01;07

Прохождение импульсов через границу раздела линейной и резонансной сред

© С.Ш. Таджимуратов

Физико-технический институт АН Республики Узбекистан,
700084 Ташкент, Республика Узбекистан
e-mail: tadjimuratov@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 1 декабря 2003 г.)

Рассмотрена задача о перечении оптическим импульсом границы раздела между линейной и резонансной средами. Получены зависимости параметров прошедших и отраженных волн от параметров падающей волны. Вычислены амплитуда и скорость прошедшей волны, когда падающая волна имеет солитонную форму.

1. Известно, что задача вычисления параметров отраженных и прошедших волн через границу раздела двух сред решается в общем виде только в случае, когда среды являются линейными. В случае же, когда одна или обе среды являются нелинейными, необходимо каждый конкретный случай нелинейности рассматривать отдельно (см., например, [1]).

Основной трудностью для решения задачи в общем виде является различие функциональных форм волн для разных сред, а также сложная зависимость поляризации среды от поля. В результате граничные условия не дают простых соотношений для определения параметров волн. Однако если уравнение, описывающее эволюции волны в нелинейной среде, интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), то в ряде случаев появляется возможность обойти эти трудности. Так, в работе [2] задача прохождения импульса через резонансную пленку, разделяющую две линейные среды, решена с применением МОЗР. Это достигалось введением дополнительного фиктивного поля с последующим приведением уравнений к интегрируемому виду. В работах [3,4] рассматривалась задача, когда обе среды являются нелинейными. Авторы работ [3,4] вычислили переходное излучение солитона в предположении, что параметры сред близки. Использование линейного подхода при рассмотрении приграничной динамики волн было предложено в работе [5]. Действительно, в приграничном слое из-за малости расстояний можно считать, что нелинейные эффекты не успевают развиться и изменение параметров волны можно вычислить в линейном приближении.

В данной работе рассматривается падение импульса из линейной среды на плоскую границу с резонансной средой, состоящей из двухуровневых атомов. Известно [6], что такая среда описывается системой уравнений, интегрируемой МОЗР. С помощью приближения плавных огибающих получено соотношение для параметров электромагнитных волн. При этом из-за сложной зависимости поляризации среды от поля вместо простого алгебраического получается функциональное уравнение. Для определения параметров прошедшей и отраженной волн на границе предложена самосогласованная процедура с привлечением соотношений метода обратной задачи.

2. Для простоты рассмотрим случай, когда на границу раздела нормально падает плоская волна с линейной поляризацией. Координатную систему выберем таким образом, чтобы плоскость yOz совпадала с границей раздела, ось y была параллельна электрическому вектору волны $\mathbf{E} = (0, E, 0)$, а ось x была направлена в сторону резонансной среды. При этом магнитное поле будет направлено вдоль оси z, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$.

При этих предположениях из уравнений Максвелла получим граничные условия для электрических и магнитных составляющих волн в первой и второй средах

$$E_1(x = 0) = E_2(x = 0),$$

$$H_1(x = 0) - H_2(x = 0) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\tilde{P}_0$ — поверхностная поляризация на границе резонансной среды, c – скорость света в вакууме.

Волны в линейной и резонансной средах и поляризацию нелинейной среды представим в виде

$$E_1 = \frac{1}{2}\Big[E_0(x, t) \exp\big[i(k_1 x - \omega t)\big] + E_r(x, t) \exp\big[-i(k_1 x + \omega t)\big] + \text{c.c.}\Big],$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\Big[E_t(x, t) \exp\big[i(k_2 x - \omega t)\big] + \text{c.c.}\Big],$$

$$\tilde{P}_0 = \frac{1}{2}\Big[P_0(x, t) \exp\big[i(k_2 x - \omega t)\big] + \text{c.c.}\Big]. \qquad (2)$$

Здесь E_0, E_r, E_t и P_0 — плавные огибающие падающей, отраженной и прошедшей волн и поляризации соответственно; ω — частота; k_1, k_2 — волновые числа в линейной и резонансной средах. Для плавных огибающих волн и поляризации, исключая магнитное поле, из уравнений (1) получим

$$E_0 + E_r = E_t,$$

$$k_1(E_0 - E_r) - k_2 E_t = -4i\pi \frac{\omega^2}{c^2} P_0. \qquad (3)$$

В случае резонансной среды, состоящей из двухуровневых атомов для поляризации, имеем [6]

$$P_0 = -in_0 p_0 \langle\lambda\rangle, \tag{4}$$

где n_0 — поверхностная концентрация; p_0 — дипольный момент атомов, угловые скобки означают усреднение по допплеровскому уширению; λ — есть произведение амплитуд волновых функций основного ϕ_1 и возбужденного ϕ_2 состояний атома

$$\lambda = -2\phi_1\phi_2^*, \tag{5}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение; ϕ_1, ϕ_2 определяются из уравнений

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\eta\phi_1 = \frac{1}{2}\,\phi_2\varepsilon,$$
$$\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - i\eta\phi_2 = -\frac{1}{2}\,\phi_1\varepsilon^*. \tag{6}$$

Здесь $\eta{=}\Delta\omega/e\Omega$, $\Delta\omega$ — расстройка частоты, вызванной допплеровским уширением; $\Omega^2{=}2\pi n_0 p_0\omega/\hbar$; $\varepsilon{=}(p_0/\hbar\Omega)E_t(\xi,\tau)$; $\xi{=}\Omega e_2^{1/2}(x/c)$; $\tau{=}\Omega(t{-}e_2^{1/2}x/c)$; $e_2^{1/2}$ — линейная часть диэлектрической проницаемости резонансной среды. Для волны в резонансной среде имеем уравнение

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi} = \langle\lambda\rangle. \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) представляют собой замкнутую систему на эволюцию электрического поля ε в резонансной среде. Как отмечено выше, к ним можно применить МОЗР [6] и решить задачу Коши. При этом начальное условие для этой задачи определяется из уравнений (3). Из уравнений (3) выразим прошедшую волну через падающую волну и поляризацию, исключая отраженную волну,

$$\varepsilon(0,\tau) = \gamma\varepsilon_0 + \sigma\langle\lambda\rangle. \tag{8}$$

Здесь $\varepsilon_0 = (p_0/\hbar\Omega)E_0$, $\gamma = 2e_1^{1/2}/(e_1^{1/2}+e_2^{1/2})$, $\sigma = 2p_0\Omega/(e_1^{1/2}+e_2^{1/2})c$. Из уравнения (8) видно, что, как упомянуто выше, прошедшая волна зависит не только от падающей волны, но также и от поляризации, которая в свою очередь зависит от E_t сложным образом (см. уравнения (5), (6)). Далее мы поступим следующим образом: из функций нулевого приближения ϕ_0 находим $\langle\lambda\rangle$ согласно (5). Подставив $\langle\lambda\rangle$ в (8), найдем уточненное значение поля $\varepsilon(0,\tau)$. С его помощью найдем функцию ϕ в первом приближении и, повторяя эту самосогласованную процедуру, последовательно уточним ε.

В соответствии со сказанным подставим (8) в (6)

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\eta\phi_1 = \frac{1}{2}\,\phi_2(\varepsilon_0+\delta\varepsilon),$$
$$\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - i\eta\phi_2 = -\frac{1}{2}\,\phi_1(\varepsilon_0^*+\delta\varepsilon^*), \tag{9}$$

где $\varepsilon_0 = \gamma(p_0/\hbar\Omega)E_0$, $\delta\varepsilon = \sigma(p_0/\hbar\Omega)\langle\lambda\rangle$.

Мы не будем непосредственно решать (9). Вместо этого, рассматривая величины ϕ как функционал от E и считая δE как вариацию потенциала, найдем изменение ϕ как вариацию. Тогда полное решение представится в виде

$$\phi = \phi_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta\phi}{\delta\varepsilon}\,\delta\varepsilon + \frac{\delta\phi}{\delta\varepsilon^*}\,\delta\varepsilon^*\right]d\tau. \tag{10}$$

Здесь ϕ есть вектор-столбец $\phi = (\phi_1,\phi_2)^T$, индекс T означает транспонирование, ϕ_0 — решение при $\delta\varepsilon = 0$. При этом в качестве ϕ берем функцию с асимптотиками

$$\lim_{\tau\to-\infty}\phi(\tau)\exp(-i\eta\tau) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Вариационные производные можно найти, варьируя уравнения (6) (см., например, [7]),

$$\frac{\delta\phi}{\delta E} = \frac{\theta(\tau-\tau')}{2\tilde a}\,\phi_2(\tau')\big[\psi_2(\tau')\phi(\tau) - \phi_2(\tau')\psi(\tau)\big],$$
$$\frac{\delta\phi}{\delta E^*} = \frac{\theta(\tau-\tau')}{2\tilde a}\,\phi_1(\tau')\big[\psi_1(\tau')\phi(\tau) - \phi_1(\tau')\psi(\tau)\big], \tag{12}$$

где $\tilde a$ — коэффициент Иоста, используемый в методе обратной задачи; $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция

$$\theta(\tau) = \begin{cases}1 & \text{для} \quad \tau > 0,\\ 0 & \text{для} \quad \tau < 0.\end{cases}$$

Функция ψ есть другое решение (8), определенная асимптотикой

$$\lim_{\tau\to\infty}\psi(\tau)\exp(i\eta\tau) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Подставив (12) в (10), для ϕ получим выражение

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma}{2\tilde a}\,[\phi_0 I_1 - \psi_0 I_2]. \tag{14}$$

Здесь

$$I_1 = -2\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big[\phi_2(\tau')\psi_2(\tau')\langle\phi_1\phi_2^*\rangle + \phi_1(\tau')\psi_1(\tau')\langle\phi_1^*\phi_2\rangle\Big]d\tau',$$

$$I_2 = -2\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big[\phi_2^2(\tau')\langle\phi_1\phi_2^*\rangle + \phi_1^2(\tau')\langle\phi_1^*\phi_2\rangle\Big]d\tau'. \tag{15}$$

Теперь мы можем найти $\langle\lambda\rangle$, а следовательно, прошедшую и отраженную волны. Уравнения (3), (5), (8) и (14) решают эту задачу в общем виде. В качестве приложения рассмотрим случай, когда падающий импульс имеет форму солитона,

$$\varepsilon_0 = \frac{4\beta}{\gamma}\,\operatorname{sech}(2\beta t). \tag{16}$$

При этом решение системы уравнений (6) при $\delta\varepsilon = 0$ есть

$$\phi_0 = \frac{1}{\eta - i\beta}\begin{pmatrix} i\beta\,\mathrm{sech}(2\beta t) \\ -[\eta + 1\beta\tanh(2\beta t)] \end{pmatrix}.$$

Вычислив $\langle\lambda\rangle$ и подставив в (8), найдем прошедшую волну

$$\varepsilon(0,t) = \frac{4\beta}{\gamma}\,\mathrm{sech}(2\beta t)\bigg[1 + \frac{\sigma\beta\Delta_0}{2}\,\mathrm{th}(2\beta t) - \frac{\sigma^2\beta^2\Delta_0^2}{2}\,\mathrm{sech}^2(2\beta t) + \frac{\sigma^2\beta^2\Delta_0^2}{4} - \frac{\sigma^2\beta\delta_1^2}{4} - \frac{\sigma^3\beta^3\Delta_0^3}{8} + i\left[\frac{\sigma\Delta_1}{2} + \frac{\sigma^2\beta\Delta_0\Delta_1}{2}\,\mathrm{th}(2\beta t) - \frac{\sigma^2\beta\Delta_0^2\Delta_1}{8}\,\mathrm{sech}^2(2\beta t)\right]\bigg]. \quad (17)$$

Здесь

$$\Delta_0 = \left\langle\frac{1}{\eta^2+\beta^2}\right\rangle, \quad \Delta_1 = \left\langle\frac{\eta}{\eta^2+\beta^2}\right\rangle. \quad (18)$$

Как видно, при пересечении границы форма импульса деформируется и возникнет добавка к фазе. При дальнейшем движении импульса (17) из него могут образоваться одно- или многосолитонный импульсы. Считая, что выполнено условие для формирования односолитонного импульса, вычислим его параметры. Для этого необходимо в рамках МОЗР решить задачу Захарова–Шабата на собственные значения, которая имеет вид (11), где вместо η надо подставить спектральный параметр k,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} + ik\varphi_1 = \frac{1}{2}\,\varphi_2\varepsilon,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} - ik\varphi_2 = -\frac{1}{2}\,\varphi_1\varepsilon^*. \quad (19)$$

Комплексное значение параметра k определяет скорость и амплитуду образовавшегося импульса. Мы опять, как и в случае решения системы (9), находим изменение k как вариацию, что дает изменение параметров солитона при пересечении им границы раздела сред. Для разности амплитуд и скоростей падающего и прошедшего солитонов получим выражения

$$\Delta\,\frac{4\beta}{\gamma} = \frac{2\beta^3\sigma^2\Delta_0^2}{3\gamma} + 2\beta\sigma^2\Delta_1^{2\gamma},$$

$$\Delta\nu = \frac{2\beta^2\sigma^2\Delta_0}{3} + \frac{2\sigma^2\Delta_1^2}{\Delta_0} - \frac{16\beta^2\sigma^2\Delta_1^2}{3\Delta_0}. \quad (20)$$

Как видно, амплитуда солитона при пересечении им границы растет. Заметим, что если функция распределения допплеровского уширения является четной функцией, то выражения для разностей амплитуды и скорости упрощаются:

$$\Delta\,\frac{4\beta}{\gamma} = \frac{2\beta^3\sigma^2\Delta_0^2}{3\gamma},$$

$$\Delta\nu = \frac{2\beta^2\sigma^2\Delta_0}{3}. \quad (21)$$

Таким образом, в настоящей работе выведены соотношения, определяющие профиль и параметры прошедшей и отраженной волн при падении первичной волны из линейной среды на границу резонансной среды. Для случая, когда падающий импульс имеет солитонную форму, вычислены форма и параметры прошедшей волны. Этот случай рассмотрен для краткости, рассмотрение других случаев также не должно вызывать затруднений.

В заключение автор выражает благодарность Ф.Х. Абдуллаеву и Э.Н. Цою за стимулирующие обсуждения и полезные замечания.

Автор также признателен Фонду поддержки фундаментальных исследований АН РУз (грант № 15-02) за частичное финансирование.

Список литературы

[1] *Бойко Б.Б., Петров Н.С.* Отражение света от усиливающих и нелинейных сред. Минск: Наука и техника, 1988.

[2] *Рупасов В.И., Юдсон В.И.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 2 (8). С. 494.

[3] *Абдуллаев Ф.Х., Джангирян Р.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 12. С. 2307.

[4] *Kivchar Y.S., Malomed B.A.* // Rev. Mod. Phys., 1989. 61. P. 763.

[5] *Abdullaev F.Kh., Darmanyan S.A., Bussimer P.* // Proc. Workshop „Optical solitons“ / Ed. F.Kh. Abdullaev. Singapure: World Scientific, 1990. P. 13–20.

[6] *Лэм Дж.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1980.

[7] *Карпман В.И., Маслов В.Е.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 73. Вып. 2. С. 537.