

01;05

Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 20 мая 2004 г.)

Рассмотрены две возможные равновесные конфигурации линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр вихря расположен на одном из контактов. Выведены бесконечные системы уравнений, описывающие эти конфигурации. Переход к конечной системе осуществляется путем пренебрежения токами, достаточно далеко удаленными от центра. Предложена новая методика решения конечной системы уравнений, не требующая малости значений скачков фазы на всех ячейках вихря, что позволяет применять ее при любых значениях параметра пиннинга I вплоть до нуля. Рассчитаны структуры и энергии обоих равновесных состояний для линейных уединенных вихрей во всем диапазоне значений I . При $I > 0.3$ можно считать, что весь вихрь целиком уместится в квадрате 5×5 ячеек, при меньших значениях I его энергия может быть представлена как сумма энергий малого по размеру дискретного остова и квазинепрерывной внешней части. Энергия остова сопоставима с энергией наружной части, а при не слишком малых значениях I именно она вносит основной вклад в энергию вихря.

Энергия вихря с центром на контакте при всех значениях I больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки.

Введение

Одной из важнейших проблем в физике высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Исследованию вихрей посвящено значительное количество работ [1–7]. В [3,4] анализируется поведение одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте. Однако в этом рассмотрении вихрь предполагается непрерывным в пространстве распределением фазы, а его пиннинг обусловлен взаимодействием с дискретно расположенными центрами пиннинга. На самом же деле джозефсоновская среда представляет собой ячеистую структуру, что уже само по себе обуславливает пиннинг, определяемый энергией, необходимой для перемещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В [5] проведен анализ поведения вихря в линейной цепочке СКВИД. Однако в этом случае рассмотрение ведется в двумерной ситуации, т.е. магнитное поле отдельной петли учитывается лишь в магнитном потоке, пронизывающем ее саму. В трехмерном же случае вихрь представляет собой систему коаксиальных „соленидов“, поэтому магнитный поток через петлю создается не только ею самой, но и другими токовыми участками, в том числе достаточно удаленными. При этом с уменьшением критического тока контакта растет размер вихря, т.е. число петель, принимающих участие в формировании магнитного потока через центральную ячейку вихря, что компенсирует уменьшение вклада в магнитный поток от каждой петли. В работах [6,7] получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках для трехмерной упорядоченной джозефсонов-

ской среды, на основе которой проведен подробный анализ структуры возможных экранирующих, ламинарных и вихревых токовых состояний.

В [8] проведен расчет равновесных конфигураций ламинарного (плоского) вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и построены зависимости энергии пиннинга плоского вихря, а также его магнитной и джозефсоновской энергии от величины критического тока джозефсоновского контакта. Целью настоящей работы является выполнение аналогичной программы для случая линейного вихря в трехмерной джозефсоновской среде. Эта задача представляет большой практический интерес, так как в большинстве ВТСП приходится иметь дело именно с такими вихрями.

Отметим также, что в настоящей работе предложена новая методика расчета структуры линейных вихрей, которая в отличие от использованной в [6] не предполагает малости значений скачков фазы на центральных ячейках вихря, что позволяет расширить диапазон ее применимости в область малых значений параметра пиннинга.

Расчет структуры и энергии линейного вихря

Рассмотрение будем проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом a , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_c . Токвое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во

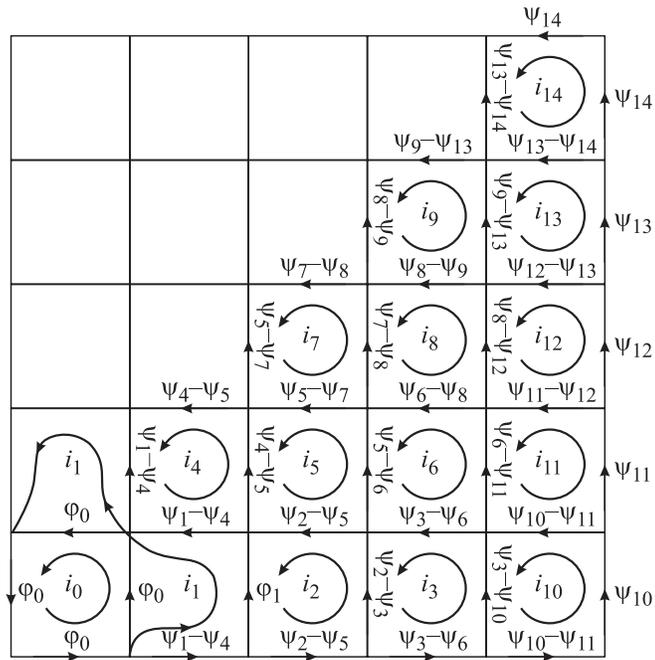


Рис. 1. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации „а“ вихря в плоскости, перпендикулярной его оси. i_m и ψ_m — контурный ток в m -м контуре и соответствующий „контурный“ скачок фазы. Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через ψ_m . Скачки φ_0 и φ_1 не предполагаются малыми. Ячейка с i_0 содержит 1 квант потока Φ_0 , все остальные — 0 квантов.

всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии a друг от друга, токи распределены идентично. Такая модель, являясь в достаточной степени простой, позволяет сделать определенные выводы о структуре вихрей, их пиннинге и динамике. Эти результаты качественно сохраняются и в более сложных моделях.

Рассмотрим возможность существования вдали от границы образца изолированного самоподдерживающегося линейного вихря при отсутствии внешнего магнитного поля. Из соображений симметрии следует, что равновесные конфигурации могут быть трех видов: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр вихря находится на одном из контактов, в) центр вихря находится на пересечении проводов. Однако подробный анализ показывает, что последний вариант решения не имеет.

Из остальных двух равновесных конфигураций та, которая имеет меньшую энергию, является устойчивой. О характере устойчивости состояния с большей энергией без дополнительного исследования ничего определенного сказать нельзя. Подробнее этот аспект освещен в работе [9], в которой исследуется устойчивость равновесных состояний плоского вихря в трехмерной джозефсоновской среде. Показано, что состояние с большей энергией не обязательно является неустойчивым. Корректный анализ устойчивости должен основываться

на исследовании квадратичной формы, описывающей энергию токовой конфигурации. При малых значениях параметра пиннинга состояние плоского вихря с большей энергией оказывается квазиустойчивым.

Поскольку вопрос устойчивости и в случае линейных вихрей требует дополнительного исследования, то в тексте настоящей работы не будут необоснованно использоваться термины „устойчивый“ и „неустойчивый“ вихрь, как это делалось в работе [6]. Две основные конфигурации вихря будут обозначаться индексами a и b , а не s (stable) и u (unstable).

Рассмотрим подробно обе равновесные конфигурации линейного вихря.

а) Центр вихря в центре ячейки — конфигурация a . Сечение части такого вихря плоскостью, перпендикулярной его оси, показано на рис. 1. Вихрь обладает осевой симметрией, а также четырьмя плоскостями симметрии (на рис. 1 проходящие через центр левой нижней ячейки вертикальная, горизонтальная и две диагональные). На этой основе можно построить все сечение вихря. В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \quad (1)$$

где $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ — сумма скачков фазы на джозефсоновских элементах m -й ячейки; Φ_m — полный магнитный поток через m -ю ячейку; Φ_0 — квант магнитного потока; K_m — целое число, равное 1 для центральной ячейки вихря (с током i_0) и нулю для всех остальных.

Величины джозефсоновских токов $J_k = J_c \sin \varphi_k$ по мере удаления от центра вихря убывают, причем скорость убывания возрастает с ростом величины критического тока J_c . Мы будем рассматривать лишь такие конфигурации, в которых $\varphi_k \ll 1$, т.е. $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$, для всех φ_k , кроме самых больших по величине скачков фазы φ_0 и φ_1 в ближайших к центру ячейках (рис. 1). Справедливость этого предположения будет подтверждена результатом (отказ от малости значений φ_0 и φ_1 отличает предлагаемую методику от использованной в [6] и позволяет существенно расширить диапазон ее применимости). В этом случае, чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“ ячеек. Пусть в каждой ячейке с номером m ($m \neq 0$) протекает контурный ток $i_m = J_c \psi_m$, где ψ_m — „контурный“ скачок фазы. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме φ_0 и φ_1) определяются как разности соответствующих „контурных“ значений (рис. 1). Магнитный поток через m -ю ячейку можно записать в виде [6]

$$\Phi_m = \mu_0 S/a \left(i_m + b \sum_k J_k^{(m)} \right) \quad (m \neq 0), \quad (2a)$$

$$\Phi_m|_{m=0} = \mu_0 S/a (i_0 + i_1 + 4bi_0) \quad (m = 0), \quad (2b)$$

где b — коэффициент неоднородности поля [6] из-за дискретности токового распределения вдоль оси вихря,

$\sum_k J_k^{(m)}$ — алгебраическая сумма токов контактов m -й ячейки, S — площадь ячейки.

При толщине провода $\delta \ll a$ параметр b определяется выражением

$$b = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi \delta}{a} \right).$$

Для простоты далее будем рассматривать случай $Ib \ll 1$, где I — параметр пиннинга, определяемый выражением (4). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что длинными джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки не обязана быть квадратной, в частности, она может быть образована нитями круглого сечения.

Подставляя (2) в (1) и полагая $i_0 = J_c \sin \varphi_0$, а контурные токи $i_m = J_c \psi_m$ при $m \neq 0$ и 1, запишем (при $Ib \ll 1$) систему уравнений квантования флюксонида (m — номер ячейки на рис. 1)

$$\begin{aligned} I \sin \varphi_0 + 4\varphi_0 + I\psi_1 &= 2\pi & (m = 0), \\ (I + 2)\psi_1 - 2\psi_4 + \varphi_1 - \varphi_0 &= 0 & (m = 1), \\ (I + 4)\psi_4 - 2\psi_1 - 2\psi_5 &= 0 & (m = 4), \\ (I + 3)\psi_2 - \varphi_1 - 2\psi_5 - \psi_3 &= 0 & (m = 2), \\ (I + 4)\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7 &= 0 & (m = 5), \\ (I + 4)\psi_7 - 2\psi_5 - 2\psi_8 &= 0 \text{ и т.д.} & (m = 7), \\ \sin \varphi_1 &= \psi_1 - \psi_2 & (3) \end{aligned}$$

где

$$I \equiv 2\pi\mu_0 J_c a / \Phi_0. \quad (4)$$

Последнее уравнение в (3) получено из дополнительного условия $J_c \sin \varphi_1 = i_1 - i_2$ для тока в контакте с φ_1 (φ_1 мы не считаем малым).

Джозефсоновская E_J^a и магнитная E_H^a энергии единицы длины вихря такой конфигурации определяются выражениями

$$E_J^a = \frac{E_c}{a} \sum_k (1 - \cos \varphi_k) = E_0 I \sum_k (1 - \cos \varphi_k), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_H^a &= \sum_m \frac{B_m^2}{2\mu_0} V_m = \frac{I^2}{2} E_0 \left[(\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1 + \psi_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4(\sin \varphi_1 + \psi_2)^2 + 4(8) \sum_{m \neq 0,1} \psi_m^2 \right], \quad (6) \end{aligned}$$

где $E_c = \Phi_0 J_c / 2\pi$ — энергия джозефсоновского контакта, $B_m^2 / 2\mu_0$ — плотность магнитной энергии в m -й ячейке, V_m — соответствующий объем, $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi\mu_0 a^2$ — нормировочная постоянная.

Суммирование по k ведется по всем джозефсоновским контактам, а по m — по всем ячейкам с учетом симметрии вихря (что приводит к коэффициенту 4 для ячеек, лежащих на центральных столбце и строке, и к коэффициенту 8 для всех остальных).

Можно показать, что система (3) может быть получена из условий экстремума для суммарной энергии вихря (суммы (5) и (6)). Иначе говоря, решение системы (3) соответствует максимуму, минимуму или седловой точке по энергии.

Переход от бесконечной системы (3) к конечной может быть осуществлен пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра (рис. 1). Размер квадрата, необходимого для расчета, определяется условием малости изменений величин скачков фазы на близких к центру контактах при увеличении размера квадрата.

Решение системы производилось путем выражения значений всех ψ_m через φ_0 и φ_1 из линейных уравнений системы (3) и подстановкой их в первое и последнее уравнения системы (3). В результате получаем систему из двух нелинейных уравнений

$$\varphi_1 = (2\pi - I \sin \varphi_0 - A(I)\varphi_0) / B(I), \quad (7a)$$

$$\varphi_0 = (\sin \varphi_1 - C(I)\varphi_1) / D(I), \quad (7b)$$

где A, B, C и D — многочлены от I .

Кривые (7) имеют одну точку пересечения, соответствующие которой значения φ_0 и φ_1 находятся численным методом. Зная φ_0 и φ_1 , затем находим и все ψ_m .

На рис. 2 приведено рассчитанное распределение скачка фазы по контактам вихря для $I = 10^{-4}$. При расчетах использовались квадраты 5×5 (7 уравнений) и

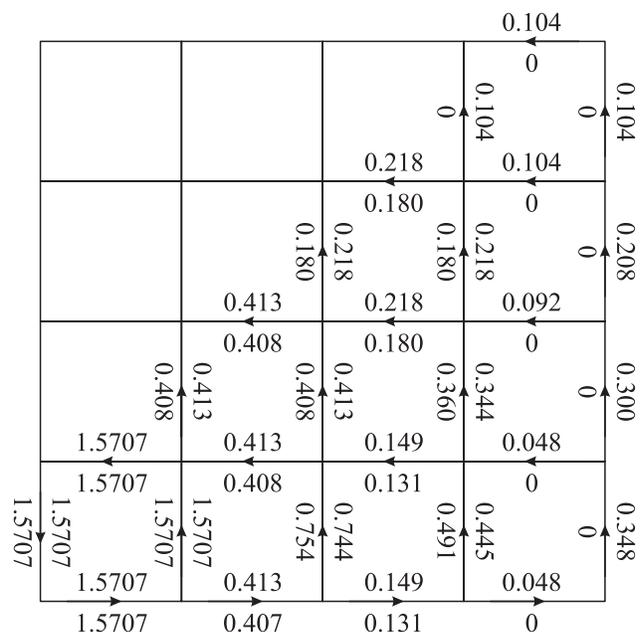


Рис. 2. Распределение скачков фазы в конфигурации „а“ вихря при $I = 10^{-4}$. Верхние числа соответствуют расчету при размерах квадрата 7×7 , а нижние — 5×5 ячеек.

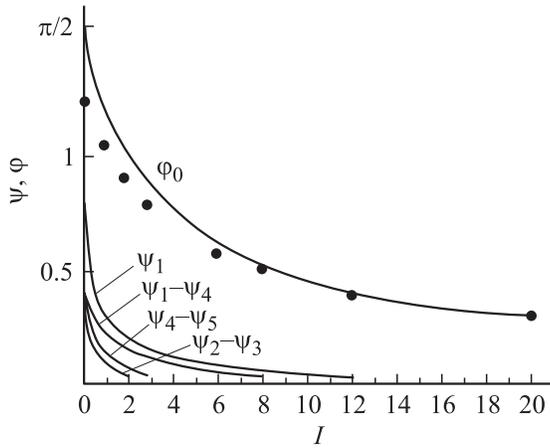


Рис. 3. Результаты расчета скачков фазы для нескольких ближайших к центру вихря контактов с максимальными значениями токов для конфигурации „а“. Сплошные кривые — точные решения системы (3), значки — результаты расчета φ_0 и φ_1 по асимптотическим формулам (8).

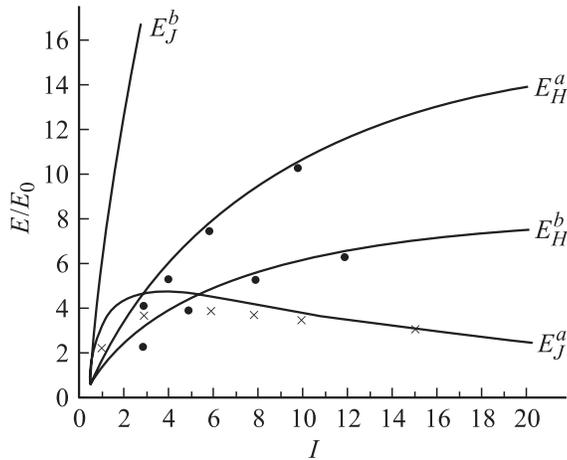


Рис. 4. Графики зависимостей от I джозефсоновских и магнитных энергий конфигураций „а“ и „б“. Крестики — результаты расчета E_J^a , точки — E_H^a и E_H^b по асимптотическим формулам (9) и (27).

7×7 (11 уравнений), т. е. по два и по три ряда от центра в каждую сторону. Видно, что увеличение размеров квадрата с 5×5 (нижние числа) до 7×7 (верхние числа) не ведет к существенному изменению значений φ_k на близких к центру контактах. При переходе от 7×7 к 9×9 изменения были бы еще меньше. Это позволяет сделать вывод, что при сколь угодно малых значениях I для расчета структуры центральной части вихря можно ограничиться квадратом 7×7 .

Полученные результаты показывают, что в отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием I стремится к бесконечности [8], линейный вихрь при любых значениях I имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит и токи в контактах, намного больше, чем в остальной области

вихря. Можно сказать, что плоский вихрь с убыванием I расплывается, а линейный всегда имеет в центре „пупырышек“ размером в несколько ячеек. Речь идет именно о структуре вихря, величины же токов убывают с уменьшением J_c , если именно ему обязан I своим убыванием. Если же I уменьшается из-за убывания периода решетки a , то остов вихря уменьшается в диаметре, но значения токов не изменяются, а энергия вихря даже растет в соответствии с (5).

Обращает на себя внимание также тот факт, что в ячейках, расположенных на главных диагоналях, все токи одинаковы: $\psi_1 - \psi_4 = \psi_4 - \psi_5$, $\psi_5 - \psi_7 = \psi_7 - \psi_8$ и т. д.

На рис. 3 приведены графики рассчитанных зависимостей скачка фазы для нескольких ближайших к центру вихря контактов с максимальными значениями токов (рис. 1) от величины I . Из рис. 2 и 3 видно, что условие справедливости расчета ($\sin k \approx \varphi_k$ при $k \neq 0$ и 1) выполнено при любых значениях I вплоть до $I = 0$.

Что касается расчета энергии вихря, то вычисления по формулам (5) и (6) дадут правильный результат только при таких значениях I , при которых можно считать, что весь вихрь уместится в рассматриваемом квадрате. Характерный размер вихря равен a/\sqrt{I} , поэтому при квадрате 7×7 формулы (5) и (6) приемлемы при $I > 0.25$, что подтверждается незначительностью изменений величин энергий для этих значений I при изменении размеров квадрата с 5×5 до 7×7 . Отметим, что сам факт незначительности этих изменений не может являться гарантией правильности вычисленных значений энергии, поскольку увеличение размеров квадрата ведет к добавлению к общей энергии вклада от еще одного наружного „кольца“ ячеек, а малость этой добавки не гарантирует малости суммы вкладов таких колец, простирающихся до бесконечности. При малых значениях I существенный вклад в энергию вихря будут вносить его внешние области. На рис. 4 представлены зависимости от I величин джозефсоновской и магнитной энергий E_J^a и E_H^a при $I > 0.25$.

При больших значениях $I (\gg 2\pi)$ из системы (3) следует, что $\varphi_0, \varphi_1 \ll 1$. Тогда из (3), (5) и (6) получим

$$\tilde{\varphi}_0^a = \frac{2\pi}{I+5}; \quad \tilde{\varphi}_1^a = \frac{\tilde{\varphi}_0^a}{I+3}, \quad (8)$$

$$\tilde{E}_J^a = E_0 \left(\frac{4\pi}{I+5} \right)^2 I, \quad \tilde{E}_H^a = 2E_0 \left[\frac{\pi I(I+3)}{(I+2)(I+5)} \right]^2. \quad (9)$$

На рис. 3 и 4 отмечены асимптотические значения $\tilde{\varphi}_0^a$, \tilde{E}_J^a и \tilde{E}_H^a согласно (8) и (9).

При малых значениях I предложенный подход не позволяет прямо рассчитать энергию вихря, поскольку заметная ее часть находится вне рассматриваемого квадрата. Предположим, что в наружных областях зависимость φ от координат можно считать квазинепрерывной. В этих областях магнитное поле H описывается уравнением [7]

$$\mathbf{H} + \frac{a^2}{I} \text{rot rot } \mathbf{H} = \mathbf{A}\delta(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Таблица 1.

I	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0.1
E_J/E_0I из (5)	8.63	8.60	8.37	6.75
E_H/E_0I^2 из (6)	13.56	13.50	12.8	8.32
$(E_J + E_H)/E_0I$	8.63	8.60	8.50	7.58
E/E_0I из (14)	10.1	6.5	2.9	—

Решение уравнения (10) в области $a \ll r \ll a/\sqrt{I}$ имеет вид [10] (в СИ)

$$H = \frac{\Phi_0 I}{2\pi\mu_0 a^2} \ln \frac{a}{r\sqrt{I}}, \quad |\text{rot } H| = \frac{\Phi_0 I}{2\pi\mu_0 a^2} \frac{1}{r}. \quad (11)$$

Полная энергия такого вихря в пренебрежении его центральной частью равна [10]

$$E = E_0 \frac{\pi}{2} I \ln \frac{1}{I}. \quad (12)$$

Формула (12) дает значение энергии вихря без учета его центральной части — остова. Представляет интерес оценка добавки, определяемой остовом. В случае абрикосовских вихрей в непрерывной среде учет энергии остова приводит к выражению [10]

$$E = E_0 \frac{\pi}{2} I \left(\ln \frac{1}{I} + 0.1 \right). \quad (13)$$

В рассматриваемом же случае дискретной среды расчет энергии остова вихря может быть проведен на базе примененной выше методики. Будем считать, что непрерывный подход справедлив при $r > 4a$, т.е. за пределами квадрата 7×7 . Тогда вычисление энергии внешней части вместо (12) дает

$$E = E_0 \frac{\pi}{2} I \ln \frac{1}{16I}. \quad (14)$$

В табл. 1 приведены выражения в единицах IE_0 значения энергии, вычисленные по формуле (14), а также магнитная (в единицах $I^2 E_0$), джозефсоновская и суммарная энергии квадрата 7×7 (формулы (5) и (6)). Сравнение этих данных показывает, что в отличие от абрикосовских вихрей в непрерывной среде, где при малых значениях I можно пренебречь энергией остова, в дискретной среде энергия остова сопоставима с энергией наружной части, а при не слишком малых значениях I именно она вносит основной вклад в энергию вихря.

Следует отметить также тот факт, что при малых I джозефсоновская энергия остова вихря, пропорциональная I , существенно превосходит магнитную, пропорциональную I^2 .

Выражение для полной энергии вихря с учетом остова приближенно запишется в виде

$$E = E_0 I \left(\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{16I} + 8.63 \right) = E_0 \frac{\pi}{2} I \left(\ln \frac{1}{I} + 2.77 \right). \quad (15)$$

Если предположить, что непрерывный подход справедлив и при меньших расстояниях от центра, то для квадрата 5×5 получим формулу, аналогичную (15), но с постоянной 2.70, для квадрата 3×3 — с постоянной 2.68, а для квадрата 1×1 — с постоянной 2.55. Схожесть значений подтверждает правильность предложенного приема.

Формула (15) приемлема при малых значениях I , пока суммарная энергия в табл. 1 остается примерно постоянной. При $I = 0.1$ это уже не так. Таким образом, для расчета энергии вихря при очень малых I мы имеем выражение (15), а при $I > 0.25$ справедливы результаты расчета по (5) и (6). В интервале между этими значениями I можно вместо (12) воспользоваться более точным выражением для энергии вихря в непрерывной среде [10]

$$E = E_0 \pi I K_0(4\sqrt{I}), \quad (16)$$

где K_0 — функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента.

В (16) предполагается, что непрерывный подход справедлив при $r > 4a$. Тогда выражение для общей энергии вихря с учетом остова приближенно запишется в виде

$$E = E_0 I \pi \left(K_0(4\sqrt{I}) + \varepsilon \right), \quad (17)$$

где $\varepsilon = E_\Sigma/\pi I E_0$, E_Σ — сумма энергий, рассчитанных по (5) и (6).

При $I = 0.25$ имеем $\varepsilon = 2.1$, $K_0(2) \approx 0.1$, при $I = 0.1$ — $\varepsilon = 2.4$, $K_0(1.265) \approx 0.3$. Возможность пренебрежения первым членом в скобках в (17) по сравнению со вторым количественно подтверждает приведенное выше предположение о том, что вихрь можно считать полностью находящимся в квадрате 7×7 при $I > 0.25$. Но с определенной погрешностью этот результат можно отнести и к меньшим (но не к очень малым) значениям I .

б) Центр вихря на контакте — конфигурация b . Такой вихрь имеет две плоскости симметрии (на рис. 5 нижняя горизонтальная и вертикальная посредине левого столбца). На этой основе можно построить все сечения вихря. Из соображений симметрии следует, что на центральном контакте скачок фазы равен π , а на всех остальных контактах того же ряда — нулю (рис. 5). В результате расчета мы увидим, что при всех значениях I можно считать малыми (так что $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$) скачки фаз на всех контактах, кроме φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_4 . Как и в предыдущем разделе, введем контурные токи $i_m = J_c \psi_m$ при $m \neq 0$. Это позволяет автоматически удовлетворить условия баланса токов на всех узлах, кроме верхнего правого узла ячейки с $m = 0$. Условие баланса на этом узле имеет вид

$$\psi_3 - \varphi_1 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 0. \quad (18)$$

Аналогично (3) получим при $b = 0$ следующую систему уравнений квантования флюксоида в ячейках (m —

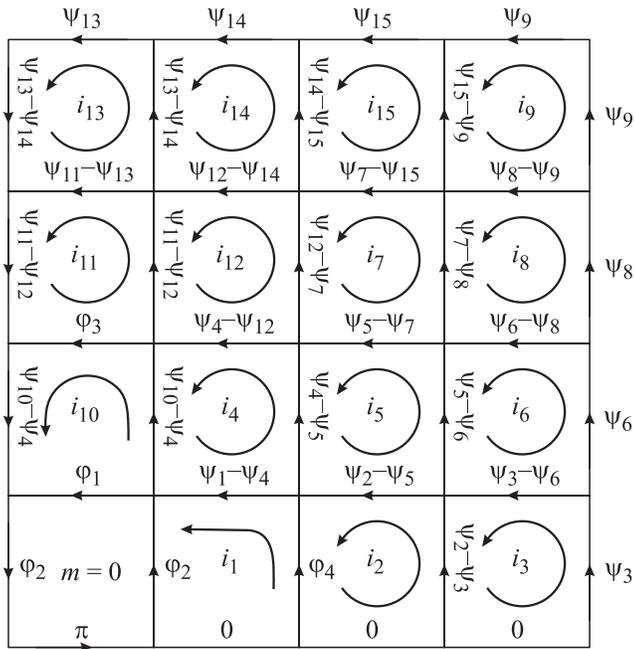


Рис. 5. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации „b“. Скачки φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_4 не предполагаются малыми. Ячейка с $m = 0$ содержит 1 квант потока Φ_0 , все остальные — 0 квантов.

номер ячейки на рис. 5)

$$I \sin \varphi_2 = \pi - 2\varphi_2 - \varphi_1 - I\psi_1 \quad (m = 0),$$

$$(I + 1)\psi_1 - \psi_4 + \varphi_4 - \varphi_2 = 0 \quad (m = 1),$$

$$(I + 2)\psi_{10} - 2\psi_4 + \varphi_3 - \varphi_1 = 0 \quad (m = 10),$$

$$(I + 4)\psi_4 - \psi_1 - \psi_5 - \psi_{10} - \psi_{12} = 0 \quad (m = 4) \text{ и т.д. (19)}$$

К этим уравнениям надо добавить дополнительные условия $J_c \sin \varphi_3 = i_{10} - i_{11}$ и $J_c \sin \varphi_4 = i_1 - i_2$ для токов в контактах с φ_3 и φ_4 (их мы не считаем малыми)

$$\sin \varphi_3 = \psi_{10} - \psi_{11}, \quad (20)$$

$$\sin \varphi_4 = \psi_1 - \psi_2. \quad (21)$$

Переход от бесконечной системы уравнений к конечной проводился так же, как и в рассмотренном ранее случае, пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра.

Система уравнений (18)–(21) отличается от системы (3) тем, что она не может быть сведена к системе двух нелинейных уравнений, которую можно решить численно. Поэтому в данном случае воспользуемся методом последовательных приближений. Для этого представим φ_3 , φ_4 и их синусы в виде $\varphi_3 = \varphi_3^0 + \delta_3$, $\varphi_4 = \varphi_4^0 + \delta_4$, $\sin \varphi_3 = \sin \varphi_3^0 + \cos \varphi_3^0 \cdot \delta_3$, $\sin \varphi_4 = \sin \varphi_4^0 + \cos \varphi_4^0 \cdot \delta_4$, где φ_3^0 и φ_4^0 считаем известными величинами (на первой итерации равными нулю), а δ_3 и δ_4 являются новыми неизвестными (вместо φ_3 и φ_4), относительно которых система линейна.

Выразим значения всех ψ_m , а также δ_3 и δ_4 через φ_1 и φ_2 из линейных уравнений системы — это уравнения (20), (21) и все (19), кроме первого, и, подставив их в первое уравнение системы (19) и в уравнение (18), получим систему нелинейных уравнений вида

$$\varphi_2 = [\pi - I \sin \varphi_1 - E(I) \cdot \varphi_1 - D(I)]/F(I), \quad (22)$$

$$\varphi_1 = [\pi - I \sin \varphi_2 - G(I) \cdot \varphi_2 - H(I)]/M(I), \quad (23)$$

где E , D , F , G , H и M — дробно-рациональные функции от I .

Кривые (22) и (23) имеют одну точку пересечения, соответствующие которой значения φ_2 и φ_1 находятся численным методом. Зная φ_2 и φ_1 , затем находим δ_3 , δ_4 и все ψ_m . Для следующей итерации возьмем новые значения φ_3^0 и φ_4^0 , добавив к их предыдущим значениям полученные величины δ_3 и δ_4 , и снова решим систему. Итерационная процедура сходится, т.е. каждая следующая итерация дает на порядки меньшие значения δ_3 и δ_4 . Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов.

На рис. 6 приведены рассчитанные распределения скачков фазы по контактам вихря для $I = 10^{-4}$. При расчетах использовался прямоугольник 6×5 (12 уравнений), т.е. по две ячейки в каждую сторону от двух центральных ячеек. На рис. 7 приведены рассчитанные зависимости скачка фазы для нескольких ближайших к центру вихря контактов с максимальными значениями токов (рис. 5) от величины I . Из рис. 6 и 7 видно, что условие справедливости расчета ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ при $k \neq 1, 2, 3, 4$) выполнено при любых значениях I , вплоть до $I = 0$.

Что касается расчета энергии вихря в конфигурации b , то здесь могут быть повторены все рассуждения, проведенные выше при вычислении энергии вихря в конфигурации a . Отличие заключается в том, что здесь мы рассматриваем прямоугольник 6×5 , т.е. в симметричном варианте квадрат 5×5 ячеек. Поэтому формулы

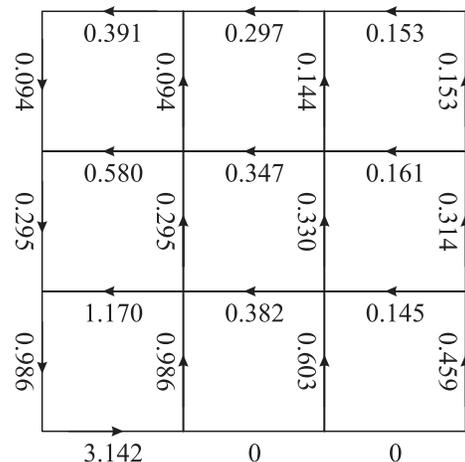


Рис. 6. Распределение скачков фазы в конфигурации „b“ вихря при $I = 10^{-4}$.

расчета энергий (24) и (25) дают полную энергию вихря (можно пренебречь энергией его внешней части) при $I > 0.3$

$$E_J^b = E_0 I \left[2 + \sum_k (1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (24)$$

$$E_H^b = I^2 E_0 \left[(\sin \varphi_2 + \psi_1)^2 + \sum_{m \neq 0} \psi_m^2 \right]. \quad (25)$$

Для подтверждения этого факта воспользуемся аналогом формулы (17), где вместо $K_0(4\sqrt{I})$ стоит $K_0(3\sqrt{I})$, поскольку внешняя часть вихря соответствует значению $r > 3a$,

$$E = E_0 I \pi \left(K_0(3\sqrt{I}) + \varepsilon \right). \quad (26)$$

Здесь $\varepsilon = E_\Sigma / \pi I E_0$, E_Σ — сумма энергий, рассчитанных по (24) и (25) для конфигурации рис. 5 за вычетом верхнего ряда ячеек (чтобы перейти к квадрату 5×5). При $I = 0.25$ имеем $\varepsilon = 2.15$, $K_0(1.5) \approx 0.2$, при $I = 0.3$ — $\varepsilon = 2.08$, $K_0(1.65) \approx 0.13$.

На рис. 4 представлены зависимости E_J^b и E_H^b от I , рассчитанные по (24) и (25) при $I > 0.3$. Асимптотические значения скачков фаз в центральной ячейке и энергий для конфигурации b при $I \gg 2\pi$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^b \approx \tilde{\varphi}_2^b \approx \frac{\pi}{I+3}, \quad \tilde{E}_J^b \approx E_0 \left[4I + \frac{6\pi^2 I}{(I+3)^2} \right], \\ \tilde{E}_H^b \approx E_0 \left(\frac{\pi I}{I+3} \right)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 7 и 4 отмечены значения, вычисленные по формулам (27).

В табл. 2 приведены значения магнитной энергии в единицах $I^2 E_0$ (формула (25)), а также (в единицах $I E_0$)

Таблица 2.

I	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0.1
$E_J/E_0 I$ из (24)	8.14	8.12	8.06	6.85
$E_H/E_0 I^2$ из (25)	8.48	8.45	7.98	6.01
$(E_J + E_H)/E_0 I$ (6×5)	8.14	8.13	8.06	7.45
$(E_J + E_H)/E_0 I$ (5×5)	7.90	7.89	7.76	6.72

джозефсоновской (формула (24)) и суммарной энергии прямоугольника 6×5 , а также суммарной энергии квадрата 5×5 (отброшен верхний ряд ячеек).

При малых значениях I выражение для полной энергии вихря с учетом остова приближенно запишется в виде

$$E = E_0 I \left(\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{9I} + 7.90 \right) = E_0 \frac{\pi}{2} I \left(\ln \frac{1}{I} + 2.81 \right). \quad (28)$$

Таким образом, энергия остова, а следовательно, и полная энергия вихря в конфигурации b незначительно превосходят аналогичное значение для конфигурации a . Такое же соотношение имеет место и при немалых значениях I . Однако из этого факта нельзя сделать вывод о неустойчивости конфигурации b и ее обязательном переходе в конфигурацию a . Как уже говорилось ранее, конфигурация с наименьшей возможной энергией всегда устойчива, устойчивость же конфигурации с большей энергией надо исследовать специально. Обсуждение этого вопроса в рамках анализа устойчивости плоских вихрей можно найти в [9].

Зная энергию E вихря, можно найти критическое значение H_{c1} внешнего магнитного поля, соответствующее началу возникновения вихрей. Термодинамический потенциал Гиббса единицы объема образца, помещенного во внешнее поле H_e , равен

$$G = NE - BH_e/2 = 0.5B(H_{c1} - H_e), \quad (29)$$

где N — число вихрей на 1 м^2 , т.е. $B = \Phi/S = N\Phi_0$,

$$H_{c1} = 2E/\Phi_0. \quad (30)$$

При $H_e < H_{c1}$ потенциал G растет с ростом B , т.е. G минимален при $B = 0$ — полный эффект Мейсснера. При $H_e > H_{c1}$ с ростом B значение G убывает, т.е. становится выгодным возникновение вихрей такого типа.

Заключение

Рассмотрены две возможные равновесные конфигурации линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр вихря находится на одном из контактов.

Выведены бесконечные системы уравнений, описывающие эти конфигурации. Переход к конечной системе

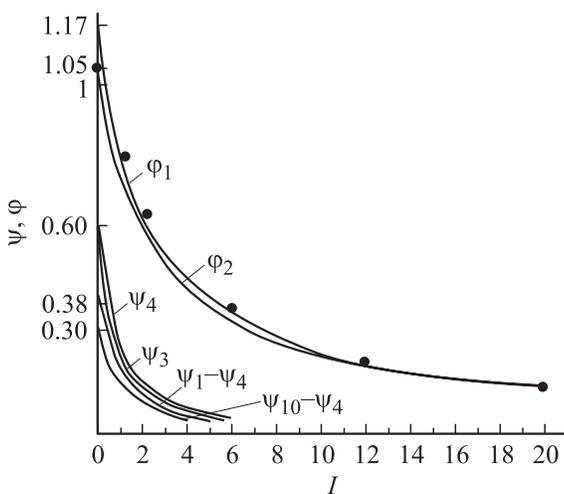


Рис. 7. Результаты расчета скачков фазы для нескольких контактов с максимальными значениями токов для конфигурации „b“. Точками отмечены результаты расчета φ_1 и φ_2 по асимптотическим формулам (27).

осуществляется путем пренебрежения токами, достаточно далеко удаленными от центра. Размер квадрата, необходимого для такого расчета, определяется условием малых изменений скачков фазы на ячейках, близких к центру вихря, при увеличении размеров квадрата.

Предложена новая методика решения конечной системы уравнений, не требующая в отличие от использовавшейся ранее [6] малости значений скачков фазы на всех ячейках вихря, что позволяет применять ее при любых значениях параметра пиннинга I вплоть до нуля. Для одной из конфигураций немалых по величине скачков фазы оказалось два, а для другой — четыре, что потребовало применения при расчете специальной итерационной процедуры.

Рассчитаны структуры и энергии обоих равновесных состояний для линейных уединенных вихрей во всем диапазоне значений I . В отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием I стремится к бесконечности, линейный вихрь при любых значениях I имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит, и токи в контактах намного больше, чем в остальной области вихря. При $I > 0.3$ можно считать, что весь вихрь целиком уместается в квадрате 5×5 , при меньших значениях I его энергия может быть представлена как сумма энергий геометрически малого по размеру дискретного остова и квазинепрерывной внешней части. Однако в отличие от абрикосовских вихрей в непрерывной среде, где при малых значениях I можно пренебречь энергией остова, в дискретной среде энергия остова сопоставима с энергией наружной части, а при не слишком малых значениях I именно она вносит основной вклад в энергию вихря.

Энергия вихря с центром на контакте при всех значениях I больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки.

Список литературы

- [1] Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R. // *Physica C*. 1989. Vol. 158. P. 69.
- [2] Rzechowski M.S., Benz S.P., Tinkham M., Lobb C.J. // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 42. P. 2041.
- [3] Kivshar Y.S., Malomed B.A. // *Rev. Mod. Phys.* 1989. Vol. 61. P. 763.
- [4] Брыксин В.В., Дороговцев С.Н. // *ЖЭТФ*. 1992. Т. 102. С. 1025.
- [5] Parodi F., Vaccarone R. // *Physica C*. 1991. Vol. 173. P. 56.
- [6] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469.
- [7] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795.
- [8] Зеликман М.А. // *ЖТФ*. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 28.
- [9] Зеликман М.А. // *ЖТФ*. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 55–62.
- [10] Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.