01;03

Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости конечной проводимости

 Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 30 июня 2004 г.)

Во втором приближении по амплитуде начальной деформации найден профиль периодической капиллярно-гравитационной волны, распространяющейся по поверхности вязкой жидкости конечной проводимости. Показано, что учет конечности скорости выравнивания потенциала жидкости при распространении по ее свободной поверхности капиллярно-гравитационной волны приводит к изменению интенсивности нелинейного взаимодействия волн, зависящей от величины равновесной поверхностной плотности электрического заряда, электропроводности жидкости и волновых чисел. Сам характер влияния конечности скорости выравнивания потенциала жидкости на нелинейное взаимодействие волн немонотонен.

В последние годы в серии работ, посвященных асимптотическому нелинейному анализу периодических капиллярно-гравитационных волн на плоской поверхности глубокой жидкости [1–4], успешно развивался математический аппарат корректного учета конечной вязкости жидкости. В работах [1–4] подробно исследовались профиль нелинейной периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой идеально проводящей жидкости и влияние на него однородно распределенного поверхностного заряда. Было показано, что зависимость безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости по амплитуде начальной виртуальной деформации к профилю волны от безразмерного волнового числа $A = A(k)$ имеет резонансоподобный вид с пиком вблизи значения безразмерного волнового числа $k_* = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Именно в окрестности этого значения k наиболее отчетливо проявляется нелинейный характер волнового движения. Высота пика амплитуды A, характеризующей степень интенсивности внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн, зависит от вязкости жидкости [1]: с уменьшением вязкости высота пика монотонно растет и в пределе идеальной жидкости обращается в бесконечность. В [2–4] показано, что степень интенсивности нелинейного резонансного взаимодействия волн сложным образом зависит от величины поверхностной плотности заряда, квадрат которой пропорционален параметру Тонкса–Френкеля W (характеризующего устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к однородно распределенному по ней электрическому заряду): на плоскости параметров (k, W), на линии $W = (k + k^{-1})/2$, амплитуда A имеет минимум, стремящийся к нулю при уменьшении до нуля вязкости.

Корректный учет вязкости жидкости позволяет исследовать влияние релаксационных явлений, сопровождающихся появлением касательных к свободной поверхности жидкости напряжений, на закономерности нелинейного взаимодействия капиллярно-гравитационных волн и на нелинейные поправки к профилям волн. Настоящая работа посвящена исследованию влияния конечности скорости выравнивания вдоль свободной поверхности жидкости электростатического потенциала на закономерности реализации нелинейного капиллярно-гравитационного волнового движения.

1. Формулировка задачи

Пусть вязкая несжимаемая жидкость в поле сил тяжести заполняет полубесконечное пространство $z \le 0$, а плоскость $0xy$ декартовой системы координат, ось $0z$ которой направлена против направления действия силы тяжести, совпадает с равновесной плоской свободной поверхностью жидкости. Обозначим массовую плотность жидкости ρ, кинематическую вязкость ν, коэффициент поверхностного натяжения γ, удельную проводимость σ. Примем, что на свободной поверхности равномерно распределен электрический заряд с равновесной поверхностной плотностью χ_0. Обозначим коэффициент поверхностной диффузии заряда D, поверхностную подвижность зарядов μ, а диэлектрическую проницаемость жидкости ε_d. Зададимся целью определить в произвольный момент времени $t > 0$ профиль бегущей плоской периодической капиллярно-гравитационной волны с волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны), которая в начальный момент времени ($t = 0$) начинает распространяться по свободной поверхности жидкости в положительном направлении оси $0x$. Будем полагать движение жидкости не зависящим от координаты y, а амплитуду главной гармоники в разложении периодического профиля волны в ряд Фурье на пространственном периоде λ известной и равной η. Будем учитывать, что в процессе распространения волны электрический заряд перераспределяется по деформирующейся свободной поверхности жидкости с характерным временем, сравнимым с периодом колебаний рассматриваемой волны, так что поверхностная плотность заряда χ оказывается функцией времени и горизонтальной координаты $\chi=\chi(t,x)$.

Математическая формулировка задачи расчета поля скоростей течения жидкости, электростатического потенциала и определения профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на заряженной свободной поверхности жидкости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad \mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}} = 0;$$

$$z=\xi: \qquad \partial_t\xi + u\partial_x\xi = v;$$

$$p - 2\rho\nu\big(\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}\big) + \frac{1}{8\pi}\Big((\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 - \varepsilon_d\big((\mathbf{n}\cdot\nabla)\Phi_{\text{in}}\big)^2$$

$$+ (\varepsilon_d - 2)\big((\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\Phi_{\text{in}}\big)^2\Big) = -\frac{\gamma\partial_{xx}\xi}{\big(1+(\partial_x\xi)^2\big)^{3/2}};$$

$$-\rho\nu\big[\big(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}\big) + \big(\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U}\big)\big] - \chi(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\Phi_{\text{in}} = 0;$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \Phi_{\text{in}};$$

$$\partial_t\chi + \sigma(\mathbf{n}\cdot\nabla)\Phi_{\text{in}} + \chi U_n \operatorname{div}_S(\mathbf{n}) + \operatorname{div}_S(\chi U_\tau\boldsymbol{\tau})$$

$$+ \mu\operatorname{div}_S(\chi E_{\text{in}_\tau}\boldsymbol{\tau}) + D\operatorname{div}_S\big(\operatorname{grad}_S(\chi)\big) = 0;$$

$$\chi = -\frac{1}{4\pi}\big((\mathbf{n}\cdot\nabla)\Phi_{\text{ex}} - \varepsilon_d(\mathbf{n}\cdot\nabla)\Phi_{\text{in}}\big);$$

$$z\to-\infty: \qquad u\to 0; \quad v\to 0; \quad \nabla\Phi_{\text{in}}\to 0;$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi_{\text{ex}}\to -E_0\mathbf{e}_z; \quad E_0 = 4\pi\chi_0.$$

Здесь $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ — орты осей; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты внешней нормали и касательной к возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости, уравнение которой записывается в виде $z=\xi\equiv\xi(t,x)$ (аналитические выражения для $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ приведены в Приложении). В нижеследующем воспользуемся обычным для задач о нелинейных периодических волнах [1–6] приемом, когда начальные условия задачи определяются в процессе решения таким образом, чтобы получить в результате наименее громоздкое и наиболее удобное для качественного анализа профиля волны выражение.

В приведенной выше постановке определению подлежат функции: $\xi=\xi(t,x)$ — профиль свободной поверхности; $u=u(t,x,z)$ — горизонтальная и $v=v(t,x,z)$ — вертикальная компоненты поля скоростей течения жидкости $\mathbf{U}(t,x,z)$; $p=p(t,x,z)$ — распределение давления в ней; $\Phi_{\text{in}}=\Phi_{\text{in}}(t,x,z)$ и $\Phi_{\text{ex}}=\Phi_{\text{ex}}(t,x,z)$ — потенциалы электрического поля внутри и вне жидкости соответственно; $\chi=\chi(t,x)$ — поверхностная плотность электрического заряда, а величины η, k, ρ, g, ν, γ, χ_0, σ, D, μ и ε_d выступают в качестве исходных данных.

2. Построение асимптотического решения

Воспользуемся описанной ранее [3,4] методикой отыскания решения сформулированной задачи о расчете нелинейных волн в вязкой несжимаемой жидкости и будем искать его в виде

$$\begin{pmatrix}\xi\\ u\\ v\\ p\\ \Phi_{\text{ex}}\\ \Phi_{\text{in}}\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -\rho g z - \frac{E_0^2}{8\pi}\\ -E_0 z\\ 0\\ \frac{E_0}{4\pi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1\\ u_1\\ v_1\\ p_1\\ \Phi_{\text{ex}}^{(1)}\\ \Phi_{\text{in}}^{(1)}\\ \chi_1\end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix}\xi_2\\ u_2\\ v_2\\ p_2\\ \Phi_{\text{ez}}^{(2)}\\ \Phi_{\text{in}}^{(2)}\\ \chi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\xi_1^3)\\ O(u_1^3)\\ O(v_1^3)\\ O(p_1^3)\\ O\big((\Phi_{\text{ex}}^{(1)})^3\big)\\ O\big((\Phi_{\text{in}}^{(1)})^3\big)\\ O(\chi_1^3)\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\xi_2\\ u_2\\ v_2\\ p_2\\ \Phi_{\text{ex}}^{(2)}\\ \Phi_{\text{in}}^{(2)}\\ \chi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}O(\xi_1^2)\\ O(u_1^2)\\ O(v_1^2)\\ O(p_1^2)\\ O\big((\Phi_{\text{ex}}^{(1)})^2\big)\\ O\big((\Phi_{\text{in}}^{(1)})^2\big)\\ O(\chi_1^2)\end{pmatrix};$$

$$\xi_1 = \eta\cdot f(t)\cos(kx-\omega t); \quad f(0) = 1,$$

где величины с индексом 1 определяют линейное по амплитуде приближение, а величины с индексом 2 дают поправки второго порядка малости.

Используя приведенные разложения для ξ, u, v, p, Φ_{ex}, Φ_{in}, χ, несложно построить задачи первого и второго порядков малости (см. аналогичные построения в [3,4])

$$\partial_t\mathbf{U}_m + \frac{1}{\rho}\nabla p_m - \nu\Delta\mathbf{U}_m = \mathbf{V}_m;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U}_m = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(m)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(m)} = 0;$$

$$z=\xi: \qquad \partial_t\xi_m - v_m = f_{1m};$$

$$p_m - \rho g\xi_m - 2\rho\nu\partial_z v_m - \frac{E_0}{4\pi}\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(m)} + \gamma_0\partial_{xx}\xi_m = f_{2m};$$

$$\rho\nu(\partial_z u_m + \partial_x v_m) + \frac{E_0}{4\pi}\partial_x \Phi_{\text{in}}^{(m)} = f_{3m};$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(m)} - E_0\xi_m - \Phi_{\text{in}}^{(m)} = f_{4m};$$

$$\partial_t\chi_m + \frac{E_0}{4\pi}\partial_x u_m + \sigma\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(1)} - D\partial_{xx}\chi_m - \mu\frac{E_0}{4\pi}\partial_{xx}\Phi_{\text{in}}^{(1)} = f_{5m};$$

$$\chi_m + \frac{1}{4\pi}\left(\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(m)} - \varepsilon_d\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(m)}\right) = f_{6m};$$

$$z \to -\infty: \; u_m \to 0; \quad v_m \to 0; \quad |\nabla\Phi_{\text{in}}^{(m)}| \to 0;$$

$$z \to \infty: \quad |\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(m)}| \to 0.$$

Выписанные соотношения при $m = 1$ представляют собой формулировку задачи первого порядка малости, для которой $\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$; $f_{n1} = 0$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Задача второго порядка малости получается при $m = 2$. Величины $\mathbf{V}_2$ и f_{n2} $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, выраженные через решение задачи первого порядка, приведены в Приложении.

3. Решение задачи в квадратичном приближении по амплитуде периодической бегущей волны

В соответствии со сложившимся уже стандартным подходом к задачам данного класса (см., например, [3,4]) следующий этап заключается в последовательном решении задач первого и второго порядков малости. Это позволяет получить выражение для формы профиля периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны во втором приближении по амплитуде η

$$\xi = \eta\cos\theta\exp(\delta t) + 2\eta^2\big[\mathrm{Re}(\zeta)\cos(2\theta) - \mathrm{Im}(\zeta)\sin(2\theta)\big]\exp(2\delta t);$$

$$\theta = \omega t - kx; \quad \omega = \mathrm{Im}(S); \quad \delta = \mathrm{Re}(S); \quad \zeta = \frac{M_1}{M_0}. \quad (1)$$

Здесь S — комплексная частота, получаемая из дисперсионного соотношения на этапе решения задачи первого порядка малости; M_0 и M_1 вычисляются в процессе решения задачи второго порядка малости (см. Приложение).

Выражение (1) можно переписать в альтернативной форме

$$\xi = \eta\cos\theta\exp(\delta t) + \eta^2 A\cos(2\theta + \phi)\exp(2\delta t);$$

$$A = 2\sqrt{\mathrm{Re}(\zeta)^2 + \mathrm{Im}(\zeta)^2};$$

$$\phi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\zeta)}{\mathrm{Re}(\zeta)}\right); & \textit{если } \mathrm{Re}(\zeta) > 0; \\ \dfrac{\pi}{2}; & \textit{если } \mathrm{Re}(\zeta) = 0; \\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\zeta)}{\mathrm{Re}(\zeta)}\right) + \pi; & \textit{если } \mathrm{Re}(\zeta) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что в приведенных в Приложении выражениях для M_0 и M_1 вместо проводимости жидкости σ используется обратная ей величина $r = 1/\sigma$ — удельное сопротивление. Это облегчает процедуру асимптотического предельного перехода к случаю идеально проводящей жидкости $(\sigma \to \infty \Rightarrow r \to 0)$, для которой отсутствует явление релаксации заряда. Кроме того, при расчетах в качестве численного параметра, характеризующего плотность поверхностного заряда на плоской свободной равновесной поверхности жидкости, используется безразмерный параметр Тонкса–Френкеля [7,8]

$$W = 4\pi\chi_0^2/\sqrt{\rho g\gamma} = E_0^2/(4\pi\sqrt{\rho g\gamma}). \quad (3)$$

Таким образом, величины S, M_0 и M_1 являются функциями исходных параметров $\rho, g, \gamma, \nu, k, W, r, D, \mu, \varepsilon_d$.

Комплексная частота вычисляется по формуле

$$S = \omega_0\alpha(\rho, g, \gamma, \nu, k, W, r, D, \mu, \varepsilon_d);$$

$$\omega_0^2 = kg\big(1 + (ak)^2 - akW\big); \quad a = \sqrt{(\gamma/\rho g)}, \quad (4)$$

a — капиллярная постоянная; безразмерный параметр α — корень обезразмеренного дисперсионного уравнения, соответствующий капиллярно-гравитационной волне (полное дисперсионное уравнение и способ выбора нужного корня приведены в Приложении); ω_0 — частота капиллярно-гравитационных волн бесконечно малой амплитуды с волновым числом k на свободной поверхности идеальной идеально проводящей жидкости.

Как известно, параметр W характеризует устойчивость однородно заряженной плоской поверхности жидкости по отношению к собственному заряду [8]. При переходе к идеальной идеально проводящей жидкости $(\nu, r) \to 0$ соотношение для комплексной частоты S из (4) превращается в $S = \pm i\omega_0$ (так как $\alpha = \pm i$). Поэтому, когда

$$W > \frac{1}{ak} + ak \Rightarrow \omega_0^2 < 0 \Rightarrow S = \pm|\omega_0|,$$

$$\text{т.е.} \quad \mathrm{Im}(S) \equiv \omega = 0, \quad \text{а} \quad \mathrm{Re}(S) \equiv \delta > 0, \quad (5)$$

электрические силы на гребнях волн с волновым числом $k = (1/a)$ преобладают над силами поверхностного натяжения (уже в первом порядке малости) и реализуется неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному электрическому заряду [7–9]. Режим движения свободной поверхности перестает быть волновым, поскольку $\omega = 0$. Из (5) несложно заметить, что если $0 \le W < 2$, то все волновые числа $k > 0$ устойчивы.

В связи со сказанным будем исследовать профиль волны (1) в предположении, что выполняется условие

$$W < \frac{1}{ak} + ak \Rightarrow \mathrm{Im}(S) = \omega \ne 0, \quad \delta = \mathrm{Re}(S) < 0. \quad (6)$$

В этом случае параметр δ имеет смысл декремента затухания волны в первом порядке малости, а асимптотические приближения (1) и (2) для профиля волны не теряют своей равномерности в пределе $\eta \to 0$ при всех значениях времени $t > 0$.

Согласно выражению (2), профиль нелинейной периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности жидкости в квадратичном по амплитуде волны приближени складывается из главного (пропорционального η) волнового слагаемого — k-волны и вызванного нелинейным взаимодействием волн поправочного слагаемого, пропорционального η^2 — $2k$-волны. Мерой интенсивности взаимодействия этих волн является величина амплитудного множителя A в формуле (2).

В численных расчетах использовались безразмерные переменные, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, а остальные величины измерялись в единицах своих характерных масштабов

$$k^* = \frac{1}{a}; \quad \eta^* = a; \quad \xi_* = \frac{1}{a}; \quad r^* = \sqrt{\frac{a}{g}};$$

$$\nu^* = \sqrt{ga^3}; \quad D^* = \sqrt{ga^3}; \quad \mu^* = \frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

4. Влияние эффекта релаксации заряда на интенсивность нелинейного взаимодействия волн

Чтобы исследовать влияние конечной проводимости жидкости на интенсивность нелинейного взаимодействия волн, примем для простоты, что значения коэффициента диффузии D и подвижности носителей заряда μ равны нулю (пропорциональные им слагаемые играют заметную роль только для плохо проводящих жидкостей типа жидкого водорода или жидкого гелия [10–12]). Принятое допущение означает, что явление релаксации электрического заряда в жидкости полностью обусловлено ее электропроводностью. Значение безразмерной вязкости ν положим равным 0.1, а диэлектрической проницаемости $\varepsilon_d = 50$.

Семейство кривых $A = A(k)$, приведенное на рис. 1, построено в области значений волновых чисел, где влияние эффекта релаксации заряда наиболее заметно, при различных значениях удельного сопротивления жидкости r (напомним, что $A(k)$ — амплитудный множитель перед поправкой второго порядка малости к профилю нелинейной капиллярно-гравитационной волны). При выбранной величине параметра Тонкса–Френкеля $W = 1$ рост удельного сопротивления r от 0 до 1 не изменяет резонансоподобного характера зависимости $A = A(k)$, незначительно снижая, однако, абсолютную величину пика (всего на 6%) и слабо смещая его положение в область меньших значений волновых чисел k. Несложно заметить, что релаксация заряда более существенно сказывается на интенсивности нелинейного взаимодействия коротких волн. Отметим также, что

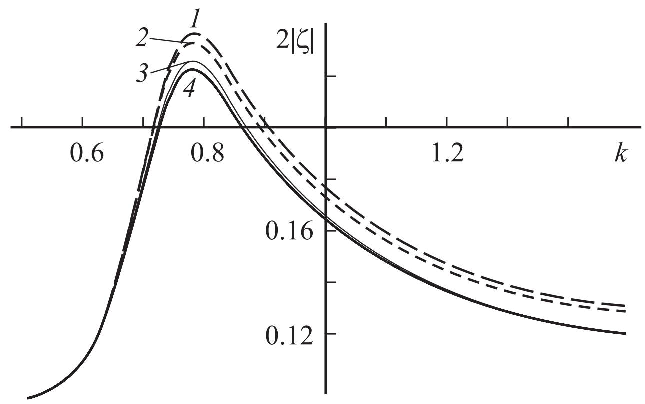

Рис. 1. Зависимости безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны $A = A(k) \equiv 2|\xi(k)|$ от безразмерного волнового числа, рассчитанные при $W = 1$, построенные для различных значений безразмерного удельного сопротивления жидкости r: *1* — 0, *2* — 0.1, *3* — 0.5, *4* — 1.0.

значение $r = 1$ относится к слабо проводящим жидкостям (для которых использованное в расчетах приближение $D = \mu = 0$ применимо лишь с оговорками). Для примера, удельное сопротивление этилового спирта в выбранных безразмерных переменных соответствует $r = 1.3 \cdot 10^{-3}$.

Тем не менее для слабо проводящих жидкостей ($r = 1$) влияние поверхностной плотности заряда (параметра W) на зависимость $A = A(k)$, так же как и для идеально проводящей жидкости, имеет немонотонный характер (рис. 2). Рост величины W от значений, близких к нулю, до $W = 1$ сначала снижает интенсивность нелинейного взаимодействия волн (рис. 2, a), что выражается в уменьшении амплитуды поправки второго порядка малости $A(k)$ на интервале $0 \le W \le 1$, а затем на интервале $1 \le W \le 2$ существенно его увеличивает (рис. 2, b). Интенсивность взаимодействия минимальна при $W \approx 1$ (рис. 2, c). Из рис. 3, на котором приведена зависимость $A(W)$, рассчитанная для различных значений удельного сопротивления при величине волнового числа $k = 0.73$, соответствующего положению максимума кривой $A(k)$ в области наиболее интенсивного нелинейного взаимодействия волн, следует, что для слабо проводящих жидкостей этот минимум несколько глубже.

На рис. 4 приведены зависимости амплитуды A от удельного сопротивления r, рассчитанные при $k = 0.73$ для разных значений парметра Тонкса–Френкеля W. Несложно видеть, что и качественный характер зависимости и ее количественная характеристика существенно зависят от величины поверхностного заряда (от величны параметра Тонкса–Френкеля). Из рис. 4 видно, что зависимость $A = A(r)$ имеет наиболее монотонный вид при $W \approx 1$. Именно этим объясняется плавное уменьшение пикового значения амплитуды зависимости $A(k)$

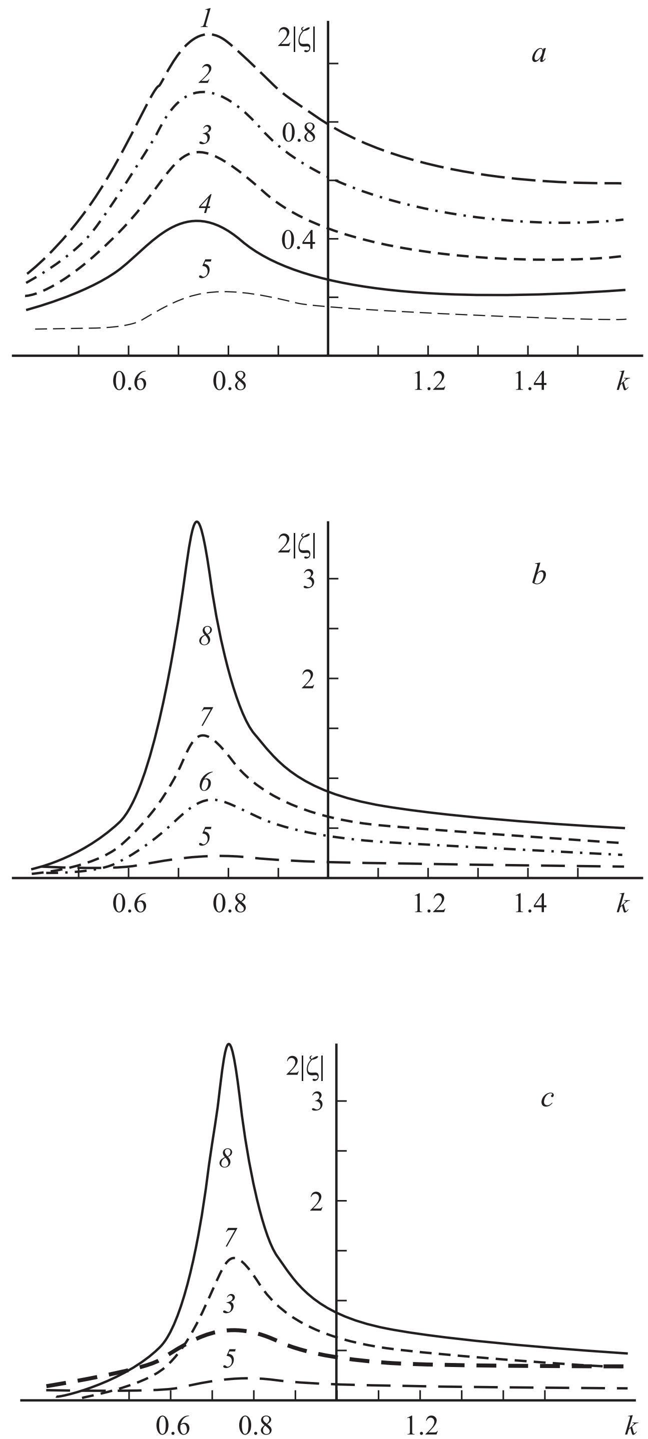

Рис. 2. Зависимости безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны $A = A(k) \equiv 2|\xi(k)|$ от безразмерного волнового числа, рассчитанные при $r = 1$, построенные для различных значений параметра W, характеризующего поверхностную плотность электрического заряда: *1* — 0.1, *2* — 0.3, *3* — 0.5, *4* — 0.7, *5* — 1.0, *6* — 1.3, *7* — 1.5, *8* — 1.8. *a* — зависимости $A = A(k) \equiv |\xi(k)|$, рассчитанные при $W \leq 1$; *b* — зависимости $A = A(k) \equiv 2|\xi(k)|$, рассчитанные при $W \geq 1$; *c* — зависимости $A = A(k) \equiv 2|\xi(k)|$, рассчитанные при изменении параметра в диапазоне: $0.5 \leq W \leq 1.8$.

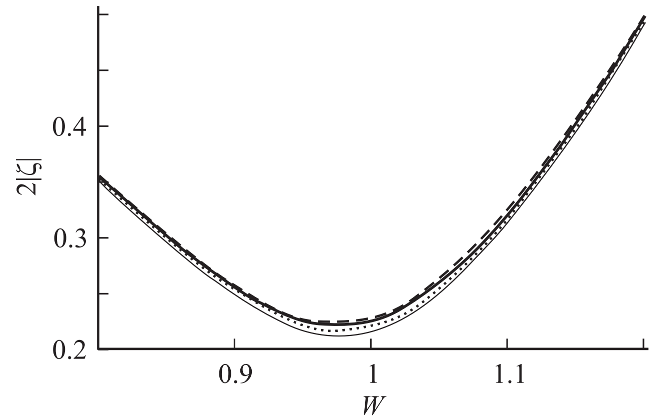

Рис. 3. Зависимости безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны $A = A(W) \equiv 2|\xi(W)|$ от безразмерного параметра W, характеризующего устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к однородно распределенному по ней заряду, рассчитанные при значении безразмерного волнового числа $k = 0.73$, построенные для различных значений безразмерного удельного сопротивления жидкости r: штриховая кривая — 0, жирная кривая — 0.1, пунктир — 0.5, тонкая кривая — 1.0.

с ростом параметра r на рис. 1. Аналогичное рис. 1 семейство кривых $A = A(k)$, рассчитанное при $W = 1.8$, приведено на рис. 5. Рис. 5, в частности, иллюстрирует то обстоятельство, что монотонное уменьшение амплитуды нелинейной поправки A при увеличении r сохраняется только для значений $k > 0.8$, а в области наиболее интенсивного межмодового взаимодействия $(k \approx k_*)$ эта монотонность нарушается. Правда, вариации абсолютной величины изменения амплитуды A с изменением величины удельного сопротивления r незначительны: на рис. 5 оно лишь немного превышает толщины линий. Следует также отметить, что в области значений параметра Тонкса–Френкеля $W > 1$ интенсивность взаимодействия имеет минимум при значениях r, отличных от нуля (рис. 4), т.е. для жидкостей с конечной проводимостью.

Заключение

Конечная проводимость жидкости наиболее существенно влияет на нелинейное взаимодействие капиллярно-гравитационных волн с волновыми числами, бóльшими по величине значения $k_* = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$, удвоенный квадрат которого равен единице, деленной на квадрат капиллярной постоянной жидкости. Характер зависимости интенсивности нелинейного взаимодействия между отдельными гармониками, формирующими нелинейную капиллярно-гравитационную волну, от удельно-

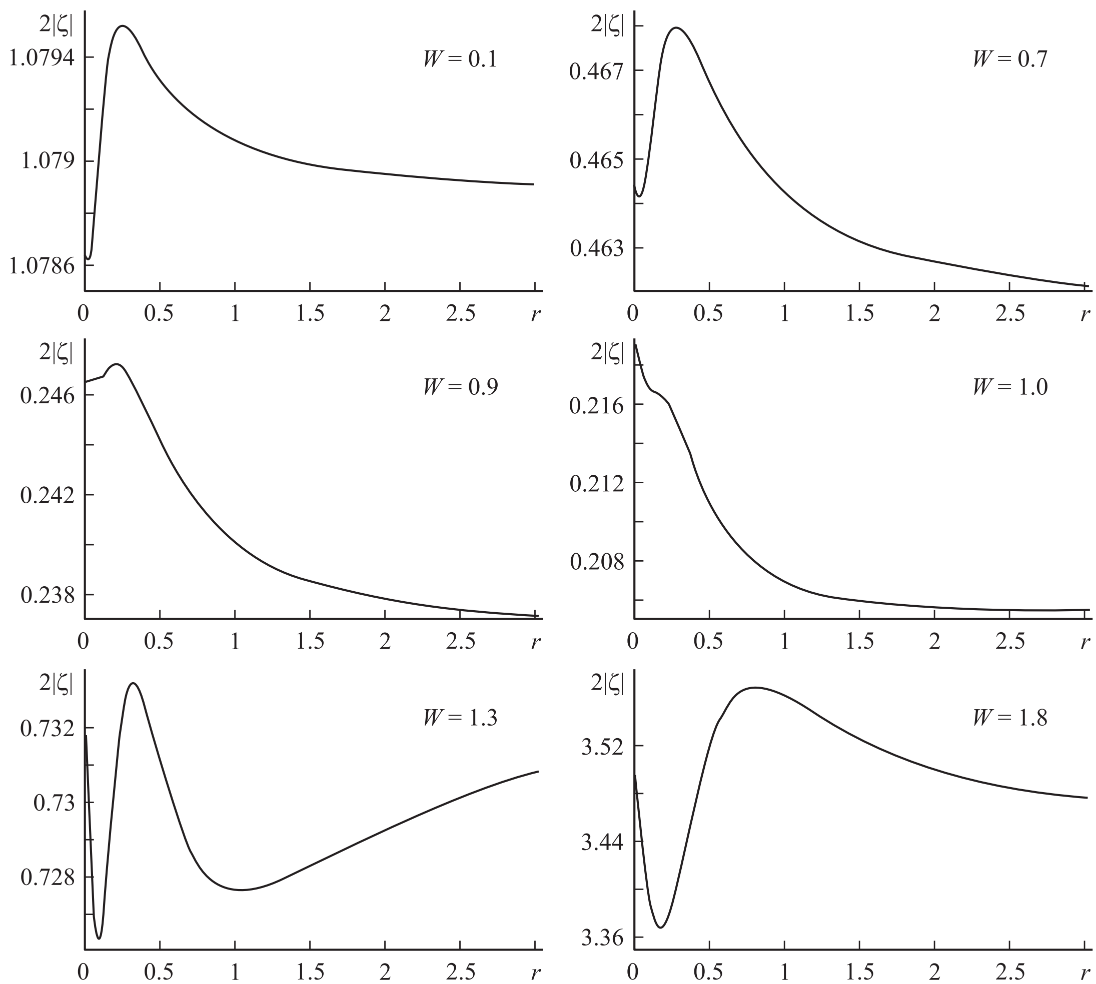

Рис. 4. Зависимости безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны $A = A(r) \equiv 2|\xi(r)|$ от безразмерного удельного сопротивления жидкости r, построенные при значении безразмерного волнового числа $k = 0.73$ для различных значений параметра W.

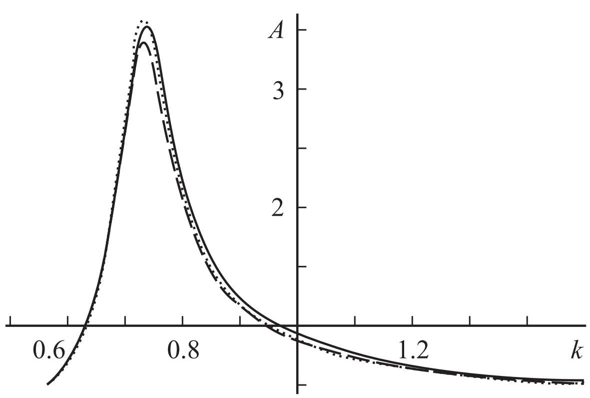

Рис. 5. Зависимости безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны $A = A(k) \equiv 2|\xi(k)|$ от безразмерного волнового числа, построенные при $W = 1.8$ для различных значений безразмерного удельного сопротивления жидкости r: сплошная кривая — 0, штриховая — 0.2, пунктир — 0.75.

го сопротивления жидкости существенно связан с величиной поверхностной плотности заряда. При приближении величины поверхностного заряда к критическому для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля значению появляется отличное от нулевого значение удельного сопротивления, при котором интенсивность взаимодействия мод минимальна. Для жидкостей с конечной проводимостью резонансное волновое число, при котором нелинейное взаимодействие волн наиболее интенсивно, несколько меньше, чем для идеально проводящей жидкости. Влияние электропроводности жидкости на интенсивность нелинейного взаимодействия капиллярно-гравитационных волн гораздо менее существенно, чем влияние величины поверхностного заряда: изменение удельного сопротивления жидкости в широких пределах приводит к изменению интенсивности нелинейного межмодового взаимодействия на единицы процентов, в то время как варьирование поверхностной плотности заряда в докритической области изменяет интенсивность взаимодействия в несколько раз.

Приложение. Вспомогательные величины и соотношения

1. Касательный и нормальный орты к возмущенной свободной поверхности жидкости

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1(\partial_x \xi)^2}}\,\mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x \xi)^2}}\,\mathbf{e}_z;$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{1(\partial_x \xi)^2}}\,\mathbf{e}_x + \frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1+(\partial_x \xi)^2}}\,\mathbf{e}_z.$$

2. Правые части соотношений, выражающих математическую формулировку задачи второго порядка малости,

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{U}_1^2) + \mathbf{U}_1 \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{U}_1)\big);$$

$$f_{12} = \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1;$$

$$f_{22} = 2\rho\nu\left(\xi_1 \partial_{zz} v_1 + \partial_x \xi_1 \left(\frac{E_0}{4\pi\rho\nu}\,\partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1}\right)\right) - \xi_1 \partial_z p_1$$

$$- \frac{1}{8\pi}\big((\boldsymbol{\nabla}\Phi_{\mathrm{ex}_1})^2 - 2E_0 \xi_1 \partial_{zz}\Phi_{\mathrm{ex}_1} - \varepsilon_d(\partial_z \Phi_{\mathrm{in}_1})^2$$

$$+ (\varepsilon_d - 2)(\partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1})^2\big);$$

$$f_{32} = -\rho\nu\big(4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 + \xi_1 \partial_z(\partial_z u_1 + \partial_x v_1)\big)$$

$$- \frac{E_0}{4\pi}\,\partial_x(\xi_1 \partial_z \Phi_{\mathrm{in}_1}) - \chi_1 \partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1};$$

$$f_{42} = -\xi_1(\partial_z \Phi_{\mathrm{ex}_1} - \partial_z \Phi_{\mathrm{in}_1});$$

$$f_{52} = -\partial_x(u_1\chi_1) - \frac{E_0}{4\pi}\left(\xi_1 \partial_{xz} u_1 - \frac{E_0}{4\pi\rho\nu}\,\partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1}\partial_x \xi_1\right)$$

$$- \sigma(\xi_1 \partial_{zz}\Phi_{\mathrm{in}_1} - \partial_x \xi_1 \partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1}) + \mu\left(\frac{E_0}{4\pi}\,(\partial_{xx}\xi_1 \partial_z \Phi_{\mathrm{in}_1}\right.$$

$$\left. + 2\partial_x \xi_1 \partial_{xz}\Phi_{\mathrm{in}_1} + \xi_1 \partial_{xxz}\Phi_{\mathrm{in}_1}) + \chi_1 \partial_{xx}\Phi_{\mathrm{in}_1} + \partial_x \chi_1 \partial_x \Phi_{\mathrm{in}_1}\right);$$

$$f_{62} = -\frac{1}{4\pi}\left(\xi_1 \partial_{zz}(\Phi_{\mathrm{ex}_1} - \varepsilon_d \Phi_{\mathrm{in}_1})\right.$$

$$\left. - \partial_x \xi_1 \partial_x(\Phi_{\mathrm{ex}_1} - \varepsilon_d \Phi_{\mathrm{in}_1}) + \frac{E_0}{2}\,(\partial_x \xi_1)^2\right).$$

3. Коэффициенты M_j.

$$M_j = \det$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k & ik & R_{1j} & 0 \\ \frac{kE_0}{2\pi} & 0 & -\rho(S+4\nu k^2) & 2\rho\nu ikw & R_{2j} & 0 \\ 0 & -i\,\frac{kE_0}{2\pi} & -4i\rho\nu k^2 & -\rho(S+4\nu k^2) & R_{3j} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & R_{4j} & 0 \\ 4kr(2Dk^2+S) & L & -2rk^2E_0 & irkE_0w & R_{5j} & 0 \\ -\frac{k}{2\pi} & -\varepsilon_d\,\frac{k}{2\pi} & 0 & 0 & R_{6j} & 1 \end{pmatrix};$$

$$L \equiv 4k\Big(2\pi + r\big(E_0\mu k + \varepsilon_d(2Dk^2 + S)\big)\Big);$$

$$w \equiv \sqrt{2\left(2k^2 + \frac{S}{\nu}\right)};$$

$$R_{10} = 2S; \quad R_{20} = -(\rho g + 4\gamma k^2); \quad R_{30} = 0;$$

$$R_{40} = -E_0; \quad R_{50} = 0; \quad R_{60} = 0;$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\,k\left(bk\left(1 - \frac{ic(k^2 - q^2)}{(3k+q)\big(2S+\nu(k-q)(3k+q)\big)}\right) - icq\right);$$

$$R_{21} = \frac{1}{4}\,k\Big(bS\rho + 2\rho\nu(bk^2 - icq^2)$$

$$+ \frac{E_0^2 k}{4\pi}\Big(a_{\mathrm{ex}} + \big((\varepsilon_d - 1)a_{\mathrm{in}} - 2\big)a_{\mathrm{in}}\Big)$$

$$- \frac{2\rho ibck(k-q)\big(2S + \nu(5k^2 + 2kq + q^2)\big)}{(3k+q)\big(2S + \nu(k-q)(3k+q)\big)}\Big);$$

$$R_{31} = \frac{1}{4}\Bigg(\rho\nu\Bigg(cq(5k^2 + q^2)$$

$$+ bk\left(6ik^2 + \frac{c(k^2 - q^2)(5k^2 + 2kq + q^2)}{(3k+q)\big(2S + \nu(k-q)(3k+q)\big)}\right)\Bigg)$$

$$+ i\,\frac{E_0^2 k^2}{4\pi}\,a_{\mathrm{in}}(2 + a_{\mathrm{ex}} + \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\Bigg);$$

$$R_{41} = k\,\frac{E_0}{4}\,(a_{\mathrm{ex}} + a_{\mathrm{in}});$$

$$R_{51} = \frac{r}{4}\,kE_0\Bigg(-icq\big(q + 2k(a_{\mathrm{ex}} + \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\big)$$

$$+ bk\Bigg(k\big(1 + 2(a_{\mathrm{ex}} + \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\big)$$

$$- \frac{2ic(k-q)(k+q)^2}{(3k+q)\big(2S + \nu(k-q)(3k+q)\big)}\Bigg)$$

$$- k\Bigg((2Dk^2 + S)\big(1 - 4(a_{\mathrm{ex}} - \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\big)$$

$$+ a_{\mathrm{in}}\left(\frac{E_0^2}{4\pi\nu\rho} + 2E_0\mu k(2 + a_{\mathrm{ex}} + \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\right)\Bigg)\Bigg) + 2\pi E_0 k^2 a_{\mathrm{in}};$$

$$R_{61} = \frac{E_0 k^2}{32\pi}\,\big(1 - 4(a_{\mathrm{ex}} - \varepsilon_d a_{\mathrm{in}})\big);$$

$$b = -\frac{\omega_0^2 + 2\nu kqS + \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\big((k-q)S + k^3 D\big)}{k\left(S + 2\nu k(k-q) - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,(k-q)\right)};$$

$$c = \frac{i\left(\omega_0^2 + S(S + 2\nu k^2) + \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,k^3 D\right)}{k\left(S + 2\nu k(k-q) - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,(k-q)\right)};$$

$$G = 1 + \frac{r}{4\pi}\big((1 + \varepsilon_d)(S + k^2 D) + E_0 k\mu\big);$$

$$d = \frac{E_0 k}{4\pi}\left(1 - (1+\varepsilon_d)\,\frac{r}{4\pi G}\right.$$
$$\left.\times\,\frac{(k-q)\big(\omega_0^2 + S^2 + 2\nu k^2(S + k^2 D)\big) + S k^3 D}{k\big(S + 2\nu k(k-q) - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,(k-q)\big)}\right);$$

$$a_{\mathrm{ex}} = 1 - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{(k-q)\big(\omega_0^2 + S^2 + 2\nu k^2(S+k^2 D)\big) + S k^3 D}{k\left(S + 2\nu k(k-q) - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,(k-q)\right)};$$

$$a_{\mathrm{in}} = -\frac{r}{4\pi G}\,\frac{(k-q)\big(\omega_0^2 + S^2 + 2\nu k^2(S+k^2 D)\big) + S k^3 D}{k\left(S + 2\nu k(k-q) - \frac{r}{4\pi G}\,\frac{E_0^2 k}{4\pi\rho}\,(k-q)\right)};$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}};$$

$$\omega_0^2 = kg\big(1 + (ak)^2 - akW\big); \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}};$$

$$E_0 = 2\sqrt{\pi W \sqrt{\rho g \gamma}},$$

i — мнимая единица.

4. Безразмерное дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, R, E, \Delta, M, \varepsilon_d) = \sqrt{\alpha + \beta^2}; \\ \mathrm{Re}\big(F(\alpha, \beta, R, E, \Delta, M, \varepsilon_d)\big) > 0, \end{cases}$$

где

$$F(\alpha, \beta, R, E, \Delta, M, \varepsilon_d)$$
$$= \frac{\left((\alpha + 2\beta^2)^2 + 1 - \frac{R\left(\alpha^2 + 1 + 2\beta^2(2\alpha+\Delta)\right)E^2}{\alpha\left(1 + R\left((1+\varepsilon_d)(\alpha+\Delta) + EM\right)\right)}\right)}{4\beta^3\left(1 - \frac{R\left(\alpha^2 + 1 + 2\beta^2(2\alpha+\Delta)\right)E^2}{\alpha\left(1 + R\left((1+\varepsilon_d)(\alpha+\Delta) + EM\right)\right)4\beta^4}\right)};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\nu k^2}{\omega_0}}; \quad R = \frac{r\omega_0}{4\pi};$$

$$\Delta = \frac{D k^2}{\omega_0}; \quad E = \frac{E_0 k}{\omega_0\sqrt{4\pi\rho}}; \quad M = \mu\sqrt{4\pi\rho}.$$

В общем случае дисперсионное уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Чтобы избежать чрезмерной громоздкости, ограничим рассмотрение волнами, распространяющимися в положительном направлении оси $0x$, для этого будем отбирать корни с положительной мнимой частью. Среди двух удовлетворяющих этому условию корней один отвечает капиллярно-гравитационной волне, а другой — волне, связанной с поверхностной релаксацией электрического заряда.

Пусть при заданных значениях параметров $\beta = \beta_*$, $E = E_*$, $\Delta = \Delta_*$, $M = M_*$ и $R = R_*$ найдены два корня с положительной мнимой частью. Если в безразмерном дисперсионном соотношении положить $\beta = \beta_*$, $E = E_*$, $\Delta = \Delta_*$, $M = M_*$ и $R = 0$ (т.е. рассмотреть случай идеально проводящей жидкости, для которой отсутствует „релаксационная“ волна), то корень с положительной мнимой частью будет один. Далее, непрерывно изменяя параметр R от $R = 0$ до $R = R_*$, следует проследить за изменением найденного корня (процедура реализуется численно). При $R = R_*$ этот корень сравняется с одним из тех, что были найдены изначально. Он и будет соответствовать капиллярно-гравитационной волне.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант № МК-929.2003.01) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
[2] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
[4] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
[5] *Simmons W.F.* // Proc. Roy. Soc. 1969. Vol. 309. Ser. A. P. 551–575.
[6] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. Pt 2. P. 385–395.
[7] *Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 15. С. 61–64.
[8] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
[9] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 2. С. 22–29.
[10] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. № 4. С. 829–832.
[11] *Володин А.П., Хайкин М.С., Эдельман В.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. Вып. 10. С. 707–711.
[12] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 3. С. 624–636.