

01;03

# Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 6 апреля 2004 г.)

Во втором приближении по амплитуде начальной деформации решена задача определения профиля периодической капиллярно-гравитационной волны, распространяющейся по поверхности жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества. Показано, что наличие пленки поверхностно-активного вещества существенно сказывается на интенсивности нелинейного взаимодействия гармоник, составляющих нелинейную волну.

В последние годы в научной литературе появился цикл работ, посвященный асимптотическому исследованию нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на поверхности заряженной жидкости, обладающей конечной вязкостью [1–4]. Аппарат, развитый в этих работах, позволяет строго учитывать вязкость при решении задач о нелинейном волновом движении. В результате появилась возможность исследования релаксационных явлений, связанных с нелинейным волновым движением. Говоря иными словами, появилась возможность корректно работать с условием баланса вязких и релаксационных напряжений на свободной поверхности жидкости в нелинейных задачах. Настоящая работа посвящена исследованию влияния нерастворимой пленки поверхностно-активного вещества (ПАВ) на интенсивность нелинейного взаимодействия гармоник, составляющих нелинейную периодическую бегущую волну, распространяющуюся по заряженной поверхности жидкости, покрытой пленкой ПАВ.

Исследование влияния ПАВ на распространение волн по поверхности жидкости — вопрос, лежащий на стыке классической механики жидкости и физической химии [5], и представляет интерес для различных академических, технических и технологических приложений [6–11]. На настоящий момент все исследования по данному вопросу выполнены в приближении волн бесконечно малой амплитуды и касаются главным образом исследования вопроса определения оптимальной концентрации ПАВ, обеспечивающей эффективное затухание капиллярно-гравитационных волн. Существование такой оптимальной концентрации доказано экспериментально (см., например, [6] и цитируемую там литературу), и существуют моделирующие это явление теории [6,7,9,11]. Однако из-за отсутствия в объяснении явления полной физической ясности данный вопрос постоянно вновь и вновь поднимается [9,11]. В настоящей работе сделано отступление от этой традиции и поставлена цель выявить другие стороны влияния ПАВ на капиллярное волновое движение, не связанные с затуханием волн.

## 1. Формулировка задачи

Пусть в декартовой системе координат  $Oxyz$  с осью  $Oz$ , направленной против направления действия силы тяжести, вязкая несжимаемая идеально проводящая жидкость заполняет полупространство  $z < 0$ . Жидкость имеет плотность  $\rho$  и кинематическую вязкость  $\nu$ . На ее свободной поверхности равномерно распределены электрический заряд с поверхностной плотностью  $\kappa_0$  и ПАВ с поверхностной плотностью  $\Gamma_0$ . Коэффициент поверхностной диффузии ПАВ обозначим  $D$ . Примем, что по свободной поверхности жидкости в положительном направлении оси  $Ox$  в начальный момент времени  $t = 0$  начинает распространяться бегущая периодическая волна длины  $\lambda$ . Требуется найти ее профиль при  $t > 0$ .

Периодический профиль волны может быть однозначно восстановлен по амплитудам гармоник его разложения в ряд Фурье на пространственном периоде  $\lambda$ . Будем считать, что амплитуда главной гармоники  $\eta$  известна. В дальнейшем изложении в качестве параметра, характеризующего длину волны, будем использовать волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ . Движение жидкости для простоты будем считать независимым от координаты  $y$ .

В процессе распространения волны будет иметь место перераспределение ПАВ по свободной поверхности, так что концентрация ПАВ оказывается функцией времени и горизонтальной координаты  $\Gamma = \Gamma(t, x)$ . Локальные изменения в концентрации ПАВ вызывают локальные изменения величины коэффициента поверхностного натяжения  $\gamma$ . В качестве модели зависимости  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  примем допущение о локальном термодинамическом равновесии между поверхностной фазой ПАВ и жидкостью. Это означает, что изменение локального значения концентрации ПАВ мгновенно вызывает изменение локального значения коэффициента поверхностного натяжения в соответствии с изотермой  $\gamma = \gamma(\Gamma)$ , считающейся известной.

Математическая формулировка задачи определения профиля волны имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g};$$

$$\mathbf{U} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_z;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \partial_t \xi + u \partial_x \xi = v;$$

$$p - 2\rho\nu (\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\frac{\gamma \partial_{xx} \xi}{(1 + (\partial_x \xi)^2)^{3/2}};$$

$$-\rho\nu [(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + (\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U})]$$

$$+ \frac{\partial_x \gamma}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} = 0; \quad \Phi = 0;$$

$$\partial_1 \Gamma + \frac{1}{1 + (\partial_x \xi)^2} \left[ \partial_x (\Gamma u) + \partial_x \xi (\Gamma \partial_z u + \partial_x (\Gamma v)) + (\partial_x \xi)^2 \Gamma \partial_z v \right]$$

$$- D \left( \frac{\partial_{xx} \Gamma}{1 + (\partial_x \xi)^2} - \frac{\partial_x \xi \partial_{xx} \xi \partial_x \Gamma}{(1 + (\partial_x \xi)^2)^2} \right) = 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow \infty; \quad \nabla \Phi \rightarrow E_0 \mathbf{e}_z; \quad E_0 = 4\pi\kappa_0.$$

Здесь  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  — орты осей;  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  — орты внешней нормали и касательной к возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости  $z = \xi \equiv \xi(t, x, z)$  (аналитические выражения для  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  приведены в приложении). Начальные условия задачи будем определять в процессе решения таким образом, чтобы получить в результате наименее громоздкое и наиболее удобное для качественного анализа профиля волны выражение, как это обычно делается в задачах о нелинейных периодических волнах [1–4, 12, 13].

В строгой постановке исходные данные представлены набором величин  $\eta$ ,  $k$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\nu$ ,  $\kappa_0$ ,  $\Gamma_0$ ,  $D$  и изотермой  $\gamma = \gamma(\Gamma)$ , а неизвестными считаются функции:  $\xi = \xi(t, x, z)$  — профиль свободной поверхности;  $u = u(t, x, z)$  — горизонтальная и  $v = v(t, x, z)$  — вертикальная компоненты поля скоростей  $\mathbf{U}$  в жидкости;  $p = p(t, x, z)$  — распределение давления в ней;  $\Gamma = \Gamma(t, x)$  — поверхностная концентрация ПАВ;  $\Phi = \Phi(t, x, z)$  — потенциал электрического поля над жидкостью.

## 2. Принцип построения асимптотического решения

Согласно методике [3, 4], использованной ранее при решении задачи о расходе нелинейных волн в вязкой несжимаемой жидкости в отсутствие ПАВ, решение

ищется в виде

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \\ p \\ \Phi \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g z - \frac{E_0^2}{8\pi} \\ E_0 z \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ p_1 \\ \Phi_1 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \Phi_2 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\xi_1^3) \\ O(u_1^3) \\ O(v_1^3) \\ O(p_1^3) \\ O(\Phi_1^3) \\ O(\Gamma_1^3) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \Phi_2 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(\xi_1^2) \\ O(u_1^2) \\ O(v_1^2) \\ O(p_1^2) \\ O(\Phi_1^2) \\ O(\Gamma_1^2) \end{pmatrix};$$

$$\xi_1 = \eta f(t) \cos(kx - \omega t); \quad f(0) = 1,$$

где величины с индексом 1 определяют линейное по амплитуде приближение, а величины с индексом 2 дают поправки второго порядка малости.

В полную формулировку задачи входит коэффициент поверхностного натяжения  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  и его частотные производные по  $x$ . Из степенных разложений

$$\gamma = \gamma(\Gamma) = \gamma_0 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots)(\partial_{\Gamma} \gamma)_0$$

$$+ (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots)^2 (\partial_{\Gamma\Gamma} \gamma)_0 + \dots;$$

$$\partial_x \gamma = (\partial_{\Gamma} \gamma)(\partial_x \Gamma)$$

$$= ((\partial_{\Gamma} \gamma)_0 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots)(\partial_{\Gamma\Gamma} \gamma)_0 + \dots)(\partial_x \Gamma),$$

в которых индекс нуль указывает на то, что значения функции вычисляются на невозмущенной плоской поверхности жидкости, при  $\Gamma = \Gamma_0$  с точностью до величин второго порядка малости имеем, полагая  $\chi \equiv (\partial_{\Gamma} \gamma)_0$ ,  $\beta \equiv (\partial_{\Gamma\Gamma} \gamma)_0$ ,

$$\gamma \partial_{xx} \xi \approx \gamma_0 \partial_{xx} \xi_1 + \gamma_0 \partial_{xx} \xi_2 + \chi \Gamma_1 \partial_{xx} \xi_1;$$

$$\partial_x \gamma \approx \chi \partial_x \Gamma_1 + \chi \partial_x \Gamma_2 + \beta \Gamma_1 \partial_x \Gamma_1.$$

Используя эти приближенные выражения и асимптотические соотношения для  $\xi$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $\Phi$ ,  $\Gamma$ , несложно построить задачи первого и второго порядков малости методом, описанным в [3, 4]. Полная математическая формулировка задач первого и второго порядков малости имеет вид

$$\partial_1 \mathbf{U}_m + \frac{1}{\rho} \nabla p_m - \nu \Delta \mathbf{U}_m = \mathbf{V}_m;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_m = 0; \quad \Delta \Phi_m = 0;$$

$$z = \xi: \quad \partial_t \xi_m - v_m = f_{1m};$$

$$p_m - 2\rho\nu \partial_z v_m - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_m + \gamma_0 \partial_{xx} \xi_m = f_{2m};$$

$$-\rho\nu (\partial_z u_m + \partial_x v_m) + \chi \partial_x \Gamma_m = f_{3m}; \quad \Phi_m - E_0 \xi_m = f_{4m};$$

$$\partial_1 \Gamma_m + \Gamma_0 \partial_x u_m - D \partial_{xx} \Gamma_m = f_{5m};$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_m \rightarrow 0; \quad v_m \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_m| \rightarrow 0.$$

При  $m = 1$  выписанные соотношения представляют собой формулировку задачи первого порядка малости. Для нее  $\mathbf{V}_1 = 0$ ;  $f_{n1} = 0$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ). При  $m = 2$  получим задачу второго порядка малости. Величины  $\mathbf{V}_2$  и  $f_{n2} = 0$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ) выражаются через решения задачи первого порядка по формулам, приведенным в приложении.

### 3. Решение задачи в квадратичном приближении по амплитуде периодической бегущей волны

Последовательно решая задачи первого и второго порядков малости стандартными методами [3,4], несложно найти во втором приближении по амплитуде  $\eta$  выражение для формы профиля периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны

$$\begin{aligned} \xi &= \eta \cos \theta \exp(rt) \\ &+ 2\eta^2 \left[ \operatorname{Re}(\xi) \cos(2\theta) - \operatorname{Im}(\xi) \sin(2\theta) \right] \exp(2rt); \\ \theta &= \omega t - kx; \quad \omega = \operatorname{Im}(S); \quad r = \operatorname{Re}(S); \quad \xi = \frac{M_1}{M_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $S$  — комплексная частота, вычисляемая на этапе решения задачи первого порядка малости;  $M_0$  и  $M_1$  вычисляются в процессе решения задачи второго порядка малости (см. Приложение). Из-за большого количества исходных данных и промежуточных переменных важно выделить структуру функциональной зависимости величин  $S$ ,  $M_0$ ,  $M_1$  от исходных параметров задачи. С помощью функции  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  построим численные параметры

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \gamma(\Gamma_0); \quad \Pi_1 = \Gamma_0 \left( \frac{d\gamma}{d\Gamma} \right)_{\Gamma=\Gamma_0}; \\ \Pi_2 &= \Gamma_0^2 \left( \frac{d^2\gamma}{d\Gamma^2} \right)_{\Gamma=\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметр  $\Pi_0$ , имеющий смысл коэффициента поверхностного натяжения на равновесной плоской свободной поверхности жидкости, можно использовать для перехода от параметра  $\kappa_0$  к безразмерному параметру Тонкса-Френкеля [8,14]

$$W = 4\pi\kappa_0^2 / \sqrt{\rho g \Pi_0}.$$

Теперь можно показать, что величины  $S = S(\rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1)$ ,  $M_0 = M_0(\rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1)$  и  $M_1 = M_1(\rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2)$  выражаются непосредственно через значения параметров  $\rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$ , причем от  $\Pi_2$  зависит только величина  $M_1$ .

Комплексная частота вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} S &= \omega_0 \cdot \alpha(\rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1); \\ \omega_0^2 &= kg(1 + (ak)^2 - akW); \quad a = \sqrt{\frac{\Pi_0}{\rho g}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$a$  — капиллярная постоянная; безразмерный комплексный параметр  $\alpha$  — корень безразмерного дисперсионного соотношения, соответствующий капиллярно-гравитационной волне (дисперсное соотношение и способ выбора нужного корня приведены в приложении); промежуточный для вычислений параметр  $\omega_0$  равен частоте капиллярно-гравитационных волн бесконечно малой амплитуды с волновым числом  $k$  на поверхности идеальной жидкости с постоянным значением коэффициента поверхностного натяжения  $\Pi_0$ .

Набор переменных  $\eta, \rho, g, v, k, W, D, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$ , через которые по формуле (1) выражается профиль нелинейной волны, обладает двумя важными свойствами. Во-первых, в приведенном списке исходных переменных отсутствует изотерма. Вместо функции  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  используются три числовых параметра  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$ , имеющих размерность поверхностного натяжения и характеризующие локальные свойства изотермы в окрестности равновесного состояния свободной поверхности. Такая замена оказалась возможной благодаря тому, что в процессе решения задачи использовались степенные разложения значения коэффициента поверхностного натяжения на свободной поверхности в окрестности равновесного значения. Как уже отмечалось,  $\Pi_0$  имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения на равновесной плоской поверхности жидкости, по которой распределено ПАВ с концентрацией  $\Gamma_0$ . Параметр  $\Pi_1$  равен произведению концентрации ПАВ на тангенс угла наклона изотермы в точке  $\Gamma = \Gamma_0$  и называется упругостью пленки. Для обычных (не инактивных) ПАВ параметр  $\Pi_1 < 0$ . Он определяет силу на единицу длины, действующую между двумя линейными элементами поверхности с разными концентрациями ПАВ. Эта сила возникает при нарушении однородности распределения ПАВ в пленке и направлена вдоль поверхности пленки. Параметр  $\Pi_2$  определяется кривизной изотермы в точке  $\Gamma = \Gamma_0$ .

Во-вторых, в новом наборе имеется параметр  $W$ , характеризующий устойчивость однородно заряженной плоской поверхности жидкости по отношению к собственному заряду [14]. Из решения задачи первого порядка малости [8,10] известно, что при

$$\begin{aligned} \omega_0^2 < 0, \quad \text{т.е.} \quad W > \frac{1}{ak} + ak, \\ \operatorname{Re}(S) = r > 0, \quad \operatorname{Im}(S) = \omega = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

так как соотношение для комплексной частоты  $S$  из (4) при переходе к идеальной жидкости в отсутствие пленки ПАВ ( $v, D, \Pi_1 \rightarrow 0$ ) превращается в  $S = \pm i\omega_0$ . В этом случае уже в первом порядке малости электрические силы на гребнях волн с волновым числом  $k$  преобладают над лапласовскими. Поверхность жидкости оказывается неустойчивой по отношению к любым сколь угодно малым по амплитуде периодическим волновым возмущениям, для которых выполняется условие (5), т.е. реализуется неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному электрическому заряду [8,10,14]. Из (5) легко видеть, что если

$0 \leq W < 2$ , то все волновые числа  $k > 0$  устойчивы. При  $W = 2$  появляется волновое число  $k_* = 1/a$ , лежащее при границе устойчивости в том смысле, что любое сколь угодно малое превышение величины  $W$  над значением  $W = 2$  активизирует неустойчивость волнового возмущения с  $k = k_*$ . При  $W > 2$  существует интервал неустойчивых волновых чисел, содержащий  $k_*$ , который расширяется с ростом  $W$ .

Когда в выражении (1)  $r > 0$  и  $t \rightarrow \infty$  отношение поправочного члена разложения, пропорционального  $\eta^2$ , к главному, пропорциональному  $\eta$ , дает выражение вида  $\infty \times \eta$ , это означает, что на больших интервалах времени нарушается равномерность асимптотического разложения (1). Кроме того, при выполнении условия (5) режим движения свободной поверхности перестает быть волновым, поскольку  $\omega = 0$ .

В связи со сказанным будем исследовать профиль волны (1) в предположении, что выполняется условие

$$W < \frac{1}{ak} + ak : \Rightarrow r = \operatorname{Re}(S) < 0, \quad \operatorname{Im}(S) = \omega \neq 0. \quad (6)$$

В этом случае параметр  $r$  имеет смысл декремента затухания волны в первом порядке малости, а в выражении (1) для профиля волны отношение поправочного члена разложения к главному ограничено и стремится к нулю в пределе  $\eta \rightarrow 0$  при всех значениях времени  $t > 0$ .

Полезно отметить, что выражение для профиля волны (1) можно переписать в альтернативной форме

$$\begin{aligned} \xi &= \eta \cos \theta \exp(rt) + \eta^2 A \cos(2\theta + \phi) \exp(2rt); \\ A &= 2\sqrt{\operatorname{Re}(\xi)^2 + \operatorname{Im}(\xi)^2}; \\ \phi &= \begin{cases} \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(\xi)}{\operatorname{Re}(\xi)}\right), & \text{если } \operatorname{Re}(\xi) > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \operatorname{Re}(\xi) = 0; \\ \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(\xi)}{\operatorname{Re}(\xi)}\right) + \pi, & \text{если } \operatorname{Re}(\xi) < 0. \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

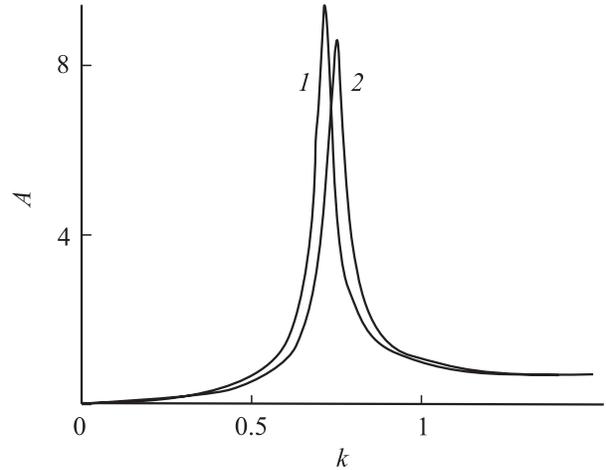
Параметры  $\xi$ ,  $r$ ,  $\theta$  такие же, как в (1).

В нижеследующем изложении перейдем к безразмерным переменным, в которых  $\rho = g = \gamma = 1$ , а остальные величины измеряются в единицах своих характерных масштабов

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{1}{a}; \quad \eta^* = a; \quad \xi_* = \frac{1}{a}; \\ \Pi_n^* &= \gamma; \quad v^* = \sqrt{ga^3}; \quad D^* = \sqrt{ga^3}. \end{aligned}$$

#### 4. Внутреннее нелинейное взаимодействие волн при отсутствии пленки ПАВ

В работах [1–4] выражение (1) для профиля нелинейной периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны подробно исследовано в простейшем случае, когда на свободной поверхности нет пленки ПАВ, и



**Рис. 1.** Зависимости  $A = A(k)$  безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны от безразмерного волнового числа при  $W = 0$ , построенные для  $\Pi_1 = 0$  (1),  $-0.4$  (2).

показано, что нелинейный характер волнового движения наиболее отчетливо проявляется вблизи значения безразмерного волнового числа

$$k_* = 1/\sqrt{2}. \quad (8)$$

Это следует из резонансоподобного вида зависимости  $A = A(k)$  (рис. 1). Высота резонансного пика характеризует степень интенсивности нелинейного взаимодействия волны с волновым числом  $k$  (главное волновое слагаемое в (1), пропорциональное  $\eta$ ; в нижеследующих рассуждениях будем называть его „ $k$ -волна“) и волны с волновым числом  $2k$  (поправочное волновое слагаемое в (1), пропорциональное  $\eta^2$ ; „ $2k$ -волна“). Фазовые скорости обеих волн совпадают. Изменение значения  $k$  не влияет на амплитуду  $\eta$  главного волнового слагаемого, но заметно сказывается на величине множителя  $A$  (см. (7)), определяющего амплитуду  $2k$ -волны. Таким образом, волновое число  $k$ , определяющее длину волны главного волнового слагаемого, влияет на амплитуду поправки второго порядка малости. Можно сказать, что  $k$ -волна и  $2k$ -волна взаимодействуют. Именно такое взаимодействие в литературе по нелинейным волнам (см., например [15]) называется внутренним нелинейным взаимодействием волн. Важно обратить внимание на то, что мерой интенсивности взаимодействия является величина амплитудного множителя  $A$  в формуле (7).

Волна с волновым числом  $2k$ , о которой идет речь, не является самостоятельной. Ее частота и волновое число в отличие от главной в (1)  $k$ -волны в общем случае не удовлетворяют дисперсионному соотношению. Только при  $k = k_*$  дисперсионное соотношение для  $2k$ -волны удовлетворяется. Фазовая скорость и амплитуда  $2k$ -волны полностью определяются  $k$ -волной, поэтому  $2k$ -волна является не самостоятельным волновым движением, а волной, порожденной главной  $k$ -волной.

Высота пика амплитуды  $A$ , а значит и степень интенсивности нелинейного взаимодействия, зависят от вязкости жидкости и величины поверхностного электрического заряда. Как показано в [1], с уменьшением вязкости высота пика монотонно растет и в пределе идеальной жидкости обращается в бесконечность, что соответствует реализации трехмодового нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных и гравитационных волн в его вырожденном варианте [12–13]. При отличной от нуля вязкости высота резонансного пика конечна [1–4].

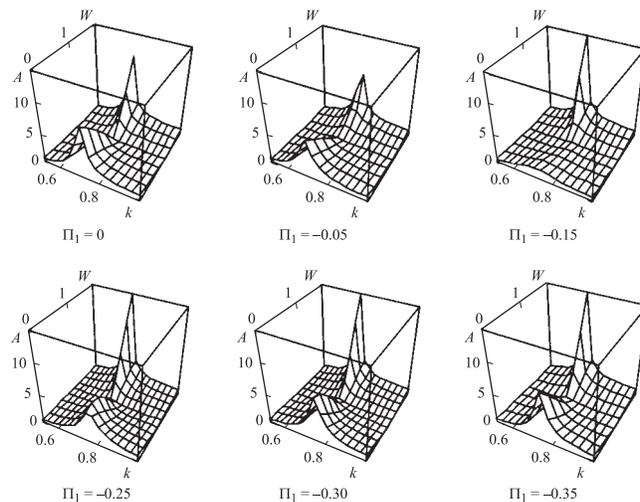
В общем случае нелинейная периодическая капиллярно-гравитационная волна кроме главной  $k$ -волны и поправочной  $2k$ -волны содержит бесконечный набор гармоник:  $3k$ -,  $4k$ -,  $5k$ -волны, которые могут взаимодействовать между собой. Мы рассматриваем простейший вариант такого взаимодействия.

В [2] отмечено, что степень интенсивности нелинейного взаимодействия волн довольно сложным образом зависит от значения поверхностной плотности заряда, квадрат которой пропорционален параметру  $W$ . Известно [3,4], что на плоскости параметров  $(k, W)$ , на линии

$$W = (k + k^{-1})/2, \quad (9)$$

амплитуда квадратичного по амплитуде слагаемого профиля (1) имеет минимум, стремящийся к нулю при уменьшении до нуля вязкости. Это означает, что для идеальной жидкости при таких значениях  $k$  и  $W$  главное волновое движение реализуется без порождения  $2k$ -волны, т.е. механизм возбуждения этой волны, а значит и воздействия на нее, в такой ситуации не работает. В этом случае решение (1) состоит только из  $k$ -волны, а часть решения, отвечающая за  $2k$ -волну с амплитудой, зависящей от свойств главной волны, обращается в нуль. С другой стороны, как показано в [3], всегда существует самостоятельная  $2k$ -волна, амплитуда которой не зависит от главной  $k$ -волны. Она является решением однородной части задачи второго порядка малости и распространяется со своей фазовой скоростью, совпадающей со скоростью  $k$ -волны, только при  $k = k_*$ . Частота и волновое число этой самостоятельной  $2k$ -волны удовлетворяют дисперсионному уравнению. В (1) и (7) слагаемое, отвечающее, не зависящее от главного слагаемого, самостоятельной  $2k$ -волне, не выписано, поскольку интерес в контексте проводимого исследования представляет только та часть решения, которая отвечает за нелинейное взаимодействие волн. В случае, когда  $k$  и  $W$  удовлетворяют (9), можно произвольно задать амплитуду самостоятельной  $2k$ -волны, даже если амплитуда  $k$ -волны равна нулю и волны с волновыми числами  $k$  и  $2k$  будут распространяться независимо. Для вязкой жидкости, если  $k$  и  $W$  удовлетворяют (9), интенсивность нелинейного взаимодействия сведена к минимуму.

На рис. 2 представлены зависимости  $A = A(k, W)$  при различных значениях параметра  $\Pi_1$ . Сечение поверхности, соответствующей ситуации  $\Pi_1 = 0$ , плоскостью



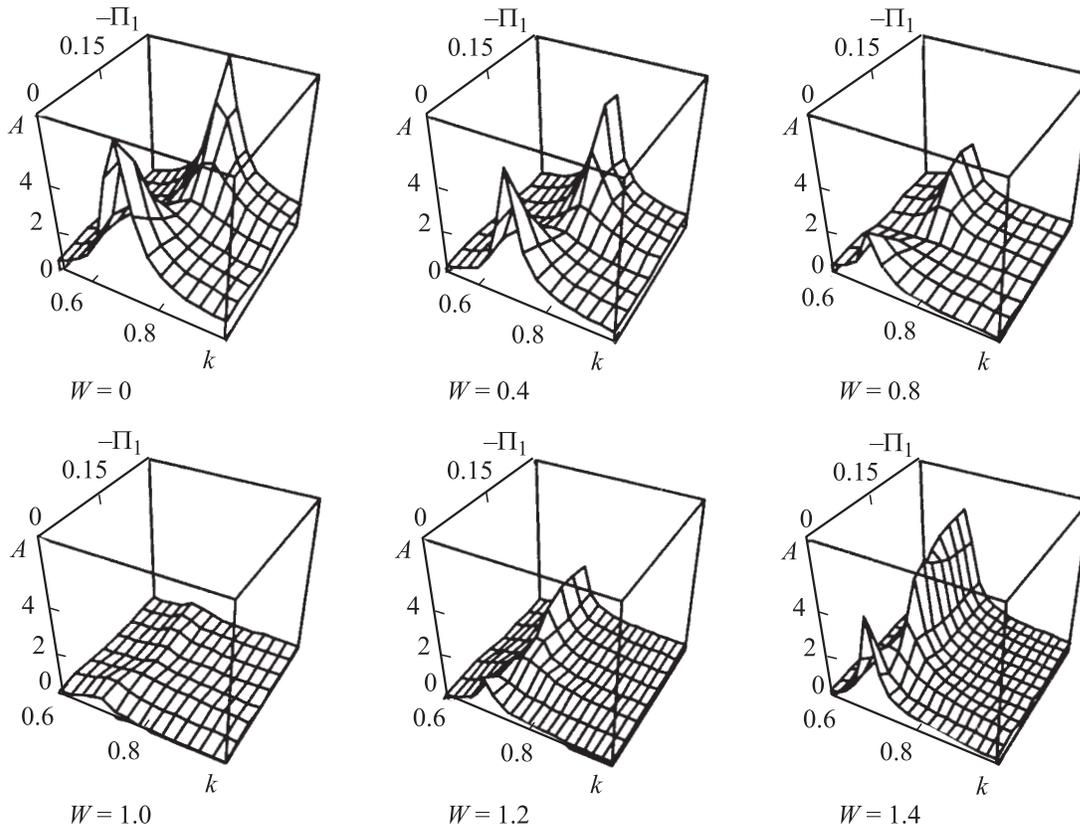
**Рис. 2.** Зависимости  $A = A(k, W)$  безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны от безразмерного волнового числа и параметра  $W$ , характеризующего поверхностную плотность электрического заряда, построенные при различных значениях безразмерного коэффициента  $\Pi_1$ , характеризующего упругость пленки ПАВ.

$W = \text{const}$  соответствует зависимости, представленной линией  $I$  на рис. 1. На рис. 2 при  $\Pi_1 = 0$  четко выделяется резонансный гребень, расположенный над прямой  $k = k_*$ , лежащей в плоскости параметров  $(k, W)$ . Видно, что линия гребня имеет минимум. Положение минимума  $k = k_* \approx 0.70$ ,  $W = 0.5(k_* + k_*^{-1}) \approx 1.06$  определяется как точка на плоскости параметров  $(k, W)$ , в которой пересекаются прямая  $k = k_*$  и кривая (9). Из этого рисунка понятно, что если рассмотреть семейство зависимостей, аналогичных представленным на рис. 1 линией  $I$ , но построенных при различных  $W$ , то высота резонансного гребня на них будет изменяться с увеличением  $W$  немонотонным образом. При увеличении  $W$  от нуля до  $W \approx 1.06$  она уменьшается до близкого к нулю минимума в связи с приближением координат гребня  $(k, W)$  к кривой минимальности нелинейного взаимодействия (9). Дальнейшее увеличение  $W$  связано с удалением положения гребня от кривой (9) и сопровождается ростом величины резонансного максимума, что отражает рост интенсивности нелинейного взаимодействия [3].

## 5. Влияние ПАВ на интенсивность внутреннего нелинейного взаимодействия

Чтобы исследовать влияние наличия пленки ПАВ на интенсивность нелинейного взаимодействия волн, проведем анализ зависимостей величины амплитудного множителя  $A$  от различных исходных параметров.

Семейство поверхностей, приведенных на рис. 2, показывает, как ведет себя зависимость  $A = A(k, W)$  при



**Рис. 3.** Зависимости  $A = A(k, -\Pi_1)$  безразмерного амплитудного множителя поправки второго порядка малости к профилю волны от безразмерного волнового числа и безразмерного параметра  $\Pi_1$ , характеризующего упругость пленки ПАВ, построенные при различных значениях безразмерного параметра  $W$ , характеризующего поверхностную плотность электрического заряда.

различных значениях  $\Pi_1$  — упругости пленки ПАВ (известно [16], что ПАВ, образующие на поверхности жидкости пленки, уменьшают ее поверхностное натяжение и для них  $\Pi_1 < 0$ , в этой связи иллюстративные расчеты проведены для отрицательных значений  $\Pi_1$ ). Из рис. 2 видно, что при увеличении абсолютного значения  $|\Pi_1|$  характер зависимостей  $A = A(k, W)$  изменяется довольно сложным образом. При выбранном значении безразмерной вязкости  $\nu = 0.01$  увеличение значения  $|\Pi_1|$  до величины  $\approx 0.15$  существенно ослабляет интенсивность нелинейного взаимодействия при малых значениях поверхностной плотности заряда  $W < 1$ . Резонансный гребень на зависимости, построенной при  $|\Pi_1| \approx 0.15$ , выделяется весьма слабо. Дальнейшее увеличение  $|\Pi_1|$  приводит к росту интенсивности нелинейного взаимодействия. При  $|\Pi_1| \approx 0.4$  мы получим практически ту же картину взаимодействия, что при  $|\Pi_1| = 0$ . Более внимательный анализ приведенных зависимостей показывает, что кроме воздействия на интенсивность взаимодействия упругость ПАВ влияет на величину резонансного волнового числа (7). После прохождения упругостью ПАВ величины  $|\Pi_1| \approx 0.15$  дальнейшее увеличение  $|\Pi_1|$  связано с появлением резонансного гребня, который при  $W = 0$  берет свое начало не над точкой  $k = k_* \approx 0.7$ , а над значением  $k \approx 0.8$ . Это особенно четко видно из

рис. 1, на котором приведены две зависимости  $A = A(k)$  при  $\Pi_1 = 0$  (кривая 1) и  $\Pi_1 = -0.4$  (кривая 2), значения остальных параметров такие же, как для рис. 2. Величина смещения резонансного значения волнового числа зависит от вязкости и параметра  $W$ . При  $\nu = 0.05$ ,  $\Pi_1 = -0.4$  и  $W = 0$  резонансное значение  $k$  близко к единице, но высота резонансного пика уменьшается до единицы, что существенно ниже высоты пиков, представленных на рис. 1. Увеличение  $W$  возвращает резонансное значение волнового числа к значению  $k_*$  уже при  $W \approx 1$ . Дальнейшее увеличение  $W$  не изменяет положения резонансного гребня над плоскостью параметров  $(k, W)$ .

На рис. 3 показано семейство зависимостей  $A = A(k, -\Pi_1)$  при различных значениях  $W$ . Как и для рис. 2, сечение поверхности, показанной на рисунках плоскостью  $\Pi_1 = 0$ , дает зависимость, представленную на рис. 1 линией 1. Вторая переменная на плоскости аргументов в данном случае не  $W$ , как на рис. 2, а  $-\Pi_1$ . При переходе от семейства зависимостей с рис. 2 к семейству, представленному на рис. 3, параметры  $W$  и  $\Pi_1$ , меняются ролями. Но качественное поведение зависимостей, показанных на рис. 3, оказывается аналогичным тому, которое наблюдалось при анализе семейства зависимостей рис. 2. При  $W = 0$ , когда на интенсивность нелинейного взаимодействия волн влияет только пара-

метр упругости пленки, ясно выделяется резонансный гребень, расположенный над прямой  $k = k_*$ , лежащей в плоскости параметров  $(k, -\Pi_1)$ . Линия гребня имеет минимум при  $-\Pi_1 \approx 0.18$ . В данном случае это значение упругости пленки ПАВ, при котором нелинейное взаимодействие волн минимально. Увеличение параметра  $W$  от нуля до единицы существенно уменьшает высоту резонансного гребня по всей линии его хребта, так что его контуры на рисунке теряют четкость, особенно при малых значениях  $-\Pi_1$ . При  $W > 1$  контуры гребня снова становятся отчетливыми. Линия резонансного гребня на всех зависимостях рис. 3 начинается над точкой  $k = k_*$ . Далее линия гребня до достижения минимума идет над прямой  $k = k_*$ , лежащей в плоскости параметров  $(k, -\Pi_1)$ . После прохождения минимума линия гребня слабо отклоняется в направлении увеличения волновых чисел  $k > k_*$ . Это отклонение незначительно, заметно только при значениях  $W < 1$  и усиливается при увеличении вязкости  $\nu$ .

Проведенный анализ показывает, что, как и поверхностная плотность электрического заряда  $W$ , упругость пленки  $\Pi_1$  существенно влияет на интенсивность нелинейного взаимодействия волн, особенно при значениях волнового числа  $k$ , близких к резонансному. Для иллюстрации этого обстоятельства построена зависимость величины  $A$  от параметров  $W$  и  $-\Pi_1$  при  $k = k_*$  (рис. 4). Из рис. 4 видно, зависимость  $A = A(-\Pi_1, W)$  при  $k = k_*$  имеет весьма сложный характер. Кроме того, расположение различных складок и локальных экстремумов на этой поверхности сильно изменяется при изменении вязкости. Пожалуй, наиболее характерной ее чертой при всех значениях параметров является то, что наи-

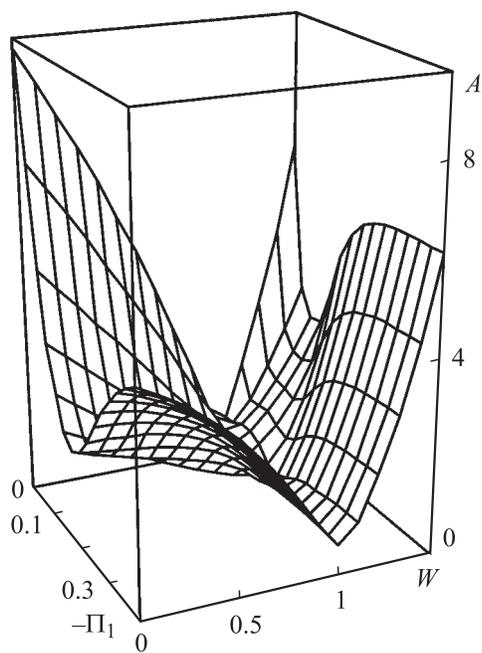


Рис. 4. Зависимость  $A = A(-\Pi_1, W)$ , построенная при  $k = 1/\sqrt{2}$  и  $\Pi_2 = D = 0$ .

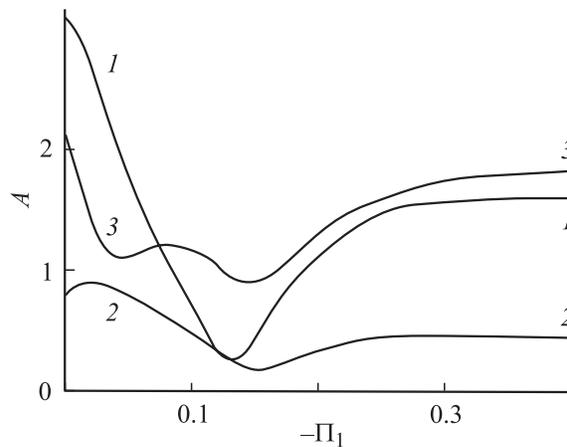


Рис. 5. Зависимость  $A = A(-\Pi_1)$ , построенная при  $k = 1/\sqrt{2}$  и  $\Pi_2 = D = 0$ ,  $W = 1$  (1), 1.2 (2), 0.8 (3).

меньшие значения  $A$  расположены над окрестностью прямой  $W = 1$ , вблизи которой взаимодействие волн оказывается минимальным. Но эти наименьшие значения ненулевые, их величина существенно зависит от величины упругости пленки ПАВ. На рис. 5 показаны зависимости, которые получаются при сечении поверхности, приведенной на рис. 4, плоскостями  $W = 0.8$ ,  $W = 1.0$ ,  $W = 1.2$ . При близких, но разных значениях  $W$  разница в характере влияния ПАВ на интенсивность нелинейного взаимодействия выражена довольно ярко. На практике это означает, что результаты экспериментального исследования влияния пленки ПАВ на формы нелинейных волн с волновым числом  $k \approx k_*$  должны быть весьма чувствительны к величине поверхностного заряда.

## Заключение

Пленка ПАВ существенно влияет на формы профилей нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн с волновыми числами, близкими по величине к резонансному значению: удвоенный квадрат которого равен единице, деленной на квадрат капиллярной постоянной. Зависимость интенсивности нелинейного взаимодействия между отдельными гармониками, формирующими нелинейную капиллярно-гравитационную волну, от упругости пленки имеет немонотонный характер. Существует значение упругости, при котором интенсивность этого взаимодействия минимальна. Это значение существенно зависит от вязкости жидкости. Наличие пленки ПАВ приводит к увеличению резонансного волнового числа, при котором нелинейное взаимодействие волн наиболее интенсивно. Характер влияния пленки ПАВ на интенсивность нелинейного взаимодействия весьма сложным образом зависит от величины поверхностного заряда.

## Приложение

### Вспомогательные величины и соотношения

1. Касательный и нормальный орты к возмущенной свободной поверхности жидкости

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_z;$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_z.$$

2. Правые части соотношений, выражающих математическую формулировку задачи второго порядка малости,

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2} \nabla(U_1^2) + \mathbf{U}_1 \times (\nabla \times (\mathbf{U}_1));$$

$$f_{12} = \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1;$$

$$f_{22} = 2\rho v \xi_1 \partial_{zz} v_1 - \xi_1 \partial_z p_1 - \frac{(\nabla \Phi_1)^2}{8\pi} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \partial_{zz} \Phi_1$$

$$- \chi(\Gamma_1 \partial_{xx} \xi_1 + 2\partial_x \xi_1 \partial_x \Gamma_1);$$

$$f_{32} = \rho v (4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 + \xi_1 \partial_z (\partial_z u_1 + \partial_x v_1) - \beta \Gamma_1 \partial_x \Gamma_1);$$

$$f_{42} = -\xi_1 \partial_z \Phi_1;$$

$$f_{52} = -\partial_x (u_1 \Gamma_1) - \Gamma_0 \left( \xi_1 \partial_{xz} u_1 + \frac{\chi}{\rho v} \partial_x \Gamma_1 \partial_x \xi_1 \right).$$

3. Коэффициенты  $M_j$

$$M_j = \det$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & -k & ik & 0 & R_{1j} \\ \frac{kE_0}{2\pi} & -\rho(S + 4vk^2) & 2\rho vik \sqrt{2(2k^2 + \frac{\xi}{v})} & 0 & R_{2j} \\ 0 & 4i\rho vk^2 & \rho v (4k^2 + \frac{\xi}{v}) & -ik\Pi_1 & R_{3j} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & R_{4j} \\ 0 & -2k^2\Pi_1 & ik\Pi_1 \sqrt{2(2k^2 + \frac{\xi}{v})} & (S + 2k^2 D)\Pi_1 & R_{5j} \end{pmatrix};$$

$$R_{10} = 2S; \quad R_{20} = -(\rho g + 4\gamma k^2); \quad R_{30} = 0;$$

$$R_{40} = -E_0; \quad R_{50} = 0;$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} k$$

$$\times \left( bk \left( 1 - \frac{ic(k^2 - q^2)}{(3k + q)(2S + v(k - q)(3k + q))} \right) - icq \right);$$

$$R_{21} = \frac{1}{4} k \left( bS\rho + 2\rho v (bk^2 - icq^2) + \frac{kE_0^2}{4\pi} + 3dk\Pi_1 \right.$$

$$\left. - \frac{2\rho ibck(k - q)(2S + v(5k^2 + 2kq + q^2))}{(3k + q)(2S + v(k - q)(3k + q))} \right);$$

$$R_{41} = k \frac{E_0}{4\pi};$$

$$R_{31} = -\frac{1}{4} \left( \rho v (cq(5k^2 + q^2) + ik(6bk^2 - d^2\Pi_2)) + \frac{\rho v bck(k^2 - q^2)(5k^2 + 2kq + q^2)}{(3k + q)(2S + v(k - q)(3k + q))} \right);$$

$$R_{51} = \frac{1}{4} k\Pi_1 \left( \frac{dk\Pi_1}{\rho v} - icq(2d + q) + bk \left( 2d + k - \frac{2ic(k - q)(k + q)^2}{(3k + q)(2S + v(k - q)(3k + q))} \right) \right);$$

$$b = -\frac{\omega_0^2 + 2vkqS}{k(S + 2vk(k - q))}; \quad c = \frac{i(\omega_0^2 + S(S + 2vk^2))}{k(S + 2vk(k - q))};$$

$$d = \frac{\omega_0^2(q - k) + qS^2}{(S + Dk^2)(S + 2vk(q - k))};$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{v}}; \quad E_0 = 2\sqrt{\pi W \sqrt{\rho g \gamma}},$$

$i$  — мнимая единица.

4. Безразмерное дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, \delta, \Lambda) = \sqrt{\alpha + \beta^4} \\ \operatorname{Re}(F(\alpha, \beta, \delta, \Lambda)) > 0, \end{cases}$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{vk^2}{\omega_0}}; \quad \Lambda = \frac{k^3\Pi_1}{\rho\omega_0^2}; \quad \delta = \frac{Dk^2}{\omega_0};$$

$$F(\alpha, \beta, \delta, \Lambda) = \left( (\alpha + 2\beta^2)^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda}{\alpha(\alpha + \delta)} \right) \right) \times \left( 4\beta^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha(\alpha + \delta)} \frac{\Delta}{4\beta^4} \right) \right)^{-1}.$$

В общем случае это уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Без ограничения общности корни с отрицательной мнимой частью можно опустить. Это означает, что отбираются корни, отвечающие волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $Ox$ . Среди оставшихся двух корней один отвечает капиллярно-гравитационной волне, а другой — волне, связанной с наличием пленки ПАВ.

Пусть при заданных значениях параметров  $\beta = \beta_*$ ,  $\Lambda = \Lambda_*$ ,  $\delta = \delta_*$  найдены два корня с положительной мнимой частью. В безразмерном дисперсионном соотношении положим  $\beta = \beta_*$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $\delta = \delta_*$  и найдем его корень, который будет иметь положительную мнимую часть. Далее, непрерывно изменяя параметр  $\Lambda$  от  $\Lambda = 0$  до  $\Lambda = \Lambda_*$ , проследим за изменением найденного корня (процедура реализуется численно). При  $\Lambda = \Lambda_*$  этот корень сравняется с одним из тех, что были найдены изначально. Его и примем в качестве корня, соответствующего капиллярно-гравитационной волне.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-929.2003.01) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

## Список литературы

- [1] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [5] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1959. 669 с.
- [6] Lucassen E.H., Lucassen J. // Advan. Colloid Interface Sci. 1969. Vol. 2. P. 347–395.
- [7] Alpers W. // J. Geophys. Res. 1989. Vol. 94. N. 5. P. 6251–6265.
- [8] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 15. С. 61–64.
- [9] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 6. С. 75–59.
- [10] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 2. С. 22–29.
- [11] Боев А.Г., Ясницкая Н.Н. // Изв. РАН. ФАО. 2003. Т. 39. № 1. С. 132–141.
- [12] Simmons W.F. // Proc. Roy. Soc. 1969. Vol. 309. Ser. A. P. 551–575.
- [13] Nayfeh A.H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. Pt. 2. P. 385–395.
- [14] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [15] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [16] Поверхностно активные вещества. Справочник / Под ред. А.А. Абрамзона, Г.М. Гаевского. Л.: Химия, 1979. 376 с.