

01;04

Самоорганизация электронов в электронных приборах

© В.Г. Усыченко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Usychenko@rphf.spbstu.ru

(Поступило в Редакцию 6 апреля 2004 г.)

Открытые системы, содержащие большое число электронов, поступающих наряду с энергией извне, описываются с помощью функционала, который учитывает лагранжианы всех частиц и назван интегральным лагранжианом. Сформулирован не экстремальный принцип уменьшения значения функционала по мере приближения системы к стационарному состоянию. Принцип распространяется на системы, находящиеся вблизи термодинамического равновесия, где он практически эквивалентен принципу минимума диссипации энергии, а также на нелинейные системы, включая такие, движение частиц в которых описывается уравнениями классической механики. Действие принципа продемонстрировано на примерах вакуумного диода, магнетронного диода и диода Ганна.

Введение

Самоорганизация систем, содержащих большое число элементов, начинается с появления между элементами устойчивых связей. Для этого элементы должны „чувствовать“ друг друга, взаимно реагируя, например, на имеющиеся у них поля. Электронные системы — привлекательный объект исследования механизмов самоорганизации материи по причине дальнего действия кулоновских сил, посредством которых электроны и образованные из них структуры взаимодействуют друг с другом. Домены сильного поля в диодах Ганна [1,2], уединенные электронные волны в магнетронном диоде [3–6], регулярные колебания объемного заряда в ячейках Пеннинга [7], бегущие волны в плазме [8] — это проявление коллективных действий заряженных частиц, самоорганизовавшихся в устойчивые макроскопические структуры — автоволны [9] под воздействием постоянных электрических и магнитных полей, приложенных извне.

Самоорганизованные электронные образования существуют при больших, как правило, градиентах напряжений, при которых принцип локального равновесия не выполняется. Для анализа процессов в вакуумных приборах используют уравнения движения электронов, которые не содержат диссипативных членов в явном виде. Энергия частиц в этих приборах рассеивается на границах системы — на поверхности бомбардируемых электродов. Перечисленные свойства радикально отличают электронные приборы, особенно вакуумные, от диссипативных систем, обычно рассматриваемых в неравновесной термодинамике и синергетике [10–15]. Исследование механизмов самоорганизации частиц в таких сильно неравновесных электронных системах требует нового подхода, разработке которого и посвящена настоящая статья.

1. Принцип минимизации интегрального лагранжиана

Системы без трения. Рассмотрим открытую систему в виде электровакуумного прибора, к двум электродам которого — катоду и аноду с внешней стороны подключен источник постоянного напряжения. Катод составляет в систему вещество — электроны. Ускоренные внешним полем частицы перемещаются к аноду, получая таким образом энергию извне — от источника питания. Электронов настолько много, что созданное ими самосогласованное электрическое поле сопоставимо по величине с приложенным полем. Процесс установления стационарного состояния системы, протекающий с участием самосогласованных полей, будем называть самоорганизацией частиц. Движение каждого электрона будем описывать уравнениями вида

$$m\ddot{x}_{ji} = F_{ji} + \delta F_{ji}.$$

Здесь m — масса частицы; \ddot{x}_{ji} — составляющая ускорения; F_{ji} — составляющая регулярной силы, действующей на данный электрон (j — номер частицы) в данный момент времени; δF_{ji} — флуктуационная сила, учитывающая индивидуальные взаимодействия электрона с другими частицами.

Сила F_j содержит в себе потенциальную силу, связанную с наличием самосогласованного электрического поля, вычисляемого с помощью уравнения Пуассона. Таким образом учитывается коллективное, т.е. интегральное, воздействие на электрон всех заряженных частиц, находящихся в объеме V прибора. Случайная сила δF_j мала, слабо влияет на движение электрона и ею в вакуумной электронике пренебрегают [16]. Частицы „избегают“ соударений благодаря дальнедействующим

силам взаимного отталкивания. Яркий тому пример — встречное движение двух электронных потоков в отражательном клистроне. Поэтому при статистическом рассмотрении электронных процессов используют уравнение Власова, а при больших полях уравнения движения частиц записывают, как правило, в переменных Лагранжа [16].

Но в самоорганизующейся системе большого числа частиц полностью пренебрегать индивидуальными взаимодействиями нельзя, поскольку именно им принадлежит ведущая роль в установлении близких корреляций и формировании микроструктуры коллективного образования [13]. Однако поскольку роль близких взаимодействий в силу неравенства $|\delta\mathbf{F}_j| \ll |\mathbf{F}_j|$ является не организующей, а корректирующей, то электронные траектории, подлежащие коррекции, формируются без учета случайных сил. Это означает, что в процессе самоорганизации частиц на первых этапах можно использовать упрощенные уравнения

$$m\ddot{x}_{ji} = F_{ji}. \quad (1)$$

Силу же индивидуальных взаимодействий $\delta\mathbf{F}_j$ следует привлекать на самых последних этапах установления стационарного состояния (сказанное будет продемонстрировано ниже на примере магнетронного диода). Таким образом, электроника прибора описывается системой уравнений, которая включает в себя уравнение (1) движения частиц, уравнение Пуассона и уравнение непрерывности.

Благодаря ограниченному размеру прибора и приложенному к аноду постоянному напряжению $U_a > 0$ движение электронов (по крайней мере значительного их числа) хотя и описывается обратимыми во времени уравнениями (1), но в действительности является необратимым: j -й электрон, эмиттированный катодом в момент времени t_{1j} , спустя время $\tau_j = t_{2j} - t_{1j}$, где t_{2j} — время удара об анод, навсегда покидает прибор.

Вблизи установившегося режима в системе координат, перемещающейся синхронно с автоволной, можно считать самосогласованное поле квазистатическим, а число частиц $N(t)$, подсчитанных в любой момент времени $t \in \langle\tau\rangle$, постоянным. Здесь $\langle\tau\rangle = \sum_j \tau_j / N$ — среднее время жизни частиц в приборе. Вектор скорости каждого электрона, значение потенциальной энергии W_{pj} в каждой точке его пути являются однозначными функциями координат этой точки. В этих условиях функция Лагранжа для каждой частицы $L_j(x_{ij}, \dot{x}_{ij}) = \sum_i 0.5m\dot{x}_{ij}^2 - W_{pj}$ не зависит явно от времени. Просуммируем лагранжианы всех частиц, находящихся в объеме V прибора, и введем функционал

$$\Lambda(t) = \sum_j L_j(t) / N(t) = \int_V L(t)n(t) dV / \int_V n(t) dV, \quad (2)$$

который назовем интегральным лагранжианом системы. В этом выражении $n(t)$ — концентрация частиц в

элементарном объеме dV ; $L(t)$ — сумма лагранжианов частиц, находящихся в этом объеме. Значения $n(t)$, $L(t)$, $N(t)$ берутся в один момент времени $t \in \langle\tau\rangle$. В установившемся режиме $N(t)$ и $\Lambda(t)$ принимают стационарные значения N и Λ .

Опыт работы с электронными приборами показывает, что после возмущения система всегда приходит к одному и тому же стационарному состоянию, причем не случайным образом, а закономерно. Следовательно, это конкретное стационарное состояние энергетически предпочтительнее других состояний. Энергетику системы характеризует функционал Λ . Рассмотрим качественно его зависимость от числа N частиц.

При заданном анодном напряжении $U_a > 0$ в приближенных к вакууму условиях потенциалы в межэлектродном пространстве и определяемые ими скорости частиц достигают наибольших значений, при которых лагранжиан Λ приближается к своему верхнему пределу. При увеличении числа электронов значение Λ может только уменьшаться, т.е. в естественных процессах $\partial\Lambda/\partial N < 0$. Действительно, увеличение числа N частиц, обладающих отрицательным зарядом, сопровождается накоплением их преимущественно в области низких потенциалов, где скорости частиц меньше, а время пребывания дольше. Поэтому естественно предположить, что при изменении числа N электронов система перестраивается всегда таким образом, чтобы интегральный лагранжиан достиг минимального (как правило, не экстремального) значения

$$\Lambda_{\min} = (w_k - w_p)_{\min}. \quad (3)$$

В этом выражении $w_k = W_k/N = \int W_{kV}n dV / \int n dV$ и $w_p = W_p/N = \int W_{pV}n dV / \int n dV$ учитывают все формы кинетической и потенциальной энергии в системе; W_{kV} и W_{pV} — кинетическая энергия частиц и потенциальная энергия системы в элементе объема dV . Стационарный режим устанавливается тогда, когда при заданных потоках энергии и вещества, связывающих систему с внешней средой, дальнейшее уменьшение лагранжиана Λ оказывается уже невозможным. Эволюция возмущенного состояния описывается выражением

$$d\Lambda(t)/dt \leq 0, \quad (4)$$

где знак равенства выполняется при достижении значения (3).

В подвижной системе координат функцией стационарного состояния автоволны является также не зависящий от времени интегральный гамильтониан $H = \text{const}$, который выражает закон сохранения энергии в пространстве прибора. В простых системах гамильтониан $H = (w_k + w_p)$ содержит те же функции w_k и w_p , которые входят и в состав лагранжиана Λ . В таких системах условие (3) с точностью до постоянных величин, не имеющих принципиального значения, принимает вид

$$\Lambda_{\min} = (w_k)_{\min} = (-w_p)_{\min}. \quad (5)$$

Полученный результат раскрывает телеологический смысл не экстремального принципа минимизации (уменьшения) интегрального лагранжиана: система материальных частиц всегда стремится к стационарному состоянию с минимальной потенциальной энергией. Поскольку на формирование системы частиц затрачивается работа $A = -w_p$, то справедлива и такая формулировка: при заданных граничных условиях реализуется структура, на создание которой затрачивается минимальная работа.

Лагранжиан Λ является скаляром. Минимум скалярной величины не зависит от выбора системы координат [17], поэтому координаты x_{ij} лагранжианов $L_j(x_{ij}, \dot{x}_{ij})$ отдельных частиц можно считать обобщенными координатами.

Системы с сильным трением. Рассмотрим другой предельный случай, когда электрон перемещается в поле $\mathbf{E}(x)$ в пространстве, содержащем большое число нейтральных атомов. Полагая, что акт рассеяния длится мгновение по сравнению со средним временем τ_c между столкновениями, запишем [18] уравнение для вектора \mathbf{u} средней скорости

$$m\dot{\mathbf{u}} = e\mathbf{E} - m\nu\mathbf{u},$$

где e — заряд электрона, ν — эффективная частота столкновений.

Проинтегрировав, получим [18] для средней скорости значение $\mathbf{u}_d = e\mathbf{E}/m\nu$, которое представляет собой скорость дрейфа частицы.

Движение электрона качественно можно объяснить следующим образом [18]. Сразу после очередного эффективного столкновения электрон движется в случайном направлении, поэтому вектор средней скорости $\mathbf{u} = 0$. К следующему столкновению электрон набирает в поле направленную скорость u_d и его кинетическая энергия возрастает на величину $eEu_d/\nu = mu_d^2 = -eU_d$, где $U_d = -\int_0^d E(x) dx$ — разность потенциалов на средней длине d пролета электрона в направлении, параллельном вектору поля. При столкновении эта новая порция энергии также рассеивается, увеличивая температуру электронов. Между столкновениями электрон движется в ускоряющем поле и усредненный лагранжиан имеет вид $L = mu_\xi^2 - eU_\xi + 0.5mu_{ch}^2$. Здесь $0.5mu_{ch}^2$ — энергия хаотического движения; $mu_\xi^2 = -eU_\xi$ — средняя энергия, приобретаемая частицей при прохождении разности потенциалов $U_\xi = -\int_0^\xi E(x) dx$, где $0 \leq \xi \leq d$. Учет всех N частиц, находящихся внутри системы, приводит к лагранжиану

$$\Lambda = 2m\langle u_\xi^2 \rangle + 0.5m\langle u_{ch}^2 \rangle.$$

Введя для кинетической энергии направленного движения обозначение $m\langle u_\xi^2 \rangle = \alpha mu_d^2$, где константа $\alpha < 1$, полагая усредненную энергию хаоса $0.5m\langle u_{ch}^2 \rangle$ установившейся, с точностью до постоянных величин, не

имеющих принципиального значения, получим

$$\Lambda_{\min} = m(u_d^2)_{\min}. \quad (6)$$

Формула имеет простой физический смысл. Электрон, не взаимодействуя на расстоянии с нейтральной частицей, не может избежать столкновения с ней. В этих условиях минимизация лагранжиана возможна только за счет уменьшения скорости дрейфа.

Уравнение (6) применимо в первом приближении и к твердотельным приборам в слабом поле, когда основным механизмом диссипации энергии является рассеяние носителей заряда на акустических фононах. При этом m является эффективной массой носителей.

Эвристический по сути принцип минимизации лагранжиана Λ нуждается в проверке. Поскольку в установленном режиме Λ достигает стационарного, но не экстремального значения, то обычные вариационные методы исследования к нему неприменимы. Необходимо привлечение опытных данных. С этой целью обратимся к электронным приборам, теория которых хорошо согласуется с экспериментом: к вакуумному диоду (ВД), магнетронному диоду (МД) и диоду Ганна (ДГ). Проверим точность реализации принципа минимизации Λ в различных стационарных состояниях, одновременно обращая внимание на механизмы самоорганизации частиц. ВД нам интересен как система, все состояния которой находятся на термодинамической ветви. К равновесному термодинамическому состоянию, находящемуся в начале этой ветви, ВД приближается при уменьшении эмиссии и анодном напряжении $U_a = 0$. МД интересен тем, что его стационарные состояния отделены от термодинамической ветви точкой неустойчивости. ДГ интересен как система, состояния которой могут находиться как на термодинамической ветви, так и подобно МД за ее пределами. К тому же ДГ в отличие от ВД и МД является не вакуумным, а твердотельным прибором.

2. Вакуумный диод

Лагранжиан. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z и рассмотрим ВД, у которого расстояние $r_a - r_c$ между анодом и катодом мало по сравнению с продольным размером l диода вдоль оси z . Функция Лагранжа для одиночного электрона, вылетевшего из катода с тепловой скоростью u_i , имеет вид

$$L = 0.5mr^2 - eU(r) + 0.5mu_i^2, \quad (7)$$

где $U(r)$ — потенциал в точке нахождения частицы.

Кинетическая энергия

$$0.5mr^2(r) = -eU(r), \quad (8)$$

приобретенная электроном под воздействием потенциала, определяет радиальную скорость $\dot{r}(r)$. При большой и равномерной эмиссии формируется азимутально-симметричное электронное облако, характеризующееся стационарным распределением концентрации $n(r)$ частиц и

соответственно потенциала $U_{sc}(r) \leq 0$ объемного заряда. Представим потенциал $U(r)$ в диоде в виде

$$U(r) = U_v(r) + U_{sc}(r), \quad (9)$$

где

$$U_v(r) = U_a \frac{\ln r/r_c}{\ln r_a/r_c} \geq 0$$

— распределение потенциала в вакууме.

Подставив (9) в (7), просуммировав лагранжианы всех N электронов, находящихся в объеме ВД $V = \pi l(r_a^2 - r_c^2)$, после нормировки на N получим

$$\Lambda = w_{kr} + (w_N - w_{sc}) + kT_c. \quad (10)$$

В этом выражении $w_N = W_N/N$, где $W_N = -2\pi l \times \int_{r_c}^{r_a} n(r)U_v(r)r dr > 0$ — энергия, подведенная к системе извне; по теореме о среднем $w_N = -e\beta U_a$, где $0 < \beta < 1$. Величина $w_{sc} = W_{sc}/N$, где $W_{sc} = 2\pi l e \times \int_{r_c}^{r_a} n(r)U_{sc}(r)r dr > 0$ — потенциальная энергия объемного заряда (ОЗ). Слагаемое $w_{kr} = W_{kr}/N$, где $W_{kr} = \pi l m \int_{r_c}^{r_a} n(r)\dot{r}^2 r dr$ — кинетическая энергия электронов, перемещающихся относительно стационарного ОЗ. Слагаемое kT_c учитывает тепловую энергию электронов: T_c — температура катода, k — постоянная Больцмана. При анодном напряжении, удовлетворяющем условию $U_a \gg -kT_c/e$, тепловой энергией электронов будем пренебрегать.

Стационарное состояние. С учетом (8) лагранжиан (10) приводится к форме (5): $\Lambda_{\min} = 2(w_{kr})_{\min} = 2(w_N - w_{sc})_{\min}$. Отсюда получаем условие стационарного состояния:

$$(w_{kr})_{\min} = (w_N - w_{sc})_{\min}. \quad (11)$$

Из уравнений (8), (9), (11) следует, что значение w_{kr} будет тем меньше, чем больше частиц из полного их числа N будет локализовано в области малых значений скорости $\dot{r}(r)$, определяемой потенциалом $U(r)$. Таким образом, все состояния ВД характеризуются стремлением частиц достичь покоя на дне потенциальной ямы — у катода. Здесь их концентрация приводит к наибольшему уменьшению $(w_N - w_{sc})$. Обратившись к структуре выражений $w_N = W_N/N$, $w_{sc} = W_{sc}/N$, $w_{kr} = W_{kr}/N$, увидим, что при увеличении числа N частиц особенно быстро (в первом приближении пропорционально N) растет w_{sc} , в то время как w_N и w_{kr} зависят от N слабо. Поэтому минимум лагранжиана (10) достигается при выполнении условия

$$w_{sc} = (w_{sc})_{\max}. \quad (12)$$

3. Магнетронный диод

Лагранжиан. Поместим ВД в однородное магнитное поле B , направленное вдоль оси z . При увеличении B , начиная с нуля, распределение электронов

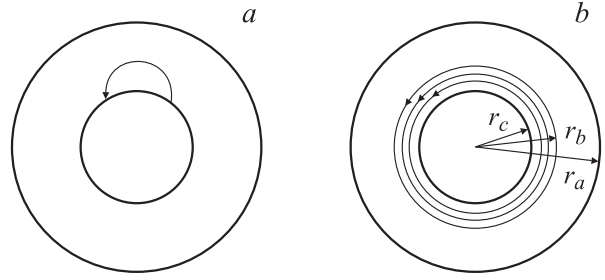


Рис. 1. Траектория одиночного электрона в вакууме (а) и траектории движения электронов во втулке Бриллюэна (б).

в МД будет азимутально-однородным до тех пор, пока не будет достигнуто критическое значение магнитного поля B_{cr} , при котором электрон, едва не коснувшись анода, возвращается на катод. Значение $B = B_{cr}$ соответствует точке бифуркации. Нас будут интересовать режимы с такими значениями $B > B_{cr}$, при которых вершина траектории электрона, стартовавшего из катода в вакуум, оказывается ближе к катоду, чем к аноду (рис. 1, а).

Исходя из аддитивных свойств Λ , сделаем предварительные выводы о поведении системы частиц, рассмотрим функцию Лагранжа для одного электрона, эмиттированного катодом с нулевой начальной скоростью,

$$L = m/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - eU - m/2r^2\omega\dot{\phi}. \quad (13)$$

Здесь $\omega = -eB/m$ — циклотронная частота; $\dot{\phi}(r) = \omega/2(1 - r_c^2/r^2)$ — азимутальная скорость частицы, которая при азимутально-симметричном ($\partial U/\partial \phi = 0$) распределении поля не зависит от потенциала $U(r)$ [19]. С учетом гамильтониана $H = m/2 \times (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + eU = 0$ лагранжиан принимает вид $L = -2eU - m/4r^2\omega^2(1 - r_c^2/r^2)$, из которого следует, что значение L уменьшается при увеличении r . Следовательно, в процессе самоорганизации электроны будут стремиться достичь максимального значения $r = r_a$. Действительно, опыт [4] показывает, что в МД, начиная с самых малых токов эмиссии (на 5–6 порядков меньше номинала), образуются устойчивые электронные структуры — уединенные волны [6,20], регулярное движение которых вокруг катода характеризуется стабильными колебаниями и протеканием тока на анод.

Рассмотрим режим с одиночной волной (рис. 2), которая перемещается вокруг катода с постоянной угловой скоростью $\Omega \ll \omega$. В системе координат $r, \psi = \phi - \Omega t, z$, вращающейся вместе с волной, функция Лагранжа (13) принимает вид [20]:

$$L = 0.5m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) - [eU - 0.5mr^2\Omega(\Omega - \omega) - 0.5mr^2\dot{\psi}(2\Omega - \omega)].$$

В квадратных скобках заключены различные формы потенциальной энергии, в том числе связанные с силами, которые зависят от скорости. Просуммировав

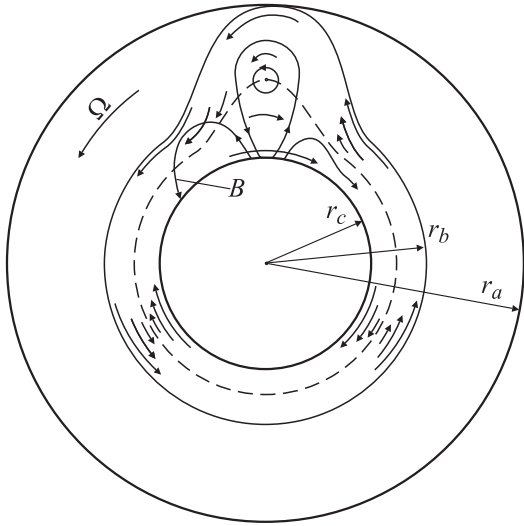


Рис. 2. Структура объемного заряда в МД при пониженной эмиссии электронов. Вращающаяся система координат. Длина и направление стрелок характеризуют скорость частиц. Штриховая линия — сепаратриса, на которой скорости электронов равны нулю. B — траектория электрона, бомбардирующего катод.

лагранжианы всех N электронов, находящихся в объеме $V = \int_V dV = \int_{r_c}^{r_a} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} r dr d\psi dz$, после нормировки на полное число частиц получим функционал

$$\Lambda = w_{kr} + (w_N - w_{sc} + w_\Omega + w_\psi). \quad (14)$$

В правой части этого выражения слагаемое $w_{kr} = \frac{m}{2N} \int_V n(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) dV$ есть усредненная кинетическая энергия относительного движения частиц. Энергии $w_\Omega = \frac{m}{2N} \int_V nr^2\Omega(\Omega - \omega) dV$ и $w_\psi = \frac{m}{2N} \times \int_V nr^2\dot{\psi}(2\Omega - \omega) dV$ связаны с обобщенными потенциалами, которые определяют силы, зависящие от скорости; $n = n(r, \psi, z)$ — концентрация частиц. Физический смысл остальных слагаемых такой же, как в уравнении (10).

Самоорганизация. Сравнивая (14) и (3), находим: $w_k = w_{kr}$, $-w_p = w_N - w_{sc} + w_\Omega + w_\psi$. Поскольку и $w_{kr} > 0$, и $-w_p > 0$, то условие стационарности принимает вид

$$\Lambda_{\min} = (w_{kr})_{\min} + (w_N - w_{sc} + w_\Omega + w_\psi)_{\min}. \quad (15)$$

Среди энергий, входящих в это выражение, при увеличении числа N частиц особенно быстро растет w_{sc} . Поэтому в МД, как и в ВД, минимум Λ достигается при значении $w_{sc} = (w_{sc})_{\max}$. Этому условию удовлетворяет гипотеза Бриллюэна [19], который предположил, что при увеличении эмиссии вблизи катода будет накапливаться объемный заряд и потенциал $U(r) = U_v(r) + U_{sc}(r)$ будет снижаться до тех пор, пока кинетическая энергия w_{kr}

не достигнет минимального значения. При этом вокруг катода образуется электронная „втулка“, в которой частицы, перемещающиеся по круговым траекториям (рис. 1, b), могут жить долго. Компьютерное моделирование [21,22] и эксперимент [4] (косвенно) указывают на послойное, т.е. упорядоченное, движение частиц, переход к которому, совершающийся [23] под воздействием сил столкновений $\delta\mathbf{F}_j$, минимизирует влияние этих же сил. Электрон-электронные столкновения, меняя импульс частиц [18], привели бы к увеличению размеров втулки и соответственно к уменьшению значения w_{sc} , т.е. к увеличению Λ , противоречащему закономерности $\partial\Lambda/\partial N < 0$. При послойном же движении частицы не сталкиваются, благодаря чему их концентрация и энергия w_{sc} достигают предельно больших, а лагранжиан — предельно малых значений.

Но выше было сказано, что электроны в МД должны достигать анода, что не следует из решения Бриллюэна. Позднее было установлено [21,16], что втулка неустойчива. Развитие неустойчивости приводит к возникновению уединенных волн. На рис. 2 показан [6] поперечный разрез МД в режиме малой эмиссии, которой хватает на образование только одной волны. Появление волны не нарушает условие максимума w_{sc} в сохранившейся части втулки. Но и в волне плотность электронов предельно велика. Исходя из этого предположения, в [6] была определена структура уединенных волн, динамические параметры которых хорошо согласуются с результатами измерений.

Эволюция. Электроны, эмиттируемые из-под фронтальной части волны (рис. 2), попадая в азимутальное поле волны, отбирают у нее часть энергии, которую расходуют на бомбардировку катода. В формуле (14) эта энергия входит в состав w_{kr} . При бомбардировке температура катода возрастает [24], а волна таким образом „управляет“ эмиссией катода и собственным развитием. Опыт [4] и теория [6] показывают, что с ростом эмиссии увеличивается число как волн, так и электронов в них. Поскольку при изменении числа N частиц быстрее любого слагаемого в (14) меняется w_{sc} , определяя этим изменение и лагранжиана в целом, то принцип (4) эволюции системы, способной управлять количеством поставляемого в нее вещества, можно выразить в другой, но эквивалентной форме соответственно в нормированном и ненормированном виде

$$dw_{sc}/dt \geq 0, \quad dW_{sc}/dt \geq 0. \quad (16)$$

Если в МД не предусмотрены меры по ограничению бомбардировки катода, то непрерывный рост числа эмиттируемых электронов сопровождается увеличением потенциальной энергии W_{sc} волн, что вскоре приводит к их распаду [6]. После этого в МД наступает хаос [4,6,25].

4. Диод Ганна

При выводе формулы (6) молчаливо полагали, что нам известна разность потенциалов на средней длине свободного пробега электрона. Ее нетрудно определить,

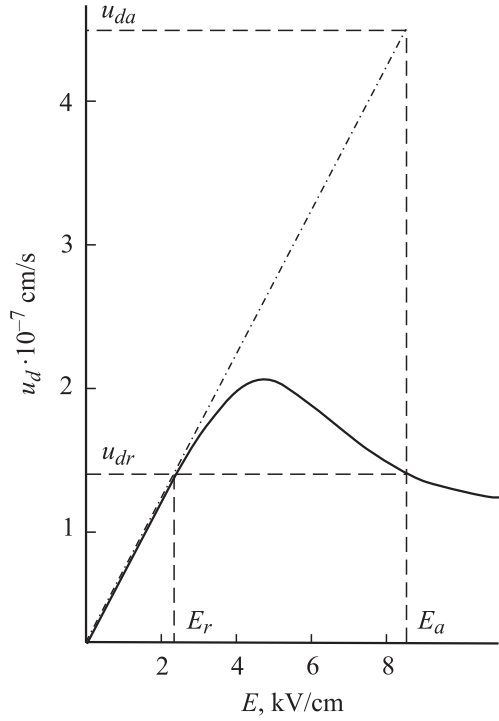


Рис. 3. Зависимость скорости электронов в ДГ от напряженности электрического поля.

зная вольт-скоростную характеристику электронов и напряжение на ДГ. Но мы воспользуемся иным способом, полнее раскрывающим синергетическое содержание явлений.

Образование домена сильного поля в ДГ связано [2,26] с неустойчивостью, вызванной переходом ускоренных внешним полем электронов из нижней долины в верхнюю долину. На зависимости дрейфовой скорости $u_d(E)$ электронов от электрического поля (рис. 3, взятый из работы [27]) появляется участок отрицательной крутизны. Если бы междолинный переход не осуществился, т.е. характеристики рассеяния энергии оставались такими же, как в слабом поле, то дрейфовая скорость частиц продолжала бы линейно зависеть от E , как это показано штрихпунктиром на рис. 3. При этом полная энергия W_N , приобретенная N электронами за время τ_c между двумя столкновениями с решеткой, равнялась бы усредненной кинетической энергии дрейфа

$$W_N = n_0 s l m_1 u_{da}^2 = n_0 s l m_1 \mu_1^2 E_a^2 = -e N U_a \tau_c / \tau_a. \quad (17)$$

Здесь l, s — длина диода и площадь его поперечного сечения; n_0, μ_1 — концентрация и подвижность электронов в слабом поле; $E_a = U_a/l$ — абсолютное значение среднего поля в диоде; U_a — напряжение на аноде; $\tau_a = l/u_{da}$ — время дрейфа частиц; $\tau_c = -(m_1 \mu_1)/e$. Остальные обозначения вытекают из рис. 3. Считая, что при переходе в верхнюю долину часть энергии электрона, не рассеиваясь в решетке, идет на формирование домена, полагая напряжение на домене $U_d = l(E_a - E_r)$,

найдем его потенциальную энергию

$$W_{sc} = n_0 s l m_1 \mu_1^2 (E_a^2 - E_r^2) = W_N (1 - E_r^2/E_a^2). \quad (18)$$

Образовавшийся домен перемещается по диоду со скоростью $u_{dr} < u_{da}$. Суммарное значение кинетической энергии дрейфа всех частиц в диоде равно

$$W_k = W_N - W_{sc} = N m_1 u_{dr}^2 = W_N E_r^2/E_a^2. \quad (19)$$

Проведенный анализ доменного режима в ДГ отличается от описанного в литературе [2,26] и поэтому нуждается в проверке. С этой целью сопоставим энергии W_{sc} энергию $0.5 C_d U_d^2$, запасенную в эквивалентной емкости C_d домена, и найдем емкость домена

$$C_d = \frac{2 s n_0 m_1 \mu_1^2 (E_a + E_r)}{l (E_a - E_r)}.$$

Расчет по этой формуле, а также по формулам, содержащимся в [2,26] и полученным исходя из иных физических предпосылок, приводит к значениям C_d , отличающимся меньше чем в 1.5 раз. Такое соответствие можно считать удовлетворительным.

Самоорганизация. У ДГ число N электронов постоянно и образование домена возможно только при их перераспределении внутри диода. Введем N_1 — число электронов в домене. Кинетическая энергия

$$W_{ks} = W_N \frac{N_1 E_r^2}{N E_a^2}$$

коллективной структуры (домена) и ее полная энергия

$$W_{\Sigma} = W_{sc} + W_{ks} = -e N U_a \frac{\tau_c}{\tau_a} \left[1 - \frac{E_r^2}{E_a^2} \left(1 - \frac{N_1}{N} \right) \right]$$

не рассеиваются не только во время дрейфа, но и в процессе „гибели“, так как по мере того, как один домен исчезает на аноде, другой энергетически эквивалентный домен появляется на катоде [2]. Уравнение (17) принимает вид

$$W_N = W_{sc} + W_{ks} + W_{kr}^{\downarrow}, \quad (20)$$

где

$$W_{kr}^{\downarrow} = -e N U_a \frac{\tau_c E_r^2}{\tau_a E_a^2} \left(1 - N_1/N \right) \quad (21)$$

— энергия дрейфа тех $N - N_1$ электронов, которые находятся вне домена. Именно эта энергия при столкновении электронов с решеткой переходит в тепловую энергию. Эта же энергия определяет величину функционала (6), для которого на основании (5) и (20) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\min} &= m_1 (u_{dr}^2)_{\min} = (w_{kr}^{\downarrow})_{\min} \\ &= (w_N - w_{sc} - w_{ks})_{\min}. \end{aligned} \quad (22)$$

Значение w_{kr}^{\downarrow} уменьшается при увеличении числа N_1 частиц в домене, т.е. при увеличении w_{sc} . Таким образом, в ДГ, так же как в ВД и МД, минимум Λ достигается при значении $w_{sc} = (w_{sc})_{\max}$.

5. Сопоставление с принципами неравновесной термодинамики

При слабом отклонении от термодинамического равновесия, когда выполняются соотношения взаимности Л. Онсагера, стационарные состояния открытой системы, удовлетворяющей условиям локального равновесия, характеризуются [10,11] экстремальным принципом минимума производства энтропии. И. Дьярмати [28] свел этот принцип к более общему вариационному принципу термодинамики необратимых процессов — принципу минимума диссипации энергии, который в свою очередь был эмпирически обобщен Н. Моисеевым [29]. Практические режимы рассматриваемых нами систем далеки от термодинамического равновесия. Поэтому, желая сопоставить принцип минимизации лагранжиана Λ с принципом минимума диссипации энергии, будем понимать последний в расширенной Н. Моисеевым формулировке [29]: „если допустимо не единственное состояние системы, а целая совокупность состояний, согласных с законами сохранения и связями, наложенными на систему, то реализуется то ее состояние, которому отвечает минимальное рассеяние энергии“. Считаем, что этому состоянию соответствует условие

$$(p_{\text{dis}})_{\text{min}} = (dw_{\text{dis}}/dt)_{\text{min}}, \quad (23)$$

где $w_{\text{dis}} = W_{\text{dis}}/N$ — энергия диссипации, которая до сих пор не встречалась, поскольку не входит явно в лагранжиан.

Для решения поставленной задачи обратимся к уравнениям энергетического баланса каждой из систем и выделим из них ту энергию, которая, будучи связана с энергией w_{dis} , входит в интегральный лагранжиан. Управляющий параметр — число N частиц.

Вакуумный диод. Функция Гамильтона для одного электрона, вылетевшего из катода с тепловой скоростью u_t , имеет вид

$$H = 0.5m\dot{r}^2 + eU = 0.5mu_t^2.$$

Просуммировав с учетом (9) гамильтонианы всех N электронов, находящихся в объеме ВД, получим уравнение энергетического баланса

$$W_N + NkT_c = W_{\text{sc}} + W_{\text{kr}}.$$

Все величины определены в (10). Пусть интенсивность эмиссии такова, что каждый электрон достигает анода. N частиц, постоянно находящихся в межэлектродном пространстве, двигаясь к аноду, обладают суммарной кинетической энергией W_{kr} и, создавая ток I_a , рассеивают на аноде мощность $U_a I_a$. За время своей жизни $\langle \tau \rangle = (r_a - r_c)/\langle \dot{r} \rangle$, где $\langle \dot{r} \rangle$ — средняя скорость частиц, N электронов рассеют энергию

$$W_a = W_{\text{dis}} = U_a I_a \langle \tau \rangle = -eNU_a. \quad (24)$$

Поскольку W_a и W_{kr} являются двумя формами кинетической энергии одних и тех же электронов, то можно ввести связь

$$W_{\text{kr}} = \theta W_a. \quad (25)$$

Здесь $\theta = \langle \dot{r}^2 \rangle / \dot{r}_a^2 \leq 1$, где \dot{r}_a — скорость электрона в момент удара об анод. Коэффициент θ характеризует неоднородность пространственного распределения кинетической энергии частиц. Из полученных выражений следует

$$W_{\text{kr}} = -\theta eNU_a = \theta W_a = \theta W_{\text{dis}}, \quad p_{\text{kr}} \cong \frac{w_{\text{kr}}}{\langle \tau \rangle} = \theta p_{\text{dis}},$$

$$p_{\text{dis}} \cong \frac{w_a}{\langle \tau \rangle} = \frac{w_{\text{kr}}}{\theta \langle \tau \rangle}. \quad (26)$$

Итак, в лагранжиане ВД энергия диссипации $w_{\text{dis}} = w_a$ учитывается неявно посредством энергии w_{kr} . Найдем количественные соотношения между w_{kr} и $w_{\text{dis}} = w_a$ в различных режимах. Для упрощения расчетов рассмотрим квазиплоский ВД, у которого $(r_a - r_c)/r_c \ll 1$.

Вблизи термодинамического равновесия состояние ВД характеризуется малой эмиссией ($W_{\text{sc}} \cong 0$) и значением $U_a \ll -kT_c/e$. При этом электроны обладают в основном тепловой скоростью и из (25), (26) следует $\theta = \langle \dot{r}^2 \rangle / \dot{r}_a^2 = 1$, $w_{\text{kr}} = w_{\text{dis}} = kT_c$. Из этих равенств следует, что вблизи термодинамического равновесия принцип минимизации лагранжиана и принцип минимума диссипации энергии приводят к одинаковому результату.

Проследим за эволюцией стационарного состояния, увеличивая число N частиц в сильно неравновесных режимах, определяемых значениями $U_a = \text{const} \gg -kT_c/e$. Для режима с ограниченной эмиссией, когда каждый электрон достигает анода, легко найти $\langle \dot{r}^2 \rangle = 0.5\dot{r}_a^2$, $\theta = 0.5$ и $(w_{\text{kr}})_{\text{min}} = 0.5(w_{\text{dis}})_{\text{min}}$, $(p_{\text{kr}})_{\text{min}} = 0.5(p_{\text{dis}})_{\text{min}}$. При неограниченном увеличении эмиссии образуется прикатодный минимум потенциала [30,31]. Большинство электронов, не сумев его преодолеть, возвращается на катод. При этом w_{sc} возрастает, w_{kr} уменьшается согласно (11), ток анода стремится к насыщению и $\theta = w_{\text{kr}}/w_a$ монотонно уменьшается. Таким образом, на всей термодинамической ветви принцип минимума диссипации энергии и принцип минимизации лагранжиана Λ оперируют пропорциональными величинами $(p_{\text{dis}})_{\text{min}} \propto (p_{\text{kr}})_{\text{min}}$, но поскольку $(p_{\text{kr}})_{\text{min}} \leq (p_{\text{dis}})_{\text{min}}$, то принцип минимизации лагранжиана накладывает на систему более сильные ограничения. Принцип минимизации Λ более информативен, поскольку не только объясняет причины уменьшения w_{kr} и p_{kr} , вызванные увеличением объемного заряда, но и указывает область диода, в которой он накапливается.

Магнетронный диод. В системе координат, вращающейся со скоростью Ω волны, гамильтониан для одного электрона, покинувшего катод с нулевой скоростью (тепловой энергией частиц пренебрегаем), имеет вид [20]

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m}{2}\omega\Omega r^2 - \frac{m}{2}r^2\Omega^2 + eU = \frac{m}{2}r_c^2\omega\Omega. \quad (27)$$

Просуммировав по объему МД гамильтонианы всех частиц, получим уравнение интегрального баланса энергии

$$W_N = W_{sc} + W_{kr} + W_{ks1} + W_{ks2}. \quad (28)$$

В правой части слагаемые $W_{ks1} = 0.5m \times \int_V n(r^2 - r_c^2)\omega\Omega dV$ и $W_{ks2} = -0.5m \int_V nr^2\Omega^2 dV$ учитывают работу, совершаемую коллективной структурой (волной) по преодолению противоэлектродвижущей и центростремительной сил. Являясь по форме кинетическими, эти энергии связаны с обобщенными потенциалами, через которые выражаются силы, зависящие от скорости. Физический смысл остальных слагаемых определен выше.

Используя (27), найдем энергию, рассеянную на аноде МД за время жизни $\langle\tau\rangle = -eN/I_a$ всеми N электронами, находящимися в объеме МД,

$$W_a = 0.5m(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\psi}_a^2 + \dot{z}_a^2)N = -\xi eNU_a. \quad (29)$$

Здесь \dot{r}_a , $r_a\dot{\psi}_a$, \dot{z}_a — составляющие скорости частиц в момент удара об анод;

$$\xi = 1 + \frac{m}{2eU_a}(\omega\Omega(r_a^2 - r_c^2) - \Omega^2 r_a^2), \quad 0 < \xi < 1 \quad (30)$$

— коэффициент [6], свидетельствующий о том, что энергия $W_{ks1} + W_{ks2}$ коллективных форм движения не рассеивается. Энергия относительного движения частиц W_{kr} может быть выражена, как и в ВД, через энергию, рассеиваемую на аноде,

$$W_{kr} = -\theta\xi eNU_a = \theta W_a = \theta W_{dis}.$$

Здесь коэффициент

$$\theta = \frac{\langle\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2\rangle}{\langle\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\psi}_a^2 + \dot{z}_a^2\rangle} < 1$$

характеризует неоднородность распределения кинетической энергии относительного движения частиц; угловые скобки означают усреднение по всем электронам. Таким образом, энергия диссипации $w_{dis} = w_a$ учитывается в лагранжиане (15) неявно энергией w_{kr} . Требование минимума значения $w_{dis} = w_a$, накладываемое принципом минимума диссипации энергии, совпадает с условием минимизации w_{kr} в формуле (15). Но поскольку $w_{kr} < w_a$, то принцип минимизации лагранжиана обладает более сильными ограничениями.

Диод Ганна. Энергию в ДГ рассеивают только те $N - N_1$ электронов, которые находятся вне домена. Энергия этих частиц, подсчитанная за время дрейфа $\tau_r = l/u_r$, определяется выражением

$$W_{kr} = W_{kr}^{\downarrow} \frac{\tau_r}{\tau_c} = -eNU_a \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \frac{E_r}{E_a}. \quad (31)$$

Частицы имеют близкое к максвелловскому распределение скоростей, поэтому $\theta \cong 1$ и практически вся

энергия W_{kr} переходит в тепловую энергию W_a . В нормированном виде описанный эффект сводится к равенствам

$$w_{kr} = w_a = w_{dis} = -\xi eU_a, \quad (32)$$

где

$$\xi = \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \frac{E_r}{E_a}$$

— коэффициент, свидетельствующий, как и в МД (см. (29)), о том, что энергия $W_{sc} + W_{ks}$ домена не рассеивается.

Таким образом, в ДГ, так же как в ВД и МД, энергия потерь учитывается энергией $w_{kr}^{\downarrow} \propto w_a = w_{dis}$ частиц, перемещающихся относительно коллективной структуры — домена. Поскольку $w_a \propto w_{kr}^{\downarrow} \propto u_d^2$, то применительно к ДГ принцип минимума диссипации энергии и принцип минимизации лагранжиана Λ приводят по сути к одному результату. Но принцип минимизации Λ более информативен, так как формула (22) объясняет механизм снижения дрейфовой скорости.

В слабом поле ДГ является резистором, у которого $\theta \cong 1$, $\xi = 1$ и в тепло превращается вся энергия $-eU_a$, которую источник питания передает каждой частице за время ее дрейфа. Принцип минимума диссипации энергии и принцип минимизации лагранжиана объясняют режим слабого поля практически одинаково.

Итак, анализ различных систем показал, что вблизи термодинамического равновесия принцип минимизации лагранжиана практически эквивалентен принципу минимума диссипации энергии. При увеличении неравновесности принцип минимизации Λ оказывается более информативным в силу того, что интегральный лагранжиан учитывает не одну, а все формы энергии системы.

В общем случае закон сохранения энергии в системе имеет вид

$$w_N = w_{\Sigma} + w_{kr}, \quad (33)$$

где $w_{\Sigma} = w_{sc} + \sum_i w_{ksi}$ — энергия коллективной структуры.

Запишем формулу (33) иначе: $w_{kr} = w_N - w_{\Sigma}$. Теперь справа находятся те формы энергии, которые не рассеиваются, а сохраняются благодаря энергии w_{kr} частиц, участвующих в необратимом процессе обмена веществом с внешней средой. Требование уменьшения энергии w_{kr} , вытекающее из принципа минимизации лагранжиана Λ , означает, что будет сформирована такая структура, для существования которой необходимо наименьшее количество энергии w_{kr} .

Заключительные замечания

Анализ конкретных систем показал, что термодинамические принципы минимума рассеиваемой энергии и минимума производства энтропии качественно верно отражают роль диссипации и в формировании стационарных состояний систем, в которых принцип локального равновесия не выполняется. Объясняется

это тем, что энергия w_{Σ} коллективной структуры не рассеивается. В тепло превращается только энергия w_{kr} перемещающихся относительно структуры частиц, присутствующая во всех открытых системах и являющаяся основной в системах, состояниях которых находятся на термодинамической ветви. В общем случае требование минимизации энергии w_{kr} накладывает на самоорганизующуюся систему более сильные ограничения, чем требование минимума w_{dis} .

При увеличении числа частиц быстрее всех видов энергии растет потенциальная энергия W_{sc} структуры. При отсутствии ограничений на число поступающих извне частиц эволюция системы отображается неравенствами (16): $dw_{sc}/dt \geq 0$, $dW_{sc}/dt \geq 0$. „Стремление“ к увеличению W_{sc} можно назвать принципом естественной эволюции открытых систем. Действием этого принципа можно объяснить, например, концентрацию материи в звездах и галактиках, а также большое разнообразие видов живой природы, прошедших в своем развитии путь от прокариотов до многоклеточных организмов несопоставимо больших размеров.

Принцип минимизации интегрального лагранжиана утверждает, что из всех структур, способных образоваться в открытой системе, питаемой извне заданными потоками энергии и вещества, природа реализует ту структуру, при которой интегральный лагранжиан системы достигает наименьшего значения. Выбраковка возможных структур и выбор только одной структуры, удовлетворяющей указанному принципу, приводят к нарушению симметрии в Природе, вводят понятия необходимости возникновения „оптимальной“ структуры и целенаправленности ее развития.

Автор благодарен Ю.К. Голикову за плодотворную дискуссию и руководству АО „Аргус–Спектр“ за поддержку.

Список литературы

- [1] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- [2] *Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С.* Эффект Ганна. М.: Сов. радио, 1975. 288 с.
- [3] *Кервалишвили Н.А.* // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 2. С. 174–181.
- [4] *Смирнов А.В., Усыченко В.Г.* // РиЭ. 1991. Т. 36. № 1. С. 151–160.
- [5] *Agafonov A.V., Fedorov V.M., Tarakanov V.P.* Preprint of Lebedev Physical Institute Russian Academy of Sciences. М., 1997. № 37.
- [6] *Усыченко В.Г.* // РиЭ. 2001. Т. 46. № 12. С. 1489–1498.
- [7] *Кервалишвили Н.А.* // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 3. С. 362–366.
- [8] *Коробцев С.В., Медведев Д.Д., Русанов В.Д.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. № 4. С. 567–574.
- [9] *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [10] *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. М.; Ижевск: РХД, 2001. 160 с.
- [11] *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
- [12] *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.
- [13] *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. М.: Наука, 1979. 280 с.
- [14] *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. М.: Наука, 2001. 244 с.
- [15] *Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р.* Физика процессов эволюции. М.: Едиториал УРСС, 2001. 328 с.
- [16] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. С.: Сов. радио, 1973. 400 с.
- [17] *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
- [18] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 536 с.
- [19] *Бриллюэн Л.* Теория магнетрона. Сб. переводов. М.: Сов. радио, 1946. 144 с.
- [20] *Усыченко В.Г.* // РиЭ. 1996. Т. 41. № 10. С. 1243–1250.
- [21] *Банеман О.* // Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. М.: ИЛ, 1961. Т. 1. С. 181–203.
- [22] *Ушерович Б.Л.* Симметричные состояния в диоде со скрещенными электрическим и магнитным полями. Обзоры по электронной технике. 1969. № 7(76). 58 с.
- [23] *Усыченко В.Г.* // РиЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 623–628.
- [24] *Джепсен Р.* // Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. М.: ИЛ, 1961. Т. 1. С. 304–309.
- [25] *Усыченко В.Г.* // РиЭ. 1999. Т. 44. № 6. С. 746–750.
- [26] *Шур М.* Современные приборы на основе арсенида галлия. М.: Мир, 1991. 632 с.
- [27] *Braslau N., Hauge P.* // IEEE Trans. 1970. Vol. ED-17. N 8. P. 616.
- [28] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.
- [29] *Моисеев Н.Н.* Алгоритмы развития. М.: Наука, 1987. 304 с.
- [30] *Гвоздовер С.Д.* Теория электронных приборов сверхвысоких частот. М.: ГИТТЛ, 1956. 528 с.
- [31] Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина, Г.А. Хауса. М.; Л.: Энергия, 1964. 484 с.