

01;03

О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 6 апреля 2004 г.)

Проанализирована распространенная в научной литературе ошибка, связанная с формой записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидкостей. В терминах векторного анализа проведен вывод не зависящей от выбора системы координат математической формулировки этого закона, справедливой для произвольной криволинейной поверхности с отличной от нуля кривизной, пригодной для анализа релаксационных феноменов, связанных с нелинейными волновыми движениями.

1. Теоретические исследования влияния феноменов релаксации заряда и поверхностно-активных веществ (ПАВ) на закономерности волновых движений на поверхности раздела жидких сред и ее устойчивость занимают важное место в современной электрогидродинамике и физической химии. Строгая формулировка задач о расчете движения границы раздела сред (или свободной от поверхности жидкости) с учетом эффектов релаксации возможна только для вязкой жидкости, поскольку только в этом случае вклад релаксационных движений жидкости в граничное условие для касательной компоненты тензора напряжений удастся скомпенсировать вязкими напряжениями. На границе раздела (на свободной поверхности) идеальных жидкостей касательные напряжения из-за релаксационных движений остаются некомпенсированными [1–3] и, следовательно, корректная формулировка задач невозможна.

То обстоятельство, что учет релаксационных феноменов возможен лишь для вязких жидкостей, ограничило круг задач о расчете периодических волновых движений жидкости, в которых возможен учет эффектов релаксации, выполненных в линейном приближении по амплитуде волн. Это связано с тем, что до недавнего времени задачи о нелинейных периодических волнах на поверхности жидкости решались лишь в модели идеальной жидкости и только в последние годы разработаны методы решения таких задач для вязкой жидкости [4–6]. Задачи о нелинейных осцилляциях капель и струй вязкой жидкости, эффекты релаксации заряда и ПАВ для которых представляют значительный интерес, до сих пор строго не решены. В итоге все строго решенные к настоящему времени задачи с учетом феноменов релаксации заряда и ПАВ выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций и волн.

В силу некорректного обобщения закона сохранения вещества (заряда или ПАВ) на границе раздела сред, строго выписанного в [1–3] в линейном по амплитуде отклонения виртуальной границы раздела от равновесной плоской поверхности приближении, на случай криволинейных поверхностей в нем оказалось упущенным слагаемое, пропорциональное средней кривизне невозмущенной границы раздела (равное нулю для плоской

поверхности). В итоге значительное количество задач, посвященных исследованию релаксационных явлений на криволинейных поверхностях с отличной от нуля кривизной невозмущенной равновесной поверхности, отталкивавшихся от такого некорректно выписанного закона сохранения вещества, привели к ошибочным результатам (см., например, [7–17]), только в нескольких случаях обсуждаемое слагаемое, записанное в линейном приближении по амплитуде, было учтено, хотя и использовано безо всякого комментария о причине его появления [18–20]. Столь широкое распространение указанной ошибки делает актуальным проведение строгого вывода закона сохранения вещества в форме, пригодной для формулировки и решения нелинейных задач, например, о взаимодействии релаксационных и капиллярных волн (осцилляций формы). Этой проблеме и посвящено настоящее рассмотрение.

2. Примем, что две вязкие несжимаемые несмешивающиеся между собой жидкости разделены поверхностью S . Поле скоростей течения жидкостей $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$, связанное, например, с капиллярным волновым движением, на поверхности S , изменяется непрерывным образом и в любой момент времени в любой точке поверхности S представимо в виде

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\mathbf{n} + U(\mathbf{r}, t)\boldsymbol{\tau},$$

где \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к поверхности S в рассматриваемой точке.

Примем также, что жидкости обладают конечными электропроводностями, а по поверхности раздела распределен электрический заряд и ПАВ так, что при капиллярном волновом движении будут реализовываться эффекты релаксации электрического заряда и ПАВ. Для математической формулировки задачи о расчете капиллярного волнового движения в обсуждаемой системе необходимо выписать законы сохранения электрического заряда и вещества ПАВ на поверхности раздела сред. В этой связи возникает необходимость записи в дифференциальной форме закона сохранения количества вещества ПАВ (электрического заряда) в произвольной точке поверхности S .

Для упрощения следующих ниже рассуждений отметим, что распространенная [7–17] ошибка в записи закона сохранения количества вещества, устранению которой посвящена настоящая работа, никак не связана с наличием или отсутствием в записи закона диффузионных членов, поэтому в дальнейшем, чтобы не загромождать изложение, будем обсуждать бездиффузионную форму его записи. Диффузионные же компоненты полно-го закона сохранения, вид которых хорошо известен [1,3] и не вызывает вопросов, могут быть аддитивно дописаны на заключительной стадии вывода.

Главная цель настоящей работы — показать, что бездиффузионная форма записи закона сохранения вещества на движущейся криволинейной поверхности раздела S двух жидкостей имеет вид

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) + \operatorname{div}_S(\Gamma U \boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (1)$$

В (1) Γ — поверхностная концентрация вещества (заряда или ПАВ); div_S — оператор поверхностной дивергенции.

В [1–3] обсуждаемый закон сохранения можно найти выписанным в координатной форме в линейном приближении по амплитуде считающегося малым поля скоростей, связанного с капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды, которая при переходе к обозначениям векторного анализа переписывается в виде

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}_S(\Gamma U \boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (2)$$

В [2] указано, что запись закона сохранения вещества в форме (2) применима только для плоской поверхности жидкости, однако о том, какой она должна быть в случае движущейся поверхности произвольной формы, ничего не говорится.

Самый простой пример некорректности формулы (2) в применении к криволинейным поверхностям с отличной от нуля средней кривизной равновесной поверхности — модельная задача определения скорости изменения концентрации вещества на поверхности раздувающегося пузырька. Пусть в момент времени t концентрация ПАВ или заряда на поверхности пузырька равна Γ , радиус пузырька — R , а раздувание происходит с постоянной радиальной скоростью $u \equiv dR/dt$. Тогда концентрация ПАВ (заряда), определяемая как масса (заряд), деленная на площадь поверхности пузырька $\Gamma = M/(4\pi R^2)$, изменяется со скоростью $d\Gamma/dt = -2(dR/dt) \cdot M/(4\pi R^3) = -2u\Gamma/R$. Формула (2) дает абсурдный результат $d\Gamma/dt = 0$. Формула же (1), как несложно убедиться, дает правильный результат $d\Gamma/dt = -2u\Gamma/R$.

Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что если в задаче есть механизм изменения концентрации вещества за счет изменения метрических свойств поверхности: растяжения или сжатия ее отдельных частей, то формула (2) приводит к неправильным результатам. Слагаемое $\Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n})$, которым формула (1) отличается

от формулы (2), отвечает за изменения поверхностной концентрации вещества, происходящие в результате локальных растяжений и сжатий, которые происходят на поверхности раздела двух жидкостей во время ее движения и деформации.

В разобранном примере происходит движение сферической поверхности раздела, связанное с изменением объема пузырька. Может сложиться ложное впечатление, что при исследовании осциллирующей малой амплитуды несжимаемых капель и струй достаточно пользоваться, как и в случае волн малой амплитуды на плоской поверхности жидкости [1–3], законом сохранения в форме (2), ввиду того что объем тела, который ограничивает поверхность, неизменен. Именно эта ошибка сделана в работах [7–17]. На самом деле решающим фактором в этом вопросе является не сохранение объема, а кривизна поверхности в равновесном состоянии. Ниже в настоящем рассмотрении будет показано, что даже в случае малых по амплитуде осциллирующей капель и струй закон сохранения вещества нужно использовать в форме (1). Все рассмотрение будет проведено по схеме, использованной в [2] при выводе формулы для давления сил поверхностного натяжения под искаженной виртуальной деформацией свободной поверхностью жидкости.

3. Приведем два утверждения из области векторного анализа и дифференциальной геометрии, которые будут использованы ниже при изложении вывода закона сохранения количества вещества в форме (1).

Первое утверждение — известная формула для вычисления полной производной по времени t от интеграла по конечному движущемуся вместе с жидкостью объему $V(t)$, ограниченному поверхностью ω , способному к объемным деформациям [21, §120; 22, гл. 2, п. 4],

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} C(\mathbf{r}, t) \cdot dV &= \iiint_{V(t)} \frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \\ &+ \iint_{\omega(t)} C(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\omega} \\ &\equiv \iiint_{V(t)} \frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \iint_{\omega(t)} C(\mathbf{r}, t) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) d\boldsymbol{\omega}. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор пространственной точки в инерциальной системе отсчета; $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей в жидкости; $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{N})$ — алгебраическая проекция поля скоростей \mathbf{W} на внешнюю нормаль \mathbf{N} к $\omega(t)$ — замкнутой поверхности, ограничивающей материальный объем $V(t)$. Символом $C(\mathbf{r}, t)$ обозначен параметр, характеризующий некоторое физическое свойство, которым обладает малая движущаяся частичка жидкости. Под $C(\mathbf{r}, t)$ можно понимать, например, локальную концентрацию примеси, температуру, энергию и т.п. Обозначение $V(t)$ слева и справа в формуле (3) имеет разный смысл. Слева $V(t)$ обозначает материальный объем, движущийся вместе с жидкостью. Поток поля $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$

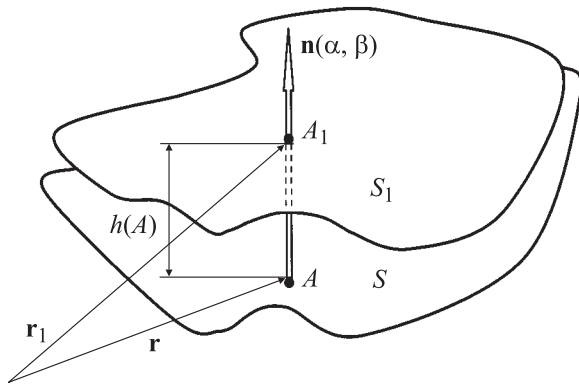


Рис. 1. Схема участка поверхности раздела сред S и виртуальной поверхности S_1 .

через его границу отсутствует, поскольку граница этого объема движется вместе с составляющими ее частичками жидкости. Справа $V(t)$ имеет смысл неподвижного объема, через границы которого происходит протекание жидкости. В рассматриваемый момент времени t геометрические границы обоих объемов совпадают и образуют поверхность $\omega(t)$. Обозначение $\omega(t)$ соответствует неподвижной поверхности, которая в момент времени t совпадает с материальной поверхностью, движущейся вместе с жидкими частичками, расположенными на поверхности, ограничивающей материальный объем $V(t)$.

Второе утверждение — правило преобразования элементарной площадки поверхности S при ее малой деформации в новую, близкую к ней виртуальную поверхность S_1 , посредством смещения каждой точки $A \in S$ по нормали, выходящей из этой точки (рис. 1) на расстояние $h = h(A)$, зависящее от положения точки A . В нашем случае S — конечная часть границы раздела сред.

Пусть радиус-вектор точки A на поверхности S выражается через параметры α и β , имеющие смысл криволинейных координат точки, в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$. Тогда нормаль к этой поверхности в точке A выразится через эти же параметры: $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\alpha, \beta)$. Тогда радиус-вектор точки на поверхности S_1 , получаемой смещением на h всех точек поверхности S вдоль нормали, можно считать зависящим от тех же параметров: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + h \cdot \mathbf{n}$, где $h = h(\alpha, \beta)$ — функция от криволинейных координат точки $A \in S$.

Разность площадей δS поверхностей S_1 и S определяется известным соотношением (см., например, [21, § 139])

$$\delta S = S_1 - S = \iint_S h \operatorname{div}(\mathbf{n}) \cdot dS + o(h). \quad (4)$$

Здесь для обозначения нормали к S использовано обозначение \mathbf{n} , а не \mathbf{N} , как в предыдущем утверждении. Это сделано для того, чтобы различать нормаль \mathbf{N} к поверхности ω и нормаль \mathbf{n} к поверхности S .

В [21] правило (4) записано с использованием значения средней кривизны поверхности H , вычисленного в точке $A \in S$ (рис. 1). В записи (4) учтено соотношение $2H = -\operatorname{div}(\mathbf{n})$, являющееся очевидным следствием известной теоремы Родриго о значении частных производных от орта нормали вдоль направления главных значений кривизны поверхности [23].

Из (4) следует, что чем меньше h , тем точнее выполняется приближенное соотношение между элементарными площадками

$$dS_1 \approx (1 + h \cdot \operatorname{div}(\mathbf{n})) dS. \quad (5)$$

4. Проведем вывод закона сохранения вещества на движущейся криволинейной поверхности S , представляющей собой часть границы раздела двух сред в ситуации, когда поверхностная диффузия отсутствует. Для простоты изложения будем говорить о поверхностно-активном веществе (ПАВ), распределенном с поверхностной плотностью $\Gamma = \Gamma(A, t)$, где $A \in S$, по поверхности раздела жидких сред S (но все сказанное будет справедливо, даже если под Γ понимать поверхностную плотность электрического заряда).

Примем, что функция $\Gamma = \Gamma(A, t)$ обладает всеми частными производными по всем своим аргументам. Примем, что граница поверхности S — простая замкнутая кривая L (рис. 2), достаточно гладкая для применения формул векторного анализа. Будем считать, что на границе раздела сред выполняется условие непрерывности гидродинамического поля скоростей $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$.

а) Пленка ПАВ как предельное положение слоя ПАВ со стремящейся к нулю толщиной. Поверхность S с распределенным по ней ПАВ будем рассматривать как предельное положение слоя конечной толщины h с объемно-распределенным ПАВ. Слой толщины h строится следующим образом. Из исходной поверхности S (рис. 2) смещением по нормали \mathbf{n} всех ее точек на расстояние h , которое для простоты изложения будем считать постоянным, не зависящим от криволинейных координат точки $A \in S$, строится поверхность S_1 . Слой, заключенный между S и S_1 , будем называть h -слоем и обозначать символом Π_h . Значение h считается достаточно малым, чтобы можно было пользоваться формулами (4), (5). Контур L_1 ,

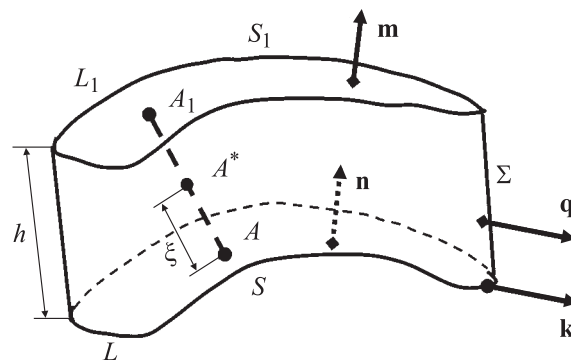


Рис. 2. Схема h -слоя.

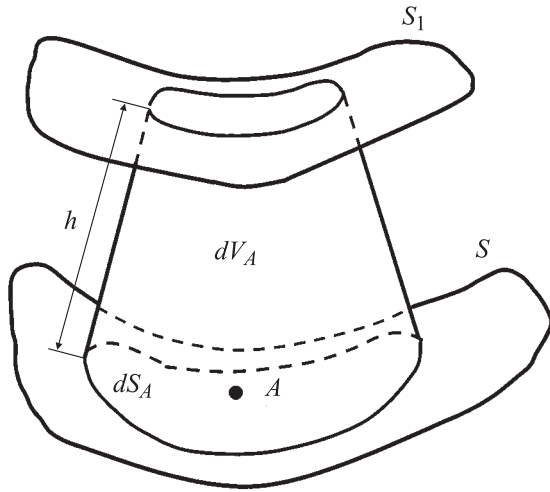


Рис. 3. Схема элементарного объема внутри h -слоя.

ограничивающий поверхность S_1 , будет сформирован точками контура L , смещенными по нормали на дистанцию h (рис. 2). Боковую поверхность h -слоя будем обозначать Σ .

Значение объемной концентрации вещества C_h в h -слое в общем случае зависит от положения точки $A^* \in \Pi_h$ в объеме h -слоя, которое в свою очередь полностью определяется положением точки $A \in S$ и длиной ξ отрезка AA^* , нормального к S (рис. 2). Кроме того, примем, что C_h зависит от времени t . Определим модель объемного заполнения h -слоя веществом с объемной концентрацией $C_h = C_h(A, \xi, t)$; $A \in S$; $0 \leq \xi \leq h$ следующим образом: для семейства функций $C_h = C_h(A, \xi, t)$ потребуем равномерной относительно положения точки A и значений моментов времени $t > 0$ сходимости при $h \rightarrow 0$

$$h C_h(A, \xi, t) \Rightarrow \Gamma(A, t); \quad (h \rightarrow 0, A \in S, t > 0). \quad (6)$$

Условие (6) обеспечивает решающее для дальнейшего изложения свойство h -слоя: h -слой, заполненный ПАВ, при $h \rightarrow 0$ „стягивается“ к поверхности S , концентрация ПАВ на которой будет описываться поверхностной функцией $\Gamma = \Gamma(A, t)$, где $A \in S$.

Действительно, чем тоньше h -слой, тем точнее количество вещества в объеме $dV_A = dS_A \cdot h$, опирающемся на элементарную площадку $dS_A \in S$, содержащую точку A , определяется выражением $C_h(A) dV_A = h C_h(A) dS_A$ (рис. 3). Но, согласно условию (6), при $h \rightarrow 0$ это количество вещества стремится к $\Gamma(A) dS_A$, т.е. к количеству ПАВ, поверхностно распределенному по элементарной площадке dS_A .

Равномерность сходимости в (6) обеспечит корректность предельных переходов, используемых далее.

б) Закон сохранения количества ПАВ на поверхности S в интегральной форме. Пусть h -слой движется вместе с жидкостью. Тогда поток жидкости через ограничивающую его поверхность

$\omega \equiv S \cup \Sigma \cup S_1$ отсутствует и ПАВ через эту поверхность не переносится. Если количество вещества ПАВ в h -слое обозначить M , то условие сохранения ПАВ в нем в соответствии с (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\iiint_{V(t)} C_h \cdot dV \right) \equiv \iiint_{V(t)} \frac{\partial C_h}{\partial t} dV \\ &+ \iint_{S \cup \Sigma \cup S_1} C_h (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) \cdot d\omega = 0; \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \begin{cases} -\mathbf{n} & \text{на } S; \\ \mathbf{m} & \text{на } S_1; \\ \mathbf{q} & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Приведенное определение вектора \mathbf{N} означает, что он представляет собой внешнюю нормаль к объему h -слоя, ограниченного поверхностями S , S_1 , Σ . Считая, что орты нормалей \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{q} к поверхностям $S = S(t)$, $S_1 = S_1(t)$ и $\Sigma = \Sigma(t)$ направлены так, как показано на рис. 2, условие сохранения количества вещества в h -слое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \frac{\partial C_h}{\partial t} dV + \iint_{\Sigma(t)} C_h (\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Sigma \\ + \left(\iint_{S_1(t)} C_h (\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) dS - \iint_{S(t)} C_h (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS \right) = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Несложно найти предельную форму соотношения (7) при $h \rightarrow 0$. Для этого нужно воспользоваться интегральной теоремой о среднем, соотношением (6) и для слагаемых в (7), заключенных в скобки, выражением (5). Детали предельного перехода для отдельных слагаемых, составляющих (7), описаны в Приложении. В результате (7) преобразуется в интегральную форму закона сохранения количества вещества на поверхности S

$$\iint_{S(t)} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dS + \oint_{L(t)} \Gamma (\mathbf{W} \cdot \mathbf{k}) dL + \iint_{S(t)} \Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) dS = 0. \quad (8)$$

Этот закон выполняется для ПАВ на любой конечной поверхности S , ограниченной контуром L , являющейся в момент времени t частью движущейся поверхности раздела двух жидких сред. В (8) орт \mathbf{k} — единичный вектор, касательный к поверхности S , проведенный на границе S в точке $\Lambda \in L$, перпендикулярный контуру L в точке Λ , совпадающей с предельным положением орта внешней нормали \mathbf{q} к боковой поверхности h -слоя при $h \rightarrow 0$ (см. рис. 4).

Соотношение (8) имеет самостоятельный интерес для физико-химической гидродинамики и представляет собой интегральную форму записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела жидких сред.

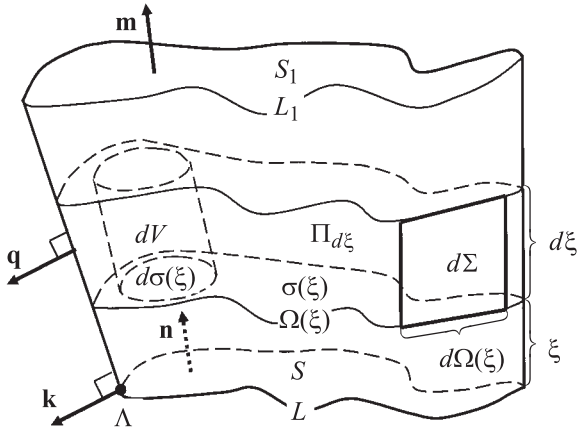


Рис. 4. Схема способа разбиения h -слоя на элементарные объемы dV_A , а его боковой поверхности Σ — на элементарные площадки $d\Sigma$.

в) Закон сохранения количества вещества ПАВ на поверхности S в дифференциальной форме. Если разделить обе части (8) на S , то полученное в итоге выражение будет справедливо для любой части движущейся границы раздела жидких сред. Поэтому оно будет оставаться справедливым, если поверхность S „стянуть“ в точку $A \in S$. При этом первое и последнее слагаемые левой части (8) преобразуются на основании интегральной теоремы о среднем

$$\frac{1}{S} \iint_{S(t)} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dS \rightarrow \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \Big|_{A_0 \in S} \right) \frac{1}{S} \iint_{S(t)} dS \rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \Big|_A; \quad (9)$$

$$\frac{1}{S} \iint_{S(t)} \Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) dS \rightarrow \left(\Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) \Big|_{A_0 \in S} \right) \times \frac{1}{S} \iint_{S(t)} dS \rightarrow \left(\Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) \Big|_A \right). \quad (10)$$

Здесь точка A_0 — некоторая точка на поверхности S (т. е. $A_0 \in S$), определяемая для каждого из интегралов на основании интегральной теоремы о среднем. Положение точки A_0 на плоскости S непринципиально, поскольку $A_0 \rightarrow A$ при стягивании контура L в точку A . Среднее слагаемое в левой части (8), деленное на S , в пределе, когда поверхность S „стягивается“ в точку A , приводит к выражению поверхностной дивергенции в точке A

$$\frac{1}{S} \oint_{L(t)} \Gamma (\mathbf{W} \cdot \mathbf{k}) dL = \frac{1}{S} \oint_{L(t)} \Gamma U (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}) dL \rightarrow \operatorname{div}_S((\Gamma \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau}) \Big|_A. \quad (11)$$

Напомним, что \mathbf{k} есть орт нормали к контуру $L(t)$, а интеграл в левой части (11) представляет собой двумерный поток векторного поля $((\Gamma \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau})$ через границу $L(t)$. Отметим также, что при записи (11) учтено, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \equiv 0$.

Слагаемые в левой части (8) заменим их предельными выражениями по формулам (9)–(11) и, воспользовавшись тем, что точка $A \in S$ была выбрана произвольно, опустим указание на вычисление выражений в точке A . В итоге мы получим закон сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидкостей в дифференциальной форме (1), что и требовалось доказать.

5. Рассмотрим случай плоской поверхности жидкости, заполняющей все или часть полупространства $z < 0$ в системе координат $Oxyz$ с осью Oz , направленной против направления силы тяжести. Если по этой поверхности в направлении оси Ox начинают распространяться волны, то на отклоненной от равновесного состояния поверхности $z = \xi(x, t)$ векторы нормали и касательной имеют вид

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_z;$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \mathbf{e}_z.$$

Здесь \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — орты декартовых осей. Если движение жидкости для простоты считать независимым от координаты y , то $\mathbf{U} = w \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_z$ и условие (1) в координатной форме имеет вид

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{1}{1 + (\partial_x \xi)^2} \left(\partial_x (\Gamma \cdot w) + \partial_x \xi (\Gamma \cdot \partial_z w + \partial_x (v \cdot \Gamma)) + (\partial_x \xi)^2 \Gamma \cdot \partial_z v \right) + D = 0. \quad (12)$$

Здесь символом D обозначены ранее отброшенные диффузионные члены. Именно в таком виде закон сохранения использован авторами работы [19]. В первом приближении по амплитуде волны из (12) получится выражение, использованное в [1,2],

$$z = 0: \quad \frac{\partial}{\partial t} + \partial_x (\Gamma \cdot w) + D = 0.$$

6. Рассмотрим ошибку в записи закона сохранения вещества на поверхности капле и струй, совершающих малые по амплитуде осцилляции в окрестности своей равновесной формы: для капли это сфера радиуса R , а для струи — цилиндрическая поверхность радиуса R . В приближении малой амплитуды осцилляций среднее слагаемое в (1), пропорциональное средней кривизне поверхности, является величиной первого порядка малости и описывается выражениями для капли радиуса R

$$\Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) \approx \frac{2}{R} \Gamma^{(0)} u^{(1)},$$

для струи радиуса R

$$\Gamma u \operatorname{div}(\mathbf{n}) \approx \frac{1}{R} \Gamma^{(0)} u^{(1)}.$$

Здесь $\Gamma^{(0)}$ — равновесное значение равномерной концентрации вещества (заряда или ПАВ) на невозмущенной сферической или цилиндрической поверхности; $u^{(1)}$ — радиальная скорость жидкости, выписанная в первом приближении по амплитуде колебаний.

В случае волн на плоской поверхности жидкости при расчетах в линейном приближении по их амплитуде среднее слагаемое в (1) равно нулю вследствие нулевой кривизны равновесной плоской поверхности.

Заключение

Проведенный вывод закона сохранения количества вещества на движущейся поверхности раздела жидких сред указывает на необходимость учета в нем слагаемого, пропорционального средней кривизне невозмущенной поверхности раздела, которым часто ошибочно пренебрегают при расчетах релаксационных движений на криволинейной поверхности раздела в линейном приближении по отклонению поверхности от равновесной формы. В расчетах более высоких порядков малости, чем первый, учет такого слагаемого необходим не только для криволинейных поверхностей раздела сред, но и для плоской поверхности.

Использованная бескоординатная форма записи закона сохранения количества вещества на движущейся поверхности раздела жидких сред в терминах векторного анализа легко применима для формулировки и решения задач о влиянии эффектов релаксации заряда и поверхностно-активных веществ на закономерности эволюции границ раздела жидких фаз независимо от формы равновесной во внешних силовых полях поверхности и степени ее деформации в процессе движения. Это обстоятельство особенно актуально для современных исследований, связанных с построением нелинейных моделей волнового периодического движения на заряженной поверхности вязких жидкостей с конечной электропроводностью, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества.

Приложение

Предельный переход к бесконечно малой толщине для интегральных слагаемых из условия сохранения количества вещества в h -слое для соотношения (7)

1) Первое слагаемое из левой части соотношения (7). Рассмотрим сечение h -слоя поверхностью $\sigma = \sigma(\xi)$ (рис. 4), которая получается смещением точек поверхности S по нормали к S на расстояние $0 \leq \xi \leq h$. При $\xi = 0$ имеем $\sigma(0) \equiv S \equiv S(t)$, а при $\xi = h$ получается $\sigma(h) \equiv S_1(t)$. Для слоя $\Pi_{d\xi}$ малой по сравнению с h толщины $d\xi$, который опирается на $\sigma(\xi)$, элемент объема равен $dV = d\xi d\sigma(\xi)$ (рис. 4). Такие элементарные объемы послойно заполняют весь объем V , и построенная с их помощью интегральная сумма для первого интеграла

из левой части (7) в пределе $dV \rightarrow 0$ превращается в повторный интеграл

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial C_h}{\partial t} dV = \int_0^h d\xi \iint_{\sigma(\xi)} \frac{\partial C_h}{\partial t} d\sigma(\xi).$$

По интегральной теореме о среднем существует значение $\xi = \xi^* \in [0, h]$, такое что

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \frac{\partial C_h}{\partial t} dV &= h \iint_{\sigma(\xi^*)} \frac{\partial C_h}{\partial t} d\sigma(\xi^*) \\ &= \iint_{\sigma(\xi^*)} \frac{\partial(h \cdot C_h)}{\partial t} d\sigma(\xi^*). \end{aligned}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что h принято постоянным. В пределе $h \rightarrow 0$ имеем $\xi^* \rightarrow 0$; $\sigma(\xi^*) \rightarrow S(t)$, кроме того, выполняется соотношение (6). Поэтому легко находится предел

$$h \rightarrow 0 : \quad \iiint_{V(t)} \frac{\partial C_h}{\partial t} dV \rightarrow \iint_{S(t)} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dS.$$

2) Второе слагаемое из левой части соотношения (7). Рассмотрим сечение h -слоя поверхностями $\sigma(\xi)$, введенными в предыдущем (рис. 4). Пусть $\Omega = \Omega(\xi)$ — контур, который получается в результате пересечения Σ — боковой поверхности h -слоя с поверхностью $\sigma(\xi)$. Очевидно, что $\Omega(0) = L$; $\Omega(h) = L_1$ (рис. 4). На боковой поверхности $\Pi_{d\xi}$ слоя, определенного в предыдущем пункте, можно выделить элементарную площадку $d\Sigma = d\xi d\Omega(\xi)$ (рис. 4). Боковые поверхности слоев $\Pi_{d\xi}$, состоящие из таких элементарных площадок, образуют полосы, заполняющие в свою очередь всю боковую поверхность Σ объема V . В итоге получим разбиение боковой поверхности h -слоя Σ на элементарные площадки, с помощью которого интегральная сумма для второго интеграла из левой части соотношения (7) в пределе $d\Sigma \rightarrow 0$ преобразуется в повторный интеграл

$$\iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Sigma = \int_0^h d\xi \oint_{\Omega(\xi)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Omega(\xi).$$

Согласно интегральной теореме о среднем, существует значение $\xi = \xi^* \in [0, h]$, такое что

$$\begin{aligned} \iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Sigma &= \int_0^h d\xi \oint_{\Omega(\xi)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Omega(\xi) \\ &= h \oint_{\Omega(\xi^*)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Omega(\xi) = \oint_{\Omega(\xi^*)} h C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Omega(\xi). \end{aligned}$$

В пределе $h \rightarrow 0$ имеем $\xi^* \rightarrow 0$, $\Omega(\xi^*) \rightarrow L(t)$, кроме того, выполняется соотношение (6) и имеет место предельный переход $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{k}$, где \mathbf{k} — орт касательной

к поверхности S , который перпендикулярен к L в рассматриваемой точке $\Lambda \in L$ (рис. 4). Поэтому легко вычисляется предел

$$h \rightarrow 0: \quad \iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{q}) d\Sigma \rightarrow \oint_{L(t)} \Gamma(\mathbf{W} \cdot \mathbf{k}) dL.$$

3) Слагаемые в скобках из левой части соотношения (7) могут быть преобразованы с учетом (5) в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\iint_{S_1(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) dS_1 - \iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\iint_{S(t)} C_h^+(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) dS + \iint_{S(t)} h C_h^+(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) \operatorname{div}(\mathbf{n}) dS \right. \\ & \left. - \iint_{S(t)} C_h^0(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS \right). \end{aligned}$$

Значение концентрации вещества ПАВ C_h во внутренней точке h -слоя A^* (рис. 2) зависит от положения точки $A \in S$ и длины ξ отрезка AA^* , нормального к S : $C_h = C_h(A, \xi, t)$. В выписанном соотношении использованы обозначения $C_h^0 \equiv C_h(A, 0, t)$ и $C_h^+ \equiv C_h(A, h, t)$.

В правой части выписанного соотношения величины первого и последнего интегралов стремятся к бесконечности при $h \rightarrow 0$. Чтобы оценить скорость стремления этих интегралов к бесконечности, рассмотрим на основании соотношения (6) асимптотическое поведение объемной концентрации вещества ПАВ C_h при $h \rightarrow 0$. Для того чтобы соотношение (6) выполнялось, необходимо, чтобы

$$C_h(A, \xi, t) \sim \frac{\Gamma(A, t)}{h} \rightarrow \infty \quad (h \rightarrow 0).$$

С другой стороны, из произвольности ξ в этом асимптотическом выражении следуют асимптотические формулы

$$h \rightarrow 0: \quad \left. \begin{aligned} C_h^+ &= C_h(A, h, t) \sim \frac{\Gamma(A, t)}{h} \\ C_h^0 &= C_h(A, 0, t) \sim \frac{\Gamma(A, t)}{h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_h^0 \rightarrow C_h^+.$$

Кроме того, непрерывность поля скоростей \mathbf{U} означает, что $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) \rightarrow (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})$ при $h \rightarrow 0$. В итоге при $h \rightarrow 0$ первый и последний интегралы взаимно компенсируют друг друга, что позволяет записать предельное соотношение в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\iint_{S_1(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) dS_1 - \iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\iint_{S(t)} h C_h^0(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) \operatorname{div}(\mathbf{n}) dS \right). \end{aligned}$$

Предел в правой части выписанного соотношения можно вычислить на основании (6), которое выполняется, в частности, и для $C_h^0 \equiv C_h(A, 0, t)$. Кроме того,

необходимо принять во внимание то обстоятельство, что при $h \rightarrow 0$: $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) \rightarrow (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) = U$. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\iint_{S_1(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{m}) dS_1 - \iint_{S(t)} C_h(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS \right) \\ &= \iint_{S(t)} \Gamma U \operatorname{div}(\mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант № МК-929.2003.01) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1959, 669 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [3] Melcher J.R. Field-coupled Surface Waves. A Comparative Study of Surface Coupled Electrohydrodynamics and Magneto hydrodynamics Systems. Cambridge, 1963. 190 p.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
- [5] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
- [6] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [7] Saville D. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827
- [8] Гиневский А.Ф., Мотин А.И. // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 576–581.
- [9] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
- [10] Gonzalez A., Castellanos A., Velarde M.G. // Fluid Physics. Proc. Summer Schools. World Scientific, 1994. P. 442–459.
- [11] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. N 2. P. 311–326.
- [12] Шкадов В.Я., Шутов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 29–40.
- [13] Шутов А.А., Шкадов В.Я. // Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. Вып. 1. Калуга, 2000. С. 67–88.
- [14] Jean-Marc Chomaz // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 442. P. 387–409.
- [15] Shkadov V.Ya., Shutov A.A. // Fluid Dynamic Res. 2001. Vol. 28. P. 23–39.
- [16] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–80.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 19–27.
- [18] Hui-Lan Lu, Apfel R.E. // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 222. P. 351–368.
- [19] Wu-Ting Tsai, Dick K.P. // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 289. P. 315–349.
- [20] Братухин Ю.К., Косвинцев С.Р., Макаров С.О. // Коллоид. журн. 2001. Т. 63. № 3. С. 259–365.
- [21] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1957. 628 с.
- [22] Серрин Дж. Математические основы классической механики. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001. 256 с.
- [23] Математическая Энциклопедия / Под ред. И.М. Виноградова. М.: СЭ, 1984. Т. 4. 1216 с.