01;06;12

Соотношения Рамо–Шокли для последовательной RCL-цепи

© Н.А. Поклонский, С.А. Вырко, А.А. Кочерженко

Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия
e-mail: poklonski@bsu.by

(Поступило в Редакцию 3 марта 2004 г.)

Проведен расчет тока, наведенного пролетом внешнего точечного заряда сквозь плоский вакуумный конденсатор в последовательной RCL-цепи без источников тока (напряжения). Рассмотрен также случай, когда внутренний точечный заряд испускается одной пластиной конденсатора, летит к другой пластине и проглощается ею. Предложен способ измерения величины внутреннего заряда и составляющей его скорости, перпендикулярной пластинам конденсатора, в электронейтральной RCL-цепи.

Введение

Соотношение Рамо–Шокли [1–3] утверждает, что внешний точечный заряд Q, движущийся перпендикулярно пластинам плоского вакуумного конденсатора со скоростью v, наводит в замкнутой на конденсатор электрической цепи, не обладающей ни индуктивностью, ни сопротивлением, прямоугольный импульс тока $I_{RS} = Qv/b$, где b — расстояние между пластинами конденсатора. Ток I_{RS} в цепи существует только во время $0 \le t \le b/v$ движения заряда между пластинами конденсатора; $t_c = b/v$ — время пролета заряда Q. В [4] непосредственно из максвелловской электродинамики получено обобщение соотношения Рамо–Шокли на случай, когда не выполняется квазиэлектростатическое приближение.

В работе [5] соотношение Рамо–Шокли было обобщено на случай последовательной RC-цепи. Однако реальная цепь, помимо емкости и сопротивления, обладает еще и индуктивностью. К тому же необходимо различать случаи пролета внешнего заряда насквозь через конденсатор и перелета внутреннего заряда с одной пластины незаряженного конденсатора на другую, например в результате экзоэлектронной эмиссии [6,7] (факт попадания заряда на вторую пластину конденсатора можно регистрировать по обратной фотоэмиссии [8,9]). В [10] рассмотрен пролет внешнего заряда сквозь конденсатор в параллельно соединенных RC- и RL-цепочках, нагруженных на измерительный прибор. Однако входное сопротивление прибора не учтено в окончательных формулах.

Цель работы — обобщение соотношения Рамо–Шокли на случай последовательной RCL-цепи без источников тока (напряжения) для двух вариантов: 1) внешний заряд Q пролетает сквозь плоский конденсатор; 2) внутренний заряд Q испускается одной пластиной незаряженного конденсатора, движется к другой пластине и поглощается ею.

Рассмотрим приведенную на рис. 1 цепь, состоящую из последовательно соединенных емкости C, сопротивления R и индуктивности L. Скорость v заряда Q между пластинами конденсатора считаем неизменной, запаздыванием наведенного электромагнитного поля и его влиянием на движение заряда пренебрегаем (см., например, [11]). Начало отсчета времени ($t = 0$) совместим с моментом пролета заряда сквозь внутреннюю поверхность первой из пересеченных им пластин конденсатора. Токи и напряжения рассматриваются при $0 \le t \le t_c$, когда внешний или внутренний заряды движутся между пластинами конденсатора, и при $t > t_c$, когда ток является током разрядки в RCL-цепи.

Внешний заряд

Во время пролета (при $0 \le t \le t_c$) внешнего заряда Q между пластинами конденсатора C последовательной RCL-цепи баланс токов есть (рис. 1)

$$I = I_1 = \frac{Qv}{b} + I_d = \frac{Qv}{b} - C\frac{dV}{dt}, \qquad (1)$$

где $I_1 = I$ — ток в цепи, $Qv/b = I_{RS}$ — ток переноса заряда между пластинами конденсатора, v — перпендикулярная к пластинам составляющая скорости заряда, V — индуцируемая пролетом внешнего заряда разность электрических потенциалов между пластинами конденсатора, $I_d = -CdV/dt$ — ток смещения [12].

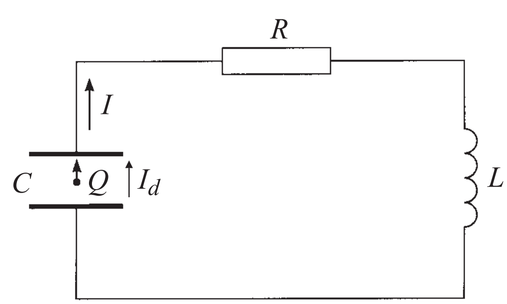

Рис. 1. Движение точечного заряда Q между пластинами плоского вакуумного конденсатора электрически нейтральной RCL-цепи; ток I — ток в RL-цепи; I_d — ток смещения в конденсаторе.

Разность потенциалов V на конденсаторе, обусловленная возбужденным в RCL-цепи током I_1, равна сумме разности потенциалов на резисторе и индуктивности

$$V = I_1 R + L\frac{dI_1}{dt}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение для тока (см., например, [13,14])

$$LC\frac{d^2I_1}{dt^2} + CR\frac{dI_1}{dt} + I_1 = \frac{Qv}{b};$$

или, если ввести обозначения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad I_{RS} = \frac{Qv}{b},$$

имеем

$$\frac{d^2I_1}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dI_1}{dt} + \omega_0^2 I_1 = \omega_0^2 I_{RS}. \quad (3)$$

Общим решением уравнения (3) является сумма общего решения I_0 этого же уравнения с нулевой правой частью и любого частного решения. В качестве частного решения (3) можно выбрать константу $I_{RS} = Qv/b$.

При $\xi \neq 1$ решение однородного уравнения, соответствующего (3), имеет вид

$$I_0 = A_1 \exp(-\xi\omega_0 t + \omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,) + A_2 \exp(-\xi\omega_0 t - \omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,), \quad (4)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Тогда общее решение уравнения (3) есть

$$I_1 = I_0 + I_{RS} = A_1 \exp(-\xi\omega_0 t + \omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,) + A_2 \exp(-\xi\omega_0 t - \omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,) + I_{RS}, \quad (5)$$

где константы A_1 и A_2 находятся из начальных условий

$$I_1|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{dI_1}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

которые следуют из того, что в начальный момент времени ($t = 0$) электрического тока в цепи нет и $V|_{t=0} = 0$ (см. формулу (2)).

Равенство (5), с учетом (6), принимает вид

$$I_1 = I_{RS}\left\{1 - \left[\mathrm{ch}\Big(\omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\Big) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\,\mathrm{sh}\Big(\omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\Big)\right]\exp(-\xi\omega_0 t)\right\}. \quad (7)$$

Для случая $\xi = 1$ из формулы (7) переходом к пределу $\xi \to 1$ получаем

$$I_1 = I_0 + I_{RS} = I_{RS}\big[1 - (1+\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)\big]. \quad (8)$$

При $L \to 0$ собственная частота ω_0 контура и параметр ξ стремятся к бесконечности, при этом $\xi/\omega_0 \to RC/2$. Тогда формула (7) переходит в известное [5] выражение

$$I_1 = I_{RS}\left[1 - \exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big)\right], \quad (9)$$

где $0 \le t \le t_c$.

После пролета (при $t > b/v = t_c$ внешнего заряда сквозь конденсатор ток $I_1 = I$ в цепи описывается уравнением (3) при $Q = 0$

$$\frac{d^2I_1}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dI_1}{dt} + \omega_0^2 I_1 = 0 \quad (10)$$

с условиями непрерывности тока (при $t = t_c$)

$$I_1|_{t_c-0} = I_1|_{t_c+0}, \qquad V|_{t_c-0} = V|_{t_c+0} \qquad \text{или}$$
$$(dI_1/dt)_{t_c-0} = (dI_1/dt)_{t_c+0}. \quad (11)$$

При $\xi = 1$ решение уравнения (10) с условиями (11) имеет наиболее простой вид

$$I_1 = (B_1 + B_2 t)\exp(-\omega_0 t), \quad (12)$$

где $B_1 = I_{RS}(1-\omega_0 t_c)\exp(\omega_0 t_c)$, $B_2 = I_{RS}[\exp(\omega_0 t_c) - 1]$.

Зависимость тока $I = I_1$ от времени для $\xi = 1$ при пролете и после пролета внешнего заряда Q сквозь конденсатор представлена на рис. 2, *a*.

Внутренний заряд

Во время пролета ($0 \le t \le t_c$) внутреннего заряда Q, испущенного при $t = 0$ одной пластиной незаряженного конденсатора RCL-цепи и поглощаемого при $t = t_c$ другой пластиной, ток в цепи можно представить в виде суммы $I = I_1 + I_2$, где I_1 — ток, наведенный при движении заряда между пластинами; I_2 — ток разрядки конденсатора. Ток I_1, как и в случае пролета сквозь конденсатор внешнего заряда, дается формулами (7) и (8) для случаев $\xi \neq 1$ и $\xi = 1$ соответственно. После испускания заряда Q конденсатор оказывается заряженным и начинает разряжаться током разрядки I_2, удовлетворяющим уравнению (ср. с (10))

$$\frac{d^2I_2}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dI_2}{dt} + \omega_0^2 I_2 = 0, \quad (13)$$

где $2\xi = RC\omega_0$.

Решение уравнения (13) при $I_2|_{t=0} = 0$ и $L(dI_2/dt)_{t=0} = Q/C$ выражается формулой (см., например, [13])

$$I_2 = \frac{Q\omega_0}{\sqrt{\xi^2-1}}\,\mathrm{sh}(\omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,)\exp(-\xi\omega_0 t). \quad (14)$$

Полный ток в цепи I равен сумме (7) и (14)

$$I = I_1 + I_2 = I_{RS} - I_{RS}\left[\mathrm{ch}(\omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}) + \frac{\xi - \omega_0 t_c}{\sqrt{\xi^2-1}}\,\mathrm{sh}(\omega_0 t\sqrt{\xi^2-1}\,)\right]\exp(-\xi\omega_0 t). \quad (15)$$

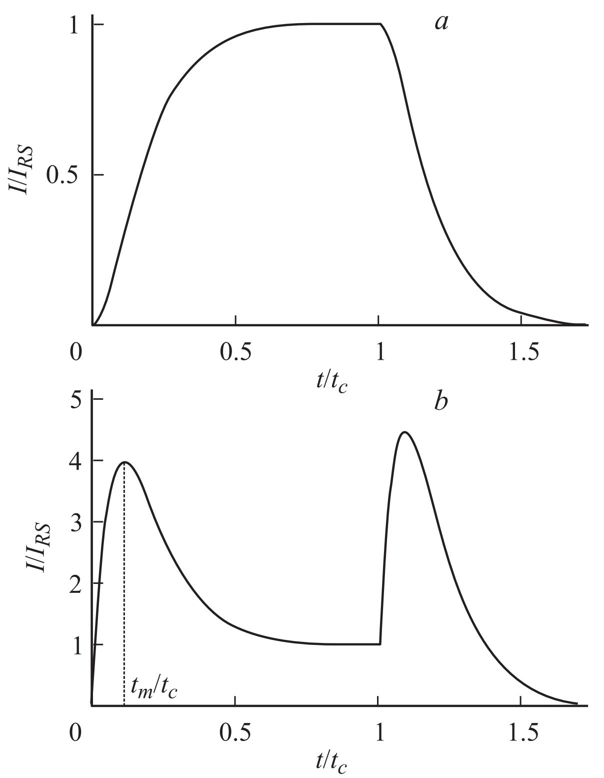

Рис. 2. Зависимость тока I (в единицах $I_{RS} = Qv/b$) в RCL-цепи от времени t (в единицах $t_c = b/v$) при $RC = 4L/R$ ($\xi = 1$): a — пролет внешнего заряда Q сквозь конденсатор с перпендикулярной пластинам составляющей v скорости; b — заряд Q с той же составляющей v скорости испущен одной пластиной и через время t_c поглощается другой пластиной конденсатора; $t_m/t_c = (t_c/\sqrt{LC} - 1)^{-1}$.

Для случая $\xi = 1$ из (14) получаем ток разрядки конденсатора

$$I_2 = Q\omega_0^2 t \exp(-\omega_0 t), \tag{16}$$

и полный ток равен сумме (8) и (16)

$$I = I_1 + I_2 = I_{RS} - I_{RS}\big[1 + (1 - \omega_0 t_c)\omega_0 t\big] \exp(-\omega_0 t). \tag{17}$$

При $L \to 0$, т.е. для последовательной RC-цепи, из формулы (15) для $0 \le t \le b/v = t_c$ получим

$$I = \frac{I_{RS}}{RC}\left[(RC + t_c) - (RC - t_c)\exp\left(-\frac{t_c}{RC}\right)\right] \exp\left(\frac{t_c - t}{RC}\right). \tag{18}$$

Из сравнения (18) и (9) видно, что ток в RC-цепи, индуцируемый перелетом внутреннего заряда с пластины на пластину конденсатора, при прочих равных условиях больше тока, индуцируемого пролетом сквозь конденсатор внешнего заряда.

После пролета (при $t > b/v = t_c$) внутреннего заряда Q, испущенного одной и поглощенного другой пластиной конденсатора, ток в цепи удовлетворяет уравнению (10) с условиями при $t = t_c$ (ср. с условиями (11))

$$I|_{t_c-0} = I|_{t_c+0}, \qquad V|_{t_c-0} + Q/C = V|_{t_c+0},$$

или с учетом (2)

$$I|_{t_c-0} = I|_{t_c+0}, \quad (dI/dt)_{t_c-0} + Q\omega_0^2 = (dI/dt)_{t_c+0}, \tag{19}$$

т.е. ток является непрерывной, но не гладкой функцией времени.

Решения (10) при $t > t_c$ имеют вид (4) и (12), в которых, однако, коэффициенты A_1, A_2, B_1 и B_2 находятся из условий (19). Наиболее простым является случай $\xi = 1$. При $R^2C = 4L$ ток, наведенный в RCL-цепи пролетом заряда Q, испущенного одной пластиной конденсатора и поглощенного другой пластиной, для $t > t_c$ описывается формулой (12), где коэффициенты B_1 и B_2, с учетом (19), вычисляем в виде

$$B_2 = \omega_0\big\{[I_{RS} + Q\omega_0]\exp(\omega_0 t_c) - I_{RS}[1 + 3\omega_0 t_c - 2\omega_0^2 t_c^2]\big\},$$

$$B_1 = I_{RS}\exp(\omega_0 t_c) - I_{RS}\big[1 + \omega_0 t_c - \omega_0^2 t_c^2\big] - B_2 t_c.$$

Зависимость тока $I = I_1 + I_2$ в RCL-цепи от времени при и после перелета между пластинами конденсатора внутреннего заряда для случая $\xi = 1$ приведена на рис. 2, b.

Обсуждение результатов

Из сопоставления формул (7) и (15), (8) и (17) видно, что внешний заряд Q, пролетающий сквозь конденсатор, и внутренний заряд Q, испускаемый одной пластиной и поглощаемый другой пластиной конденсатора, наводят в RCL-цепи различные токи. Это связано с тем, что при испускании внутреннего заряда появляется заряд конденсатора, вызывающий ток разрядки I_2, который тем больше, чем меньше емкость C конденсатора. Для последовательной RCL-цепи полный ток I в начальный момент времени ($t = 0$) равен нулю, поскольку в цепи имеется инерционный элемент — индуктивность L. Отметим, что для последовательной RC-цепи в случае движения внутреннего заряда Q ток в момент испускания заряда (при $t = 0$) изменялся бы мгновенно от 0 до значения $I = Q/RC$.

Покажем, что учет инерционных свойств последовательной RCL-цепи позволяет измерить перпендикулярную к пластинам конденсатора составляющую v скорости внутреннего (испущенного одной пластиной и летящего к другой пластине) заряда Q. Наиболее просто это сделать для случая $\xi = 1$, когда зависимость тока I в RCL-цепи от времени описывается формулой (17), а разность электрических потенциалов (напряжение) на индуктивности L определяется выражением

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = LI_{RS}\omega_0^2\big[(1 - \omega_0 t_c)t + t_c\big]\exp(-\omega_0 t). \tag{20}$$

Согласно (20), в момент времени $t_m = t_c/(t_c\omega_0 - 1)$ напряжение V_L обращается в нуль (ток I в RCL-цепи при $t = t_m$ достигает максимального значения I_m). Если $0 < t_m < b/v = t_c$ (т.е. время пролета $t_c = b/v$ заряда Q

между пластинами конденсатора достаточно велико, чтобы ток в RCL-цепи успел достичь своего максимального значения I_m), то в соответствии с (20) скорость заряда Q равна

$$v = b\left(\frac{1}{t_m} - \omega_0\right) = b\left(\frac{1}{t_m} - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right), \qquad (21)$$

где время t_m экспериментально устанавливается по условию $V_L(t_m) = 0$.

Одновременное измерение полного тока I в цепи (или напряжения $U_R = IR$ на резисторе R) позволяет также определить из (17) величину движущегося между пластинами конденсатора внутреннего заряда

$$Q = \frac{I_m t_m}{1 + \omega_0 t_m (1 - 2\omega_0 t_m)[\exp(-\omega_0 t_m) - 1]}, \qquad (22)$$

где $I_m = U_R(t_m)/R$.

Отметим, что момент времени t_m, когда напряжение на индуктивности $V_L(t_m) = 0$ обращается в нуль, не зависит от величины внутреннего заряда Q, а только от его перпендикулярной пластинам конденсатора составляющей v скорости.

При записи граничных условий (19) считалось, что заряд, испущенный одной пластиной конденсатора, поглощается второй пластиной, после чего ток в цепи снова возрастает (за счет наличия тока разрядки конденсатора I_2) и еще раз достигает максимума. Определять v и Q по формулам (21) и (22) следует по первому максимуму тока (формулы для определения по второму максимуму сложнее).

Аналогично можно получить формулы для определения скорости и величины заряда и в случае, когда $\xi > 1$, однако эти формулы имеют вид более сложный, чем (21) и (22). В случае $\xi < 1$ измерять v и Q неудобно, поскольку разрядный ток в цепи при таких значениях ξ осциллирует и может иметь несколько экстремумов даже в интервале времени от 0 до t_c.

Условие $\xi = 1$ $(RC = 4L/R)$ эквивалентно тому, что сопротивление цепи, состоящей из параллельно соединенных RC- и RL-цепочек, для которых резисторы имеют одинаковое сопротивление $R/2$, будет чисто активным и равным $R/2$ на любой частоте (см., например, [15,16]). Это обстоятельство можно использовать для подбора параметров последовательной RCL-цепи.

Отметим, что формула (21) справедлива только для скорости внутреннего (испущенного одной из пластин конденсатора) заряда Q. (В случае пролета внешнего заряда Q ток I_1 в RCL-цепи описывается формулой (8) и не имеет экстремума при $0 \le t \le b/v$.)

Таким образом, получены выражения для тока I, возникающего в RCL-цепи без источников тока (напряжения) при пролете сквозь конденсатор внешнего заряда Q и внутреннего заряда Q, испущенного одной и поглощенного другой пластиной конденсатора. Предложен способ измерения перпендикулярной пластинам конденсатора составляющей v скорости и величины Q внутреннего заряда в электронейтральной RCL-цепи.

Список литературы

[1] *Shockley W.* // J. Appl. Phys. 1938. Vol. 9. October. P. 635–636.
[2] *Ramo S.* // Proc. I.R.E. 1939. Vol. 27. September. P. 584–585.
[3] *De Visschere P.* // Sol. St. Electron. 1990. Vol. 33. N 4. P. 455–459.
[4] *Yoder P.D., Gärtner K., Fichtner W.* // J. Appl. Phys. 1996. Vol. 79. N 4. P. 1951–1954.
[5] *Иновенков А.Н., Константинов О.В., Пирогов В.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 9. С. 1–5.
[6] *Рабинович Э.* // УФН. 1979. Т. 127. Вып. 1. С. 163–174.
[7] *Месяц Г.А.* Эктоны в вакуумном разряде: пробой, искра, дуга. М.: Наука, 2000. 424 с.
[8] *Артамонов О.М., Самарин С.Н.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 10. С. 186–188.
[9] *Johnson P.D., Hulbert S.L.* // Rev. Sci. Instrum. 1990. Vol. 61. N 9. P. 2277–2288.
[10] *Поклонский Н.А., Митянок В.В., Вырко С.А.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 15. С. 33–36.
[11] *Миллер М.А.* // Известия вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 991–1007.
[12] *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975. 440 с. С. 272.
[13] *Татур Т.А., Татур В.Е.* Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях. М.: Высшая школа, 2001. 407 с.
[14] *Магетто Г.* Тиристор в электротехнике. М.: Энергия, 1977. 184 с.
[15] *Вайнштейн Л.А.* // УФН. 1976. Т. 118. Вып. 2. С. 339–367.
[16] *Бараш Ю.С., Гинзбург В.Л.* // УФН. 1976. Т. 118. Вып. 3. С. 523–537.