

01;06

## Дисперсионные свойства циклотронных волн в периодической структуре полупроводник—диэлектрик

© А.А. Булгаков, В.К. Кононенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,  
61085 Харьков, Украина  
e-mail: bulgakov@ire.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 22 октября 2003 г.)

Рассчитан и проанализирован зонный спектр циклотронных волн слоисто-периодической структуры полупроводник—диэлектрик в магнитном поле вдоль оси периодичности при распространении волн под углом к магнитному полю. Исследованы особенности и отличия зонных спектров для двух вариантов соотношения характеристических частот полупроводника:  $\omega_H < \omega_p$  и  $\omega_H > \omega_p$ . Найдены и проанализированы распределения полей по слоям и периоду структуры. Установлено, что формирование зон пропускания обоих спектров сопровождается выполнением условия размерного резонанса на толщине полупроводникового слоя. С помощью графического решения дисперсионного уравнения показана возможность разделения спектра циклотронных волн на два спектра нормальных волн, соответствующих блоховским волновым числам периодической структуры. Показаны и проанализированы случаи взаимного дополнения и наложения зонных спектров.

### Введение

Ранее в работе [1] был исследован зонный спектр электромагнитных волн периодической полупроводниковой структуры при распространении волн под углом к магнитному полю, направленному вдоль оси периодичности. Особенность рассмотренной задачи и ее отличие от работы [2], где направления периодичности, распространения волны и магнитного поля совпадают, и от работ [3–5], где направление периодичности и плоскость распространения волны перпендикулярны магнитному полю, заключаются в том, что уравнения Максвелла для гиротропной среды не разделяются по компонентам полей на две независимые поляризации, а нормальными волнами среды являются волны эллиптической поляризации с шестью компонентами поля у каждой из них [6]. В [1] также было показано, что в зонном спектре существует специфический тип электромагнитных волн — циклотронные волны, которые образуют многочисленные зоны пропускания. В данной работе изучены особенности зонной структуры спектра циклотронных волн и исследовано распределение их полей в слоях и на периодах структуры.

### Основные соотношения

Рассматривается неограниченная периодическая структура, образованная чередующимися слоями полупроводника толщиной  $d_1$  и диэлектрика толщиной  $d_2$ , находящаяся в постоянном магнитном поле, направленном вдоль оси периодичности (ось  $z$ ). Дисперсионное уравнение, описывающее распространение волн в такой структуре, можно найти методом матрицы преобразования [7]. Оно имеет следующий вид [1]:

$$\xi^4 + B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + 1 = 0, \quad (1)$$

где  $\xi = \exp(i\bar{k}d)$ ,  $\bar{k}$  — блоховское волновое число;  $d = d_1 + d_2$  — период структуры; коэффициенты  $B_1$ – $B_3$  выражаются через элементы матрицы преобразования одного периода, связывающей поля в начале и в конце периода структуры.

Численно было показано [1], что при пренебрежении процессами диссипации дисперсионное уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\cos \bar{k}_1 d = -\frac{a_1}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \bar{k}_2 d = -\frac{a_2}{2}. \quad (3)$$

Уравнение (1) и выражения (2), (3) связаны следующим соотношением:

$$a_{1,2} = \frac{B_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B_2}{2}\right)^2 + 2 - B_2}. \quad (4)$$

Оно находится как решение квадратного уравнения и, следовательно, коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  могут принимать как действительные, так и комплексно-сопряженные значения.

Возможность представления дисперсионной зависимости в виде уравнений (2), (3) означает существование двух спектров волн, каждый из которых характеризуется соответствующим блоховским волновым числом  $\bar{k}_1$  или  $\bar{k}_2$ . С физической точки зрения эти спектры соответствуют, как и в любой анизотропной среде, существованию двух нормальных волн, в общем случае поляризованных эллиптически [6]. В полосах пропускания этих спектров значения блоховских волновых чисел вещественные и должны выполняться условия  $|a_{1,2}| \leq 2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — действительные числа. Во всех остальных случаях  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$  — комплексные числа, характеризующие полосы непропускания. Из независимости уравнений (2)

и (3) следует возможность взаимного дополнения и наложения соответствующих спектров нормальных волн.

Для понимания физических процессов, происходящих при наличии двух зонных спектров, необходимо знание особенностей их формирования и распределения электромагнитных полей по слоям структуры. Это требует нахождения независимых выражений для компонентов полей в материале каждого слоя.

Методика нахождения полей в гиротропной среде дана в [8]. Компоненты полей в этом случае выражаются через дифференциальные операторы и скалярную функцию  $\Psi(x, y, z)$ , определяющую зависимость составляющих поля от координаты  $z$  в направлении постоянного магнитного поля  $B_0$ . Для рассматриваемой конфигурации периодической структуры эта функция записывается в виде суммы собственных решений волнового уравнения

$$\Psi = (A_1 \cos k_{z1} z + A_2 \sin k_{z1} z + A_3 \cos k_{z2} z + A_4 \sin k_{z2} z) \exp[i(k_x x + k_y y)]. \quad (5)$$

Здесь  $k_{z1}$  и  $k_{z2}$  — волновые числа, описывающие поперечное распределение поля для двух нормальных волн в слоях полупроводника с тензором диэлектрической проницаемости [9],

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_L \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \right], \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_L \omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega_H^2 - \omega^2)},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_L \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right],$$

$\varepsilon_L$  — диэлектрическая проницаемость решетки полупроводника;  $\omega_p$ ,  $\omega_H$  — плазменная и циклотронная частоты;  $\omega$  — частота электромагнитной волны.

Выражения для поперечных волновых чисел имеют вид

$$k_{z1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ 2\varepsilon_1 k_0^2 - \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) k_{xy}^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 2\varepsilon_1 k_0^2 - \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) k_{xy}^2 \right]^2 - \varepsilon_1 \left[ \varepsilon_V k_0^4 + \frac{k_{xy}^4}{\varepsilon_3} - \left( 1 + \frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_3} \right) k_{xy}^2 k_0^2 \right]}, \quad (7)$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,  $\varepsilon_V = \varepsilon_1 - (\varepsilon_2^2/\varepsilon_1)$  — фойгтовская диэлектрическая проницаемость,  $k_{xy} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

После подстановки функции  $\Psi(x, y, z)$  в соответствующие выражения для полей [8,9] получаем выражения для поперечных к направлению магнитного поля (или направлению периодичности) компонентов полей в полупроводнике

$$E_{x,y} = C_{1,3} A_1 \cos k_{z1} z + C_{1,3} A_2 \sin k_{z1} z + C_{2,4} A_3 \cos k_{z2} z + C_{2,4} A_4 \sin k_{z2} z, \quad (8a)$$

$$H_{x,y} = -D_{1,3} A_1 \sin k_{z1} z + D_{1,3} A_2 \cos k_{z1} z - D_{2,4} A_3 \sin k_{z2} z + D_{2,4} A_4 \cos k_{z2} z, \quad (8b)$$

где  $C_{1,2} = (ik_y Q_{1,2} - \varepsilon_2 k_x P) S$ ;  $D_{1,2} = k_{z1,2} (k_x/k_0 Q_{1,2} - i\varepsilon_2 k_0 k_y) S$ ;  $C_{3,4} = (-ik_x Q_{1,2} - \varepsilon_2 k_y P) S$ ;  $D_{3,4} = k_{z1,2} \times (k_y/k_0 Q_{1,2} + i\varepsilon_2 k_0 k_x) S$ ;  $P = k_0^2 - k_{xy}^2/\varepsilon_3$ ;  $Q_{1,2} = \varepsilon_1 P - k_{z1,2}^2$ ;  $S = \exp[i(k_x x + k_y y)]$ .

Для диэлектрической среды выражения для поперечных к направлению магнитного поля компонент волны можно получить из уравнений Максвелла. Для плоской волны  $\exp[-i(\omega t - \mathbf{kr})]$  компоненты полей в произвольной точке  $z$  диэлектрика, выраженные через поля в точке  $z = 0$ , принимают следующий вид:

$$E_{x,y}(z) = F_1 \cdot E_{x,y}(0) + \frac{F_{2,4}}{\varepsilon} H_x(0) - \frac{F_{3,2}}{\varepsilon} H_y(0), \quad (9a)$$

$$H_{x,y}(z) = -F_{2,4} \cdot E_x(0) + F_{3,2} \cdot E_y(0) + F_1 \cdot H_{x,y}(0). \quad (9b)$$

Здесь

$$F_1 = \cos k_z z, \quad F_2 = i \frac{k_x k_y}{k_0 k_z} \sin k_z z,$$

$$F_3 = i \frac{(k_x k_y)^2 + \varepsilon (k_0 k_z)^2}{k_0 k_z (k_y^2 - \varepsilon k_0^2)} \sin k_z z,$$

$$F_4 = i \frac{k_y^2 - \varepsilon k_0^2}{k_0 k_z} \sin k_z z,$$

$k_z = \sqrt{\varepsilon k_0^2 - k_{xy}^2}$ ,  $\varepsilon$  — проницаемость диэлектрика.

Таким образом, получены две системы уравнений (8) и (9), состоящие из независимых выражений для поперечных к направлению магнитного поля компонент полей в полупроводнике и диэлектрике. Каждая из них содержит по четыре неизвестных коэффициента:  $E_x(0)$ ,  $E_y(0)$ ,  $H_x(0)$ ,  $H_y(0)$  и  $A_1$ – $A_4$ . Для их нахождения воспользуемся четырьмя граничными условиями для компонентов полей на границе раздела слоев:

$$L_i^{(s)}|_{z=d_1} = L_i^{(d)}|_{z=d_1}, \quad (10)$$

где  $L_i^{(s)}$  и  $L_i^{(d)}$  — параллельные границам слоев компоненты полей ( $i = x, y$ ) соответственно в полупроводнике и в диэлектрике, и четырьмя условиями периодичности (теорема Флоке) на границах периода структуры:

$$L_i^{(s)}|_{z=0} \exp(-i\bar{k}d) = L_i^{(d)}|_{z=d}. \quad (11)$$

Полученная в результате система из восьми уравнений является линейной и однородной, коэффициенты которой могут быть выражены через любой из них. Таким образом, задача нахождения поперечных компонент полей в слоях структуры сводится к решению системы семи линейных неоднородных уравнений.

### Зонная структура спектра и распределение полей

При численном исследовании дисперсионных уравнений (2), (3) рассмотрены два варианта выбора параметров периодической структуры, отличающиеся соотношением характеристических частот полупроводника:  $\omega_H < \omega_P$  ( $B_0 = 0.05 T$ ) и  $\omega_H > \omega_P$  ( $B_0 = 0.23 T$ ). В расчетах были приняты следующие значения: полупроводниковый слой —  $n\text{-InSb}$  с концентрацией электронов  $3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\epsilon_L = 17.8$ ,  $d_1 = 0.01 \text{ cm}$ ; диэлектрический слой — с  $\epsilon_2 = 2.0$ ,  $d_2 = 0.03 \text{ cm}$ .

Зонный спектр циклотронных волн для первого варианта показан на рис. 1. Особенностью этой области спектра, определяющей его вид, является то, что при выполнении условий  $\omega \leq \omega_H$  и  $k_{xy} \gg k_0$  выражения для  $k_{z1}$  и  $k_{z2}$  в полупроводнике принимают вид

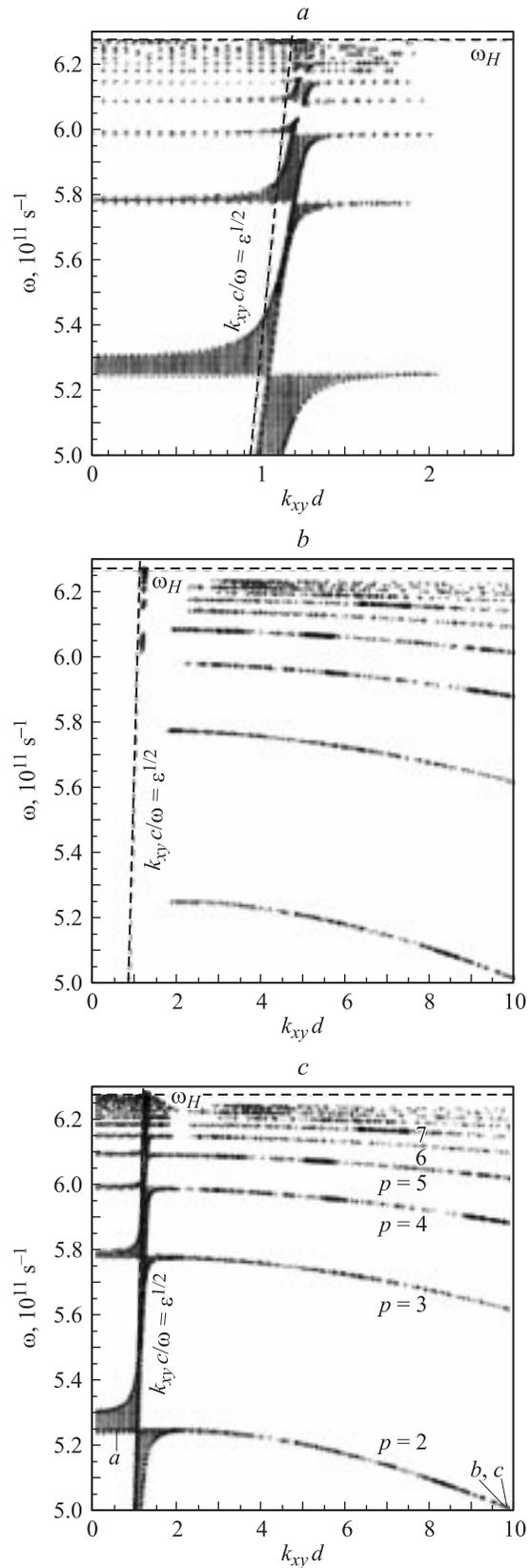
$$k_{z1} \approx \pm \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}} \cdot k_{xy}, \quad (12)$$

$$k_{z2} \approx \pm i k_{xy}, \quad (13)$$

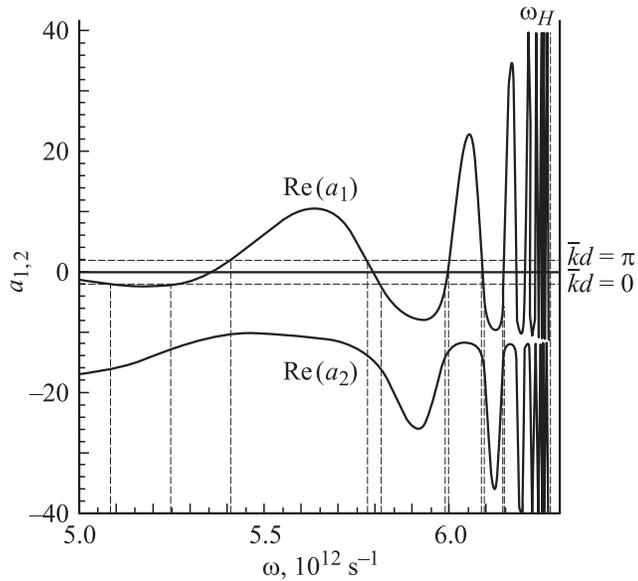
т.е. при возрастании параметра  $k_{xy}d$  поперечное волновое число для одной из парциальных волн в полупроводнике мнимое, в то время как для другой оно остается действительным числом. Этим определяется и характер полей этих волн как поверхностный, т.е. экспоненциально спадающий от границы раздела внутрь слоя, для одной и как объемный (волноводный) для другой волны. Для объемной волны в полосах пропускания выполняется условие размерного резонанса  $k_{z1}d_1 = p\pi$ , где  $p$  — целое число, характеризующее число полувольт, укладывающихся на толщине полупроводникового слоя.

Формирование зонного спектра в виде чередования ступающихся по мере приближения к циклотронной частоте полос пропускания и непропускания поясняется на рис. 2. Он представляет собой графическое решение дисперсионных уравнений (2) и (3) и определяет положение полос пропускания, соответствующих интервалу значений  $-2 \leq \text{Re}(a_{1,2}) \leq 2$  при  $\text{Im}(a_{1,2}) = 0$  в формуле (4). Видно, что формирование этой области спектра ( $k_{xy}d = 1$  на рис. 1, *a*) связано только с решениями дисперсионного уравнения (2), так как значения  $\text{Re}(a_2)$  в уравнении (3) не попадают в указанный интервал и лежат ниже полосы пропускания с границами  $\bar{k}d = 0$  и  $\bar{k}d = \pi$  на рис. 2. В противоположность этому формирование зонного спектра в области  $k_{xy}d > 2$  (рис. 1, *b*) связано только с решениями уравнения (3). Таким образом, на примере этого варианта выбора характеристических частот наглядно видно, как дисперсионные зависимости для  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$  взаимно дополняют соответствующие им спектры, образуя результирующий спектр периодической структуры, показанный на рис. 1, *c*.

Особенностью области циклотронных волн является ее расположение в полном зонном спектре периодической структуры [1], обеспечивающее наименьшие по



**Рис. 1.** Зонные спектры циклотронных волн, соответствующие блоховским волновым числам  $\bar{k}_1$  (a),  $\bar{k}_2$  (b) и результирующий зонный спектр (c). Соотношение частот:  $\omega_H < \omega_P$ . Зоны пропускания закрашены. Порядок полувольтного резонанса в полупроводниковом слое:  $p = 2, 3, 4, \dots$



**Рис. 2.** Графическое решение дисперсионных уравнений (1), (2) при  $k_{xy}d = 1$ . Соотношение частот:  $\omega_H < \omega_P$ . Вертикальные штриховые линии — частотные границы зон пропускания и непропускания.

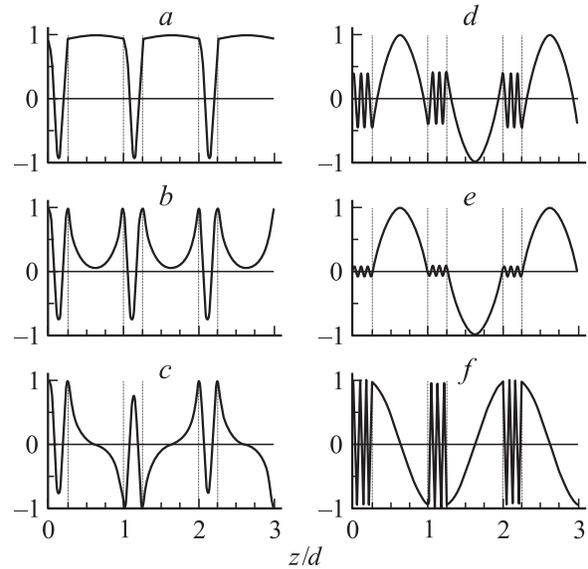
сравнению с другими областями спектра значения фазовой скорости волны в полосах пропускания. И поскольку одно из поперечных волновых чисел в полупроводнике остается действительным при возрастании  $k_{xy}d$ , то и протяженность зон пропускания в область высоких значений  $k_{xy}$  может быть весьма значительной. Учет диссипативных потерь в полупроводнике, однако, должен изменить ход зоны пропускания в спектре, ограничив максимальное значение волнового числа  $k_{xy}$  и соответственно минимальное значение фазовой скорости. Поэтому важное значение приобретает задача нахождения зонного спектра циклотронных волн с учетом процессов диссипации.

Распределение полей по слоям на трех периодах структуры в различных областях зонного спектра показано на рис. 3. Оно представляет собой интерференционную картину, образованную суперпозицией парциальных волн слоев и их многократных переотражений от границ структуры. Так, в точке  $a$  спектра на рис. 1,  $c$  выполняется условие размерного резонанса и на толщине полупроводникового слоя укладывается две полуволны, что и отражается в картине распределения поля на рис. 3,  $a$ . В диэлектрическом слое волна также имеет объемный характер ( $k_z$  действительное). Распределение поля симметрично относительно середины слоя. Поскольку точка  $a$  выбрана на границе зоны  $\bar{k}_1d = 0$ , то картина поля повторяется через один период структуры.

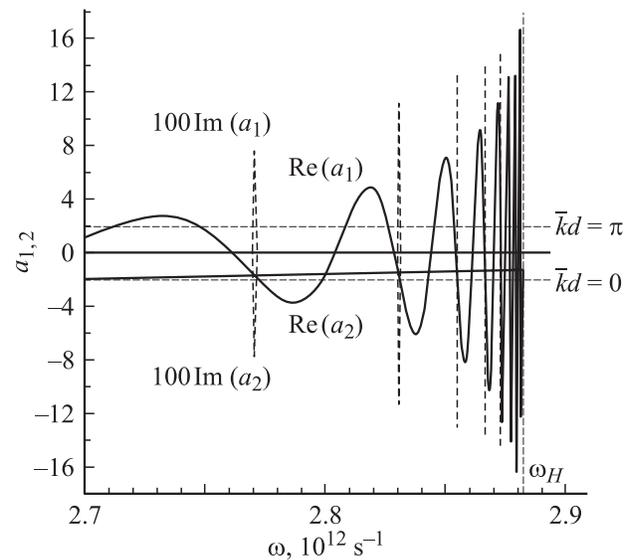
Точки  $b$  и  $c$  спектра отличаются от предыдущей тем, что здесь в диэлектрическом слое волна имеет поверхностный характер ( $k_z$  мнимое) и поле убывает в глубь слоя по экспоненциальному закону. Распределение повторяется через период структуры для границы зоны

$\bar{k}_2d = 0$  (рис. 3,  $b$ ) и через два периода для границы зоны  $\bar{k}_2d = \pi$  (рис. 3,  $c$ ).

Второй вариант соотношения характеристических частот полупроводника  $\omega_H > \omega_P$  отличается от предыдущего тем, что в полупроводниковом слое теперь оба поперечные волновые числа  $k_{z1,2}$  действительные. Процесс формирования зонного спектра в некоторой фиксированной области ( $k_{xy}d = 2.6$ ) для этого случая поясняется рис. 4.



**Рис. 3.** Распределение действительной части  $E_x$ -компонента электромагнитного поля по слоям на трех периодах структуры.  $a-c$  — поля в соответствующих точках спектра на рис. 1,  $c$ ,  $d-f$  — то же для спектра на рис. 5. Поля нормированы на амплитудные значения.



**Рис. 4.** Графическое решение дисперсионных уравнений (1), (2) при  $k_{xy}d = 2.6$ . Соотношение частот  $\omega_H > \omega_P$ .

Видно, что в интервал значений, соответствующий полосам пропускания, попадают решения обоих дисперсионных уравнений (2) и (3). Сложность анализа такого спектра связана с тем, что представленные здесь зависимости для  $a_1$  и  $a_2$  дают границы зон для всего спектра, в целом не разделяя их по двум нормальным волнам структуры. Это является следствием того, что в формуле (4), по которой проведен расчет, значению  $a_1$  всегда соответствует знак „плюс“ перед радикалом, а значению  $a_2$  — знак „минус“. Поэтому верхние участки зависимостей, приведенных на рис. 4 и показанных тонкими линиями, формально относятся к одному из спектров, а нижние участки — к другому.

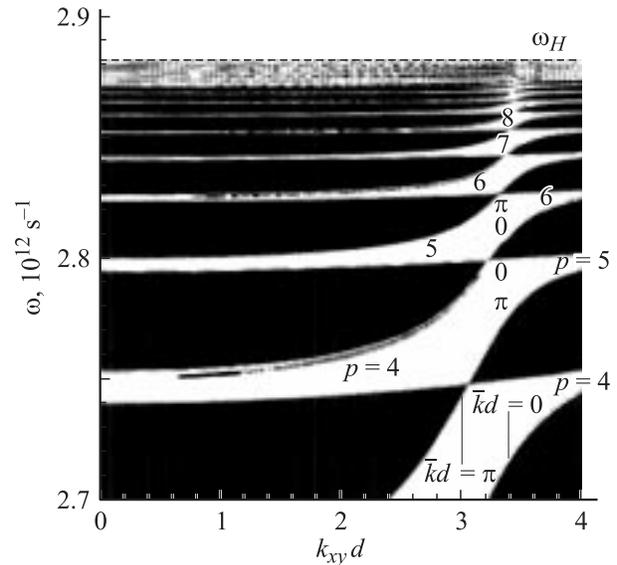
Однако принимая во внимание, что в этой области спектра выполняется соотношение  $|k_{z1}| \gg |k_{z2}|$ , причем  $k_{z2}$  с частотой изменяется мало, становится понятным то, что для первой нормальной волны характер зависимости должен соответствовать быстро осциллирующей кривой, а для второй — быть близок к линейной зависимости. Это связано с тем, что в дисперсионные зависимости входят тригонометрические функции аргументов  $k_{z1}d_1$  и  $k_{z2}d_1$ . Поэтому при больших значениях  $k_{z1}$  даже относительно небольшие его изменения приводят к образованию многочисленных зон пропускания и непропускания для первой нормальной волны. Для второй нормальной волны с малыми значениями и изменением  $k_{z2}$  дисперсионная зависимость не выходит за пределы полосы пропускания. Именно такой, а не формальный выбор участков кривых, приведенных на рис. 4, соответствует зонным спектрам двух нормальных волн периодической структуры, характеризующихся блоховскими волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ .

Математически такое разделение спектров нормальных волн в рассматриваемом случае требует перемены знака перед радикалом в формуле (4) всякий раз, когда зависимость проходит через область, где детерминант обращается в нуль, т.е. выполняется соотношение  $a_1 = a_2$ .

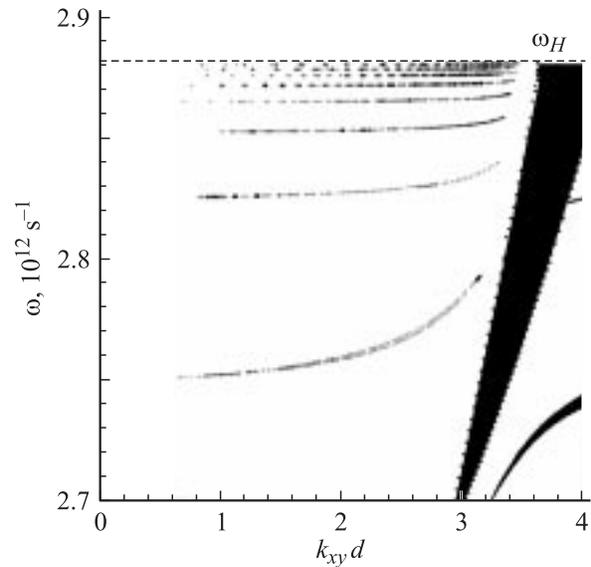
Еще одна особенность этого спектра связана с появлением на зависимостях рис. 4 участков, соответствующих комплексно-сопряженным решениям в формуле (4). Они попадают в некоторые из областей пересечения зависимостей  $\text{Re}(a_{1,2}) = f(\omega)$  и имеют вид последовательно расположенных пиков, симметричных относительно оси абсцисс. На рис. 4 они показаны пунктиром и соответствуют значениям  $100 \text{Im}(a_{1,2})$ . Следствием этого должно быть появление в зонных спектрах нормальных волн дополнительных, относительно узких и одинаково расположенных в обоих спектрах полос непропускания.

Таким образом, проведенный анализ позволяет разделить спектр циклотронных волн на два спектра нормальных волн периодической структуры с блоховскими волновыми числами  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$ . Эти спектры показаны соответственно на рис. 5 и 6.

Спектр, соответствующий  $\bar{k}_1$ , состоит из чередующихся по оси частот полос пропускания и непропускания, густота расположения которых возрастает по мере при-



**Рис. 5.** Зонный спектр циклотронных волн, соответствующий блоховскому волновому числу  $\bar{k}_1$ . Соотношение частот:  $\omega_H > \omega_p$ . Зоны непропускания закрашены и ограничены кривыми, соответствующими одинаковым значениям  $\bar{k}d$ .



**Рис. 6.** Зонный спектр циклотронных волн, соответствующий блоховскому волновому числу  $\bar{k}_2$ . Соотношение частот:  $\omega_H > \omega_p$ . Зоны непропускания закрашены.

ближения к частоте циклотронного резонанса. В каждой полосе пропускания выполняется условие размерного полуволнового резонанса на толщине полупроводникового слоя. Порядок резонанса в соседних полосах отличается на единицу и с увеличением частоты возрастает. Такое же изменение порядка резонанса происходит и в пределах одной и той же полосы пропускания из-за ее изгиба и связанного с этим смещения ее краев по частоте.

Указанные особенности зонного спектра отражаются и в распределениях полей по слоям структуры, показанных на рис. 3, *d–f*. Они относятся к соответствующим точкам спектра на рис. 5, принадлежащим одной и той же полосе пропускания. Видно, что в данном случае происходит изменение порядка размерного резонанса в полупроводниковом слое от  $p = 5$  (рис. 3, *d*) к  $p = 6$  (рис. 3, *f*). В промежуточной точке (рис. 3, *e*) на толщине слоя укладывается пять с четвертью полувольт и амплитуда осцилляций поля минимальная. Поскольку все точки выбраны на границе зоны с  $\bar{k}d = \pi$ , то распределения полей повторяются через два периода структуры.

Спектр нормальной волны, соответствующий  $\bar{k}_2$  (рис. 6), представляет собой одну обширную область пропускания с включениями в нее нескольких полос непропускания. Это — последовательность полос, соответствующих комплексно-сопряженным решениям в формуле (4), и расширяющаяся полоса, соответствующая действительным решениям, но со значениями  $|a_2| > 2$ . Во всей области пропускания этой нормальной волны выполняется условие полувольтного резонанса на толщине полупроводникового слоя, так как имеет место равенство  $k_{z2}d_1 \approx \pi$ . Заметим, что распределение поля, показанное на рис. 3, является суперпозицией полей нормальных волн периодической структуры и его вид зависит в том числе и от соотношения амплитуд этих волн.

Таким образом, этот вариант выбора характеристических частот полупроводникового слоя структуры приводит к взаимному наложению дисперсионных зависимостей для  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$  и соответствующих им спектров.

## Заключение

В работе рассчитан и проанализирован зонный спектр циклотронных волн слоисто-периодической структуры полупроводник–диэлектрик в магнитном поле вдоль оси периодичности при распространении волн под углом к магнитному полю.

Исследованы особенности и отличия зонных спектров для двух вариантов соотношения характеристических частот полупроводника:  $\omega_H < \omega_p$  и  $\omega_H > \omega_p$ . Найдены и проанализированы распределения полей по слоям и периоду структуры. Установлено, что формирование зон пропускания обоих спектров сопровождается выполнением условия размерного резонанса на толщине полупроводникового слоя. Такая структура зон пропускания в принципе может оказаться полезной при создании устройств типа многоканальных фильтров, перестраиваемых магнитным полем.

С помощью графического решения дисперсионного уравнения показана возможность разделения спектра циклотронных волн на два спектра нормальных волн, соответствующих блоховским волновым числам периодической структуры. Показаны и проанализированы слу-

чай взаимного дополнения и наложения зон пропускания обоих спектров.

## Список литературы

- [1] Булгаков А.А., Кононенко В.К. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 15–21.
- [2] Baynham A.C., Boardman A.D. // J. Phys. C. 1969. Ser. 2. Vol. 2. P. 619–628.
- [3] Булгаков А.А., Шрамкова О.В. // РЭ. 2001. Т. 46. Вып. 2. С. 236–240.
- [4] Brion J.J., Wallis R.F., Hardstein A., Burstein E. // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. N 22. P. 1455–1458.
- [5] Wallis R.F., Brion J.J., Burstein E., Hartstein A. // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 9. N 8. P. 3424–3437.
- [6] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
- [7] Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989. 287 с.
- [8] Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: ИФМЛ, 1960. 408 с.
- [9] Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 720 с.