

# Эмиссионная томография радиально-симметричных объектов и экспоненциальное преобразование Абеля

© С.А. Терещенко

Московский государственный институт электронной техники (технический университет),  
124498 Москва, Россия  
e-mail: tsa@miee.ru

(Поступило в Редакцию 9 марта 2004 г.)

Рассмотрены свойства экспоненциального преобразования Абеля (ЭПА), которое определяется как экспоненциальное преобразование Радона (ЭПР) радиально-симметричного объекта, точно так же как преобразование Абеля является преобразованием Радона радиально-симметричного объекта. Приводится новый вывод обратного ЭПА непосредственно из обратного ЭПР. Обсуждены проблемы численной реализации ЭПА, в том числе потеря информации от слишком глубоких областей объекта, не имеющая аналога для обычного преобразования Абеля. Полученные результаты могут быть полезны при реконструкции пространственных распределений источников излучения с цилиндрической или сферической симметрией.

## Введение

Вычислительная томография является вполне сформировавшейся областью науки со своим кругом задач и методов их решения [1–4]. Центральное место в вычислительной томографии занимают преобразование Радона [5], возникающее в трансмиссионной томографии, например при определении пространственных распределений коэффициента ослабления излучения, и экспоненциальное преобразование Радона [6–8], возникающее в однофотонной эмиссионной томографии, например при определении пространственных распределений источников излучения. Особое значение имеют эти преобразования от радиально-симметричных функций. Оказывается, преобразование Радона от радиально-симметричной функции является хорошо известным еще до Радона преобразованием Абеля, которое активно используется в самых различных областях [9]. В то же время экспоненциальное преобразование Радона от радиально-симметричной функции [10], которое естественно называть экспоненциальным преобразованием Абеля (ЭПА), до сих пор не получило такого распространения, что связано, по-видимому, с недостатком работ, освещающих свойства ЭПА.

История интегрального преобразования Абеля (интегрального уравнения Абеля) восходит к 1823 г., когда Нильс Хенрик Абель обобщил известную задачу о таутохроне. При этом он получил интегральное уравнение вида

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad (1)$$

а также его решение (обратное преобразование)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (2)$$

В настоящее время уравнением Абеля (обобщенным уравнением Абеля) принято называть любое уравнение вида

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (3)$$

где  $0 < \alpha < 1$  и  $a > 0$ , имеющее решение

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{x-t^{1-\alpha}} dt. \quad (4)$$

Интегрированием по частям можно получить и формулу обращения

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{g(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} g(t) \right] dt \right]. \quad (5)$$

Часто встречается другой вид, который можно назвать „внешним“ преобразованием Абеля в отличие от „внутреннего“ преобразования Абеля (3),

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt,$$

имеющий формулу обращения

$$f(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} g(t) dt \quad (6)$$

или после интегрирования по частям

$$f(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} g(t) \right] dt. \quad (7)$$

## Преобразование Абеля в трансмиссионной томографии

Интегральные методы в трансмиссионной вычислительной томографии (ТВТ) основаны на преобразовании Радона [3–4]

$$p(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (8)$$

где  $\delta(\bullet)$  — дельта-функция Дирака.

При этом, как обычно в вычислительной томографии, были введены неподвижная  $(x, y)$  и вращающаяся  $(\xi, \zeta)$  системы координат (рис. 1), связанные соотношениями

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ \zeta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

Для радиально-симметричной функции  $s(x, y) = s(\sqrt{x^2 + y^2}) = s(r)$  в полярной системе координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (10)$$

преобразование Радона  $p(\xi, \theta)$  превращается в частный случай преобразования Абеля  $p(\xi)$

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r) \delta(\xi - r \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2s(r)r}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) dr \\ &= \int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{2s(r)r}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} dr, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\eta(\bullet)$  — ступенчатая функция Хевисайда.

Используя общую формулу обращения преобразования Абеля (6), можно получить обратное преобразование для (11) в виде

$$s(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{\xi p(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi. \quad (12)$$

Интегрированием по частям (12) приводится к формуле

$$s(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \left[ \frac{dp(\xi)}{d\xi} \right] d\xi. \quad (13)$$

При этом, естественно, считалось выполненным условие регулярности на бесконечности  $p(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ .

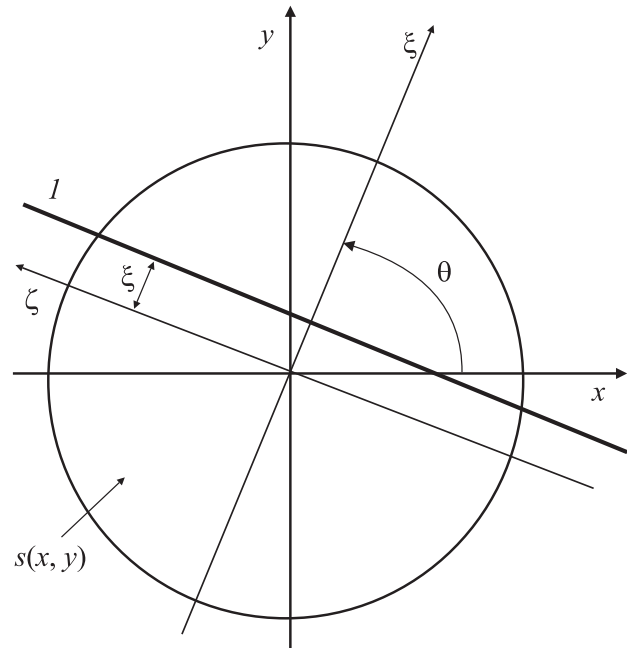


Рис. 1. Неподвижная  $(x, y)$  и вращающаяся  $(\xi, \zeta)$  системы координат при томографической реконструкции функции  $s(x, y)$ .  $l$  — линия проецирования.

Заметим, что А. Кормаком в классических статьях [11,12] предложена формула обращения, отличающаяся от (12) и (13), а именно

$$s(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{r p(\xi)}{\xi \sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi. \quad (14)$$

Однако после интегрирования по частям формула (14) приводится, как и следовало ожидать, к виду (13).

Представляет интерес вывод обратного преобразования Абеля непосредственно из обратного преобразования Радона. В качестве исходной возьмем формулу обращения, соответствующую методу фильтрованных обратных проекций [3–4],

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi) d\xi d\theta. \quad (15)$$

В выражении (15)  $h(\bullet)$  — функция фильтра, для которой справедливо интегральное представление в виде обратного преобразования Фурье, существующего в классе обобщенных функций,

$$h(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} d\chi = -\frac{1}{2\pi} \text{p} \frac{1}{\xi^2}, \quad (16)$$

где  $p(1/\xi^2)$  — обобщенная функция [13], действующая по правилу

$$\begin{aligned} \left( p \frac{1}{\xi^2}, f(\xi) \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p \frac{1}{\xi^2} f(\xi) d\xi \equiv v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi^2} d\xi \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(\xi)}{\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

а  $v.p.$  — знак интегрирования в смысле главного значения Коши.

Тогда

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) \left[ -\frac{1}{2\pi} p \frac{1}{(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)^2} \right] d\xi d\theta \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{p(\xi, \theta) - p(0, \theta)}{(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)^2} \right] d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - \xi} \left[ \frac{\partial p(\xi, \theta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

что представляет собой обратное преобразование Радона в форме Радона [5].

В радиально-симметричном случае  $p(\xi, \theta) = p(\xi)$ , и переходя в полярную систему координат, получим

$$\begin{aligned} s(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r \cos \theta - \xi} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp(\xi)}{d\xi} \left[ v.p. \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos \theta - \xi} d\theta \right] d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что  $p(\xi)$  — функция четная, а  $dp(\xi)/d\xi$  — нечетная. Так как

$$v.p. \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos \theta - \xi} d\theta = \frac{(-2\pi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi), \quad (20)$$

где  $\text{sign}(\bullet)$  — знаковая функция, получим из обратного преобразования Радона обратное преобразование Абеля в форме (13)

$$\begin{aligned} s(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp(\xi)}{d\xi} \left[ \frac{(-2\pi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi) \right] d\xi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

## Экспоненциальное преобразование Абеля в эмиссионной томографии

Интегральные методы в эмиссионной вычислительной томографии (ЭВТ) основаны на экспоненциальном преобразовании Радона [3–4]

$$\begin{aligned} p(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \theta - y \sin \theta) \\ &\quad \times e^{\mu(-x \sin \theta + y \cos \theta)} dx dy, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mu$  — не зависящий от координат коэффициент линейного ослабления излучения.

Например, для гамма-излучения радионуклида  $^{99m}\text{Tc}$  с энергией гамма-квантов 140 keV в воде  $\mu \approx 0.15 \text{ cm}^{-1}$ . Для радиально-симметричной функции  $s(x, y) = s(\sqrt{x^2 + y^2}) = s(r)$  экспоненциальное преобразование Радона  $p(\xi, \theta)$  превращается в экспоненциальное преобразование Абеля  $p(\xi)$

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r) \delta(\xi - r \cos \varphi) e^{\mu r \sin \varphi} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2s(r) \text{ch}(\mu \sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) r dr \\ &= \int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{2s(r) \text{ch}(\mu \sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\text{ch}(\bullet)$  — косинус гиперболический.

В отличие от [10] выведем обратное экспоненциальное преобразование Абеля непосредственно из обратного экспоненциального преобразования Радона. В соответствии с методом фильтрованных обратных проекций [4,8]

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) h_\mu(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi) \\ &\quad \times e^{-\mu(-x \sin \theta + y \cos \theta)} d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $h_\mu(\bullet)$  — функция фильтра, интегральное представление которой в виде обратного преобразования Фурье также существует в классе обобщенных функций,

$$\begin{aligned} h_\mu(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| [1 - \eta(\mu - |\chi|)] e^{i\chi\xi} d\chi \\ &= -\frac{1}{2\pi} p \frac{1}{\xi^2} - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[ \sin c(\mu\xi) - \frac{1}{2} \sin c^2 \left( \frac{\mu\xi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\sin c(x) \equiv \sin(x)/x$ .

Тогда обратное экспоненциальное преобразование Радона можно записать в форме Радона как

$$\begin{aligned}
 s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) \left\{ -\frac{1}{2\pi} p \frac{1}{(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)^2} \right. \\
 &\quad - \frac{\mu^2}{2\pi} \sin c[\mu(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)] \\
 &\quad \left. + \frac{\mu^2}{4\pi} \sin c^2 \left[ \frac{\mu(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)}{2} \right] \right\} \\
 &\quad \times e^{-\mu(-x \sin \theta + y \cos \theta)} d\xi d\theta \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\mu(x \cos \theta + y \sin \theta - \xi)]}{x \cos \theta + y \sin \theta - \xi} \\
 &\quad \times e^{-\mu(-x \sin \theta + y \cos \theta)} \left[ \frac{\partial p(\xi, \theta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\theta. \quad (26)
 \end{aligned}$$

В радиально-симметричном случае  $p(\xi, \theta) = p(\xi)$ , и, переходя в полярную систему координат (10), получим

$$\begin{aligned}
 s(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\mu(r \cos \theta - \xi)]}{r \cos \theta - \xi} e^{\mu r \sin \theta} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi d\theta \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ v.p. \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\mu(r \cos \theta - \xi)]}{r \cos \theta - \xi} e^{\mu r \sin \theta} d\theta \right] \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned}
 v.p. \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\mu(r \cos \theta - \xi)]}{r \cos \theta - \xi} e^{\mu r \sin \theta} d\theta \\
 = \frac{(-2\pi) \cos\left(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Тогда окончательно получим обратное экспоненциальное преобразование Абея в виде

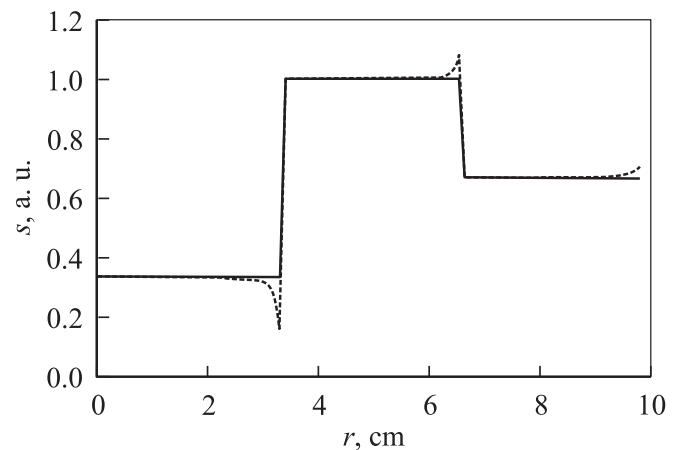
$$\begin{aligned}
 s(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\cos\left(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi) \right] \\
 &\quad \times \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{\cos\left(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (29)
 \end{aligned}$$

## Проблемы численной реализации обратного ЭПА

При численной реализации обратного экспоненциального преобразования Абея существует ряд проблем, приводящих к искажениям полученных результатов. К таким искажениям относятся прежде всего искажения, возникающие вследствие общей некорректности задачи решения интегральных уравнений второго рода. На практике это связано с неустойчивостью результатов при наличии статической погрешности правой части. Такие искажения не будут рассматриваться в данной работе, так как, с одной стороны, по этому вопросу существует обширная литература (см., например, [14]), а с другой стороны, это тема самостоятельного исследования.

Далее, существуют искажения, связанные со структурой самого объекта, например, возникающие вследствие разрывов на границах и внутри объекта (рис. 2). Эффективную коррекцию таких искажений можно осуществить, рассматривая каждое из них как аддитивную добавку, пропорциональную величине скачка в точке разрыва. При наличии незначительных статистических шумов такую корреляцию еще можно использовать, однако при достаточно больших шумах необходимо использовать общие методы регуляции некорректной задачи в комбинации с методами коррекции искажений.

Существуют также искажения, возникающие вследствие внутренних особенностей конкретной задачи. В применении к экспоненциальному преобразованию Абея — это потеря информации от глубоких областей объекта. Для обычного преобразования Абея при  $\mu = 0$  такой проблемы не возникает. График фурье-образа

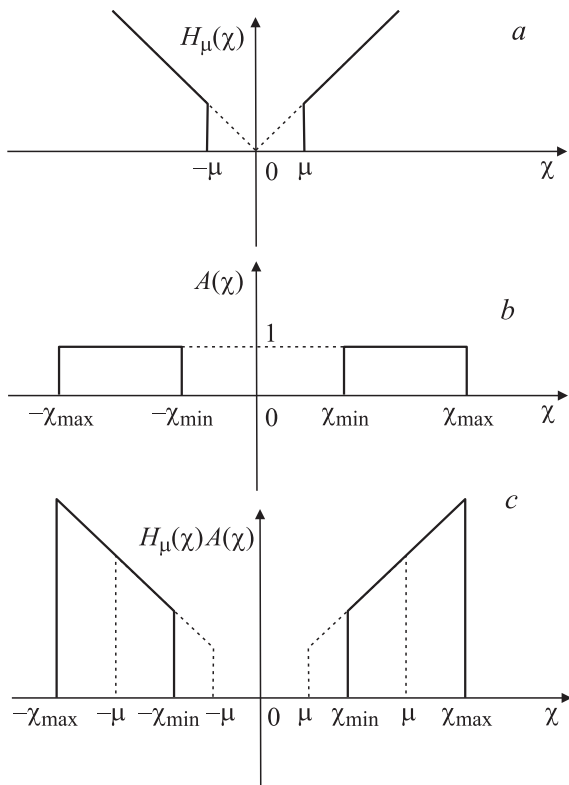


**Рис. 2.** Коррекция искажений, связанных с разрывами функции распределения источников излучения: исходная функция (сплошная линия), восстановленная функция без коррекции искажений (штриховая линия) и с коррекцией искажений (совпадает с исходной функцией).

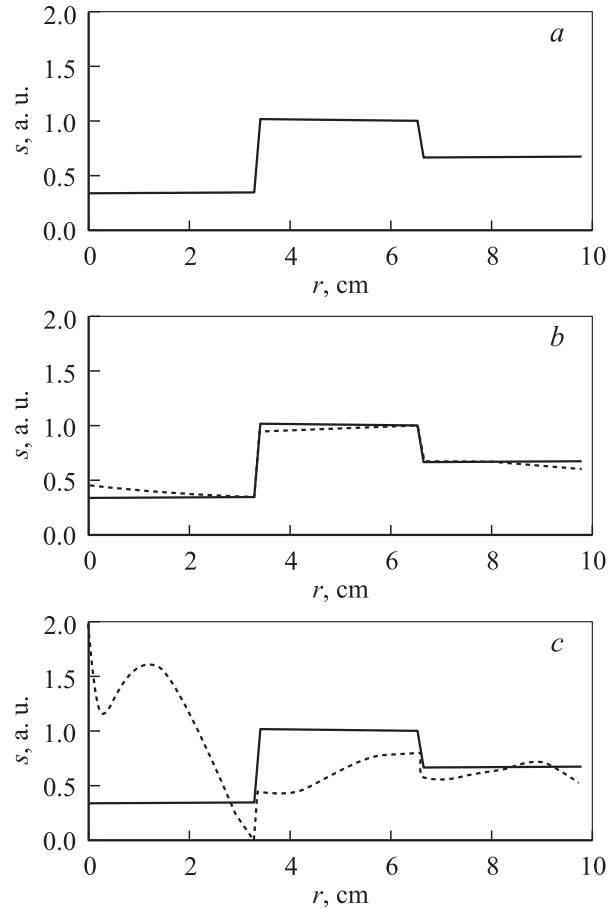
функции фильтра (25)

$$H_{\mu}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\mu}(\xi) e^{-i\chi\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\chi|\eta(|\chi| - \mu) \quad (30)$$

показан на рис. 3, *a*. При выполнении реальных вычислений функцию  $H_{\mu}(\chi)$  необходимо умножить на аподизирующую функцию  $A(\chi)$ , регуляризующую некорректную задачу нахождения обратного ЭПА. Даже если не вводить специальную аподизирующую функцию, максимальный размер дискретизируемой области  $R$  и интервал дискретизации  $\Delta r$  задают минимальную  $\chi_{\min}$  и максимальную  $\chi_{\max}$  пространственные частоты в фурье-пространстве, что фактически соответствует аподизирующей функции, показанной на рис. 3, *b*. Тогда фурье-образ функции фильтра с учетом аподизирующей функции зависит от соотношения  $\mu$  и  $\chi_{\min}$  (рис. 3, *c*). При  $\mu < \chi_{\min}$  частота обрезания низких пространственных частот будет равна  $\chi_{\min}$ , а при  $\mu > \chi_{\min}$  будет равна  $\mu$ . В последнем случае происходит потеря информации и восстановленный объект будет содержать искажения. Физически это означает, что излучение от слишком глубоких областей объекта вообще не будет зарегистрировано. Так как минимальная пространственная частота соответствует наибольшему размеру объекта, необходимо следить за правильным соотношением габаритов объекта и коэффициента ослабления излучения.



**Рис. 3.** Фурье-образ функции фильтра (*a*), аподизирующая функция (*b*), фурье-образ функции фильтра с учетом аподизирующей функции (*c*).



**Рис. 4.** Влияние коэффициента поглощения на качество восстановления функции распределения источников излучения: исходная функция (сплошная линия) и восстановленная функция (штриховая линия) при  $\mu = 0.5\chi_{\min} = 0.005\chi_{\max}$  (*a*),  $\mu = 5\chi_{\min} = 0.05\chi_{\max}$  (*b*),  $\mu = 10\chi_{\min} = 0.1\chi_{\max}$  (*c*).

Вышесказанное иллюстрирует рис. 4. Пока  $\mu < \chi_{\min}$ , исходная функция восстанавливается почти точно (рис. 4, *a*). При  $\mu > \chi_{\min}$  в восстановленной функции появляются искажения (рис. 4, *b*), масштаб которых растет с ростом доли урезания полосы пространственных частот за счет  $\mu$ . Уже при урезании порядка 10% искажения становятся недопустимо большими (рис. 4, *c*).

## Заключение

В работе рассмотрены основные свойства экспоненциального преобразования Абеля как обобщения классического преобразования Абеля. Приведен новый вывод обратного экспоненциального преобразования Абеля непосредственно из обратного экспоненциального преобразования Радона. Обсуждены проблемы численной реализации обратного экспоненциального преобразования Абеля, в том числе принципиальное отличие экспоненциального преобразования Абеля от обычного преобразования Абеля, связанное с потерей информации

об излучении, идущем от слишком глубоких областей объекта. Полученные результаты могут быть полезны при реконструкции пространственных распределений источников излучения с цилиндрической или сферической симметрией, например, при диагностике ТВЭЛ ядерных реакторов, а также других объектов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №-02-02-96000).

## Список литературы

- [1] *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 352 с.
- [2] *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
- [3] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. Пер.с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.
- [4] *Федоров Г.А., Терещенко С.А.* Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
- [5] *Радон И.* // Преобразование Радона. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. С. 134–148.
- [6] *Bellini S., Piacentini M., Cafforio C. et al.* // IEEE Tr. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1979. Vol. ASSP-27. N 3. P. 213–218.
- [7] *Tretiak O., Metz C.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. Vol. 39. N 2. P. 341–354.
- [8] *Gullberg G.T., Budinger T.F.* // IEEE Tr. on Biomedical Engineering. 1981. Vol. BME-28. N 2. P. 142–157.
- [9] Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ, 1978. 264 с.
- [10] *Clough A.V., Barrett H.H.* // J. Optical Society of America. 1983. Vol. 73. N 11. P. 1590–1595.
- [11] *Cormack A.M.* // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34. N 9. P. 2722–2727.
- [12] *Cormack A.M.* // J. Appl. Phys. 1964. Vol. 35. N 10. P. 2908–2912.
- [13] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [14] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.