_2(r_{1,2}) = 2\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{1,2}}{r_{1,2}^2 - (2m-1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r_{1,2} - 2m + 1}{(r_{1,2} - 2m + 1)^2 + n^2} + \frac{r_{1,2} + 2m - 1}{(r_{1,2} + 2m - 1)^2 + n^2}\right]\right\}. \tag{21}$$

Выражения (16) и (18) позволяют определить составляющую $\varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx}$ эффективного тензора диэлектрической проницаемости системы. Чтобы получить значение второго элемента тензора $\varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy}$, необходимо провести аналогичные вычисления. Как и ранее, рассматривается периодическая ячейка $OUVW$, но внешнее электрическое поле направлено теперь вдоль оси y: $E_0 = iE_{0y}$.

Средние значения электрического поля $\langle D_y \rangle$ и $\langle E_y \rangle$ находятся из интегральных соотношений

$$\langle D_y \rangle = \frac{1}{h}\left[\varepsilon_2\int_0^{r_1} E_{2y}(x)dx + \varepsilon_1\int_{r_1}^{h/2} E_{1y}(x)dx + \varepsilon_1\int_{h/2}^{h-r_2} E_{1y}(x)dx + \varepsilon_3\int_{h-r_2}^{h} E_{3y}(x)dx\right],$$

$$\langle E_y \rangle = \frac{2}{h}\left[\int_0^{r_1} E_{2y}(y)dy + \int_{r_1}^{h/2} E_{1y}(y)dy\right]. \tag{22}$$

Повторяя процедуру вычислений предыдущего случая, получим в конечном итоге

$$\langle D_y \rangle = \varepsilon_1\big[1 - (2 + A_2 + B_2)(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2) + \Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_2(r_1, r_2) + \Delta_{12}^2 r_1^2 \Psi_2(r_1) + \Delta_{13}^2 r_2^2 \Psi_2(r_2)\big],$$

$$\langle E_y \rangle = 1 + (2 - A_1 - B_1)(\Delta_{12}r_1^2 + \Delta_{13}r_2^2) - \Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_1(r_1, r_2) - \Delta_{12}^2 r_1^2 \Psi_1(r_1) - \Delta_{13}^2 r_2^2 \Psi_1(r_2). \tag{23}$$

Легко убедиться, что средние значения поля удовлетворяют преобразованиям симметрии [6]

$$\langle D_x \rangle(\Delta_{12}\Delta_{13}) = \varepsilon_1\langle E_y \rangle(\Delta_{21}, \Delta_{31}),$$

$$\langle D_y \rangle(\Delta_{12}\Delta_{13}) = \varepsilon_1\langle E_x \rangle(\Delta_{21}, \Delta_{31}). \tag{24}$$

Эти соотношения позволяют контролировать правильность вычислений.

Тензор эффективной диэлектрической проницаемости

В поперечном сечении к осям волокон осредненные свойства рассматриваемого материала описываются тензором эффективной диэлектрической проницаемости симметричного вида

$$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{eff}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy} \end{vmatrix}. \tag{25}$$

С помощью формул (16), (18) и (23) находим значения компонент тензора $\hat{\varepsilon}_{\mathrm{eff}}$ в сотношении (9)

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx}=\varepsilon_1\frac{\begin{array}{c}1-2\alpha(\Delta_{12}s_1+\Delta_{13}s_2)-\Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_1(r_1,r_2)-\\-\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_1(r_1)-\Delta_{13}^2r_2^2\Psi_1(r_2)\end{array}}{\begin{array}{c}1+2\beta(\Delta_{12}s_1+\Delta_{13}s_2)+\Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_2(r_1,r_2)+\\+\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_2(r_1)+\Delta_{13}^2r_2^2\Psi_2(r_2)\end{array}},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy}=\varepsilon_1\frac{\begin{array}{c}1-2\beta(\Delta_{12}s_1+\Delta_{13}s_2)+\Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_2(r_1,r_2)+\\+\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_2(r_1)+\Delta_{13}^2r_2^2\Psi_2(r_2)\end{array}}{\begin{array}{c}1+2\alpha(\Delta_{12}s_1-\Delta_{13}s_2)-\Delta_{12}\Delta_{13}\Phi_1(r_1,r_2)-\\-\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_1(r_1)-\Delta_{13}^2r_2^2\Psi_1(r_2)\end{array}}. \tag{26}$$

Здесь s_1 и s_2 — концентрации каждого сорта включений (они определены формулами (1)); α и β — постоянные

$$\alpha=\frac{1}{\pi}(2-A_1-B_1),\quad \beta=\frac{1}{\pi}(2+A_2+B_2)$$

$$(\alpha+\beta=1,\quad \alpha=0.7047). \tag{27}$$

Из приведенных формул можно получить ряд частных результатов, имеющих самостоятельное значение. Некоторые из них обсуждаются ниже.

1. Если волокна имеют одинаковые диэлектрические проницаемости $\varepsilon_2=\varepsilon_3$ $(\Delta_{12}=\Delta_{13})$, то выражения (26) преобразуются к виду

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx}=\varepsilon_1\frac{1-2\alpha s\Delta_{12}-\Delta_{12}^2\Omega_1(r_1,r_2)}{1+2\beta s\Delta_{12}+\Delta_{12}^2\Omega_2(r_1,r_2)},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy}=\varepsilon_1\frac{1-2\beta s\Delta_{12}+\Delta_{12}^2\Omega_2(r_1,r_2)}{1+2\alpha s\Delta_{12}-\Delta_{12}^2\Omega_1(r_1,r_2)}. \tag{28}$$

Здесь $s=s_1+s_2$ — суммарная концентрация включений, функции $\Omega_{1,2}(\cdot)$ определены следующими соотношениями:

$$\Omega_1(r_1,r_2)=-\Phi_1(r_1,r_2)-r_1^2\Psi_1(r_1)-r_2^2\Psi_1(r_2),$$

$$\Omega_2(r_1,r_2)=\Phi_2(r_1,r_2)+r_1^2\Psi_2(r_1)+r_2^2\Psi_2(r_2). \tag{29}$$

Формулы (28) и (29) позволяют заключить, что анизотропия диэлектрической проницаемости двухкомпонентной системы сохраняется вследствие разных радиусов цилиндрических волокон, сгруппированных в ряды, периодически чередующихся по оси x.

2. Двухкомпонентный материал сохраняет анизотропные свойства, если имеется только одна разновидность волокон. Полагая $\varepsilon_3=\varepsilon_1$ $(\Delta_{13}=0)$, или $r_2=0$, что равносильно, получим

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx}=\varepsilon_1\frac{1-2\alpha s_1\Delta_{12}-\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_1(r_1)}{1+2\beta s_1\Delta_{12}+\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_2(r_1)},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy}=\varepsilon_1\frac{1-2\beta s_1\Delta_{12}+\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_2(r_1)}{1+2\alpha s_1\Delta_{12}-\Delta_{12}^2r_1^2\Psi_1(r_1)}. \tag{30}$$

В этом случае анизотропия неоднородного материала обусловлена тем, что однотипные волокна сгруппированы в ряды (в направлении оси y), которые с периодом $2h$ повторяются вдоль оси x. Расстояния между соседними включениями в продольном и поперечном направлениях различны.

3. Если параметры системы таковы, что выполняется равенство

$$\Delta_{12}s_1=-\Delta_{13}s_2, \tag{31}$$

то выражения (26) принимают вид

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,xx}=\varepsilon_1\frac{1-\Delta_{12}^2\Gamma_1(r_1,r_2)}{1+\Delta_{12}^2\Gamma_2(r_1,r_2)},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}\,yy}=\varepsilon_1\frac{1+\Delta_{12}^2\Gamma_2(r_1,r_2)}{1-\Delta_{12}^2\Gamma_1(r_1,r_2)}, \tag{32}$$

где

$$\Gamma_1(r_1,r_2)=\frac{r_1^2}{r_2^2}\,\Phi_1(r_1,r_2)-r_1^2\Phi_1(r_1)-r_1^2\Psi_1(r_2),$$

$$\Gamma_2(r_1,r_2)=-\frac{r_1^2}{r_2^2}\,\Phi_2(r_1,r_2)+r_1^2\Phi_2(r_1)+r_1^2\Psi_2(r_2). \tag{33}$$

Как видно, компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости не содержат параметра Δ_{12} первой степени, но при этом сохраняют анизотропные свойства.

При равных концентрациях фаз $(s_1=s_2)$ равенство (31) означает, что диэлектрические проницаемости системы связаны соотношениями

$$\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}. \tag{34}$$

4. Если все волокна в системе имеют одинаковые радиусы и диэлектрические проницаемости, то двухкомпонетный материал приобретает изотропные свойства, поскольку включения расположены в вершинах квадратной периодической ячейки (для получения формул эффективной диэлектрической проницаемости в этом случае в качестве расчетной ячейки необходимо рассмотреть квадрат со стороной, равной $h/2$). Электрические характеристики такой системы подробно изучены во многих статьях, начало которым было положено классической работой Рэлея [7].

Заключение

В теории композитных диэлектриков наиболее подробно изучены двухкомпонентные изотропные материалы, когда в матрице содержится один сорт включений. Такие системы просты для теоретического анализа в аналитической форме, и поэтому они были исследованы в первую очередь. Наличие двух и большего числа компонентов позволяет создавать диэлектрические материалы с более разнообразными свойствами и структурами. Изучение многокомпонентных систем находится на начальной стадии.

Эффективные параметры рассмотренного материала рассчитаны в приближении, когда взаимодействие включений учитывается только первыми диполями в бесконечной сумме диполей с убывающими модулями моментов. Если требуется точное описание характеристик системы, то нобходимо принимать во внимание последующие диполи. Потребность в таких расчетах возникает, например, при плотной упаковке включений или при резком различии диэлектрических проницаемостей матрицы и включений. В этих случаях можно предложить следующую схему вычислений. Взаимодействие между соседними включениями учитывается подробно, т.е. принимается во внимание большое число индуцированных диполей, а взаимное влияние включений, отстоящих друг от друга на больших расстояниях, учитывается приближенно с несколькими первыми индуцированными диполями или даже только с одним диполем. При таком подходе все еще сохраняется возможность аналитического описания средних характеристик композитного материала. Моделирование подтверждает эффективность подобных вычислений и объясняется тем, что с увеличением порядка диполей их моменты резко уменьшаются, особенно для удаленных друг от друга включений.

Список литературы

[1] *Анин Б.Д.* и др. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.

[2] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

[3] *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

[4] *Челидзе Т.Л., Деревянко Ф.И., Куриленко О.Д.* Электрическая спектроскопия гетерогенных систем. Киев: Наукова думка, 1977. 231 с.

[5] *Emets Yu.P., Onofrichuk Yu.P.* // IEEE Trans. DEI 1996. Vol. 3. N 1. P. 87–98.

[6] *Емец Ю.П.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 5. С. 1207–1221.

[7] *Lord Rayleigh.* // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. N 211. P. 481–501.