

01;05

## Равновесные состояния плоских вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и смысл понятия „энергия пиннинга“

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 8 декабря 2003 г.)

Проанализированы различные способы определения понятия „энергия пиннинга“ для плоских вихрей в трехмерной ячеистой джозефсоновской среде. Показано, что при немалых значениях параметра пиннинга  $I$  не удастся найти универсальную характеристику взаимодействия вихря с решеткой, поскольку при смещении вихря его форма существенно изменяется. При малых значениях  $I$  в качестве такой характеристики может быть выбрана максимальная сила пиннинга. Исследована устойчивость двух равновесных состояний вихря. Показано, что состояние с большей энергией не обязательно является неустойчивым. Корректный анализ устойчивости должен основываться на исследовании квадратичной формы, описывающей энергию токовой конфигурации. Проведено такое исследование для равновесных состояний вихря. При малых значениях параметра пиннинга состояние вихря с большей энергией оказывается квазиустойчивым.

### Введение

Важнейшую роль в происходящих в сверхпроводниках процессах играют вихревые структуры. Поэтому изучению динамики вихрей, их взаимодействия друг с другом, устойчивости, пиннинга на различных неоднородностях среды и т.д. посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Величина пиннинга обычно характеризуется энергией пиннинга. Однако смысл этого понятия нуждается в уточнении. Удобнее всего это сделать в рамках модели, имеющей точное математическое описание.

В работе [1] рассмотрены плоские (ламинарные) вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, представляющей собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт.

Энергия стационарного вихря на  $1m$  его длины равна

$$E = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + I(1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (1)$$

где  $\varphi_k$  — скачки фазы на контактах,  $I$  — так называемый параметр пиннинга,  $E_0$  — нормировочная константа.

Далее везде энергии выражены в единицах  $E_0$ . Первый член в (1) описывает магнитную энергию вихря, а второй — энергию джозефсоновских контактов.

Равновесные состояния вихря, соответствующие экстремуму его энергии, описываются следующей системой разностных уравнений, получаемых из условия  $\partial E / \partial \varphi_m = 0$

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m. \quad (2)$$

Система уравнений, аналогичная (2), описывает также поведение вихрей в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте [2,3].

Система уравнений (2) была впервые получена Френкелем и Конторовой для описания поведения краевых дислокаций в кристалле [4]. Она вследствие ее дискретности дает возможность анализировать поведение солитонов с учетом их пиннинга, который определяется конечной величиной энергии, необходимой для смещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В работе [1] рассмотрены два вида решений системы (2), соответствующих равновесным плоским вихрям. В одном из них ось симметрии расположена в центре ячейки среды. В другом центр вихря располагается на одном из проводов. Поскольку энергия второй конфигурации превышает энергию первой, то в [1] делается вывод об устойчивости первой и неустойчивости второй конфигурации. Кроме того, в [1–3] молчаливо предполагается, что при перемещении в соседнюю ячейку вихрь, первоначально имевший „первую“ конфигурацию, смещается по координате на пол-ячейки и приобретает „вторую“ конфигурацию, которая и соответствует максимальной энергии вихря в момент его перехода через барьер, разделяющий ячейки. Из этой модели делается вывод о том, что энергия пиннинга как раз и равняется разности энергий второй и первой конфигураций вихря.

В настоящей работе показывается, что оба эти вывода как о характере устойчивости, так и о порядке перемещения вихря являются неверными, а само понятие „энергия пиннинга“ нуждается в уточнении.

Характер устойчивости не определяется однозначно соотношением энергий равновесных состояний. Конфигурация с наименьшей энергией всегда является устойчивой. Вторая конфигурация, вообще говоря, может быть и устойчивой, хотя ее энергия и превышает энергию первой конфигурации. Анализ устойчивости конфигурации с большей энергией должен проводиться отдельно. Поэтому до выяснения характера устойчивости, говоря об упомянутых конфигурациях, мы не будем

пользоваться терминами „устойчивая“ и „неустойчивая“ и будем называть их просто „первая“ и „вторая“.

В момент перескока из одной ячейки в другую вихрь не находится в своем „втором“ равновесном состоянии, поэтому энергия барьера не равна разности энергий второй и первой конфигураций вихря. Для доказательства этого факта удобно рассмотреть поведение системы двух изолированных вихрей.

## Два изолированных взаимодействующих вихря

Проведем анализ системы (2) для случая двух вихрей одинаковой ориентации [5], находящихся далеко от границы, центры которых расположены на расстоянии  $N$  ячеек друг от друга (рис. 1) в рядах с номерами 1 и  $(N + 1)$  (номера указаны в кружках на рис. 1). При удалении влево от ячейки 1 и вправо от ячейки с номером  $(N + 1)$  токи  $J_k$  убывают и стремятся к 0 на бесконечности.

При немалых значениях параметра пиннинга  $I$  значения  $\varphi_m$  вне центральных ячеек вихрей малы, система (2) линеаризуется и ее решение имеет вид [5]

$$\varphi_m = \varphi_{-1}\gamma^{-m-1} \quad (m \leq -1), \quad (3)$$

$$\varphi_m = C_1\gamma^{m-1} + C_2\gamma^{N-m} \quad (1 \leq m \leq N), \quad (4)$$

$$\varphi_m = \varphi_{N+1}\gamma^{m-N-1} \quad (m \geq N + 1), \quad (5)$$

где  $\gamma = 1 + I/2 - \sqrt{I + I^2/4}$  — решение характеристического уравнения  $\gamma^2 - (2 + I)\gamma + 1 = 0$ .

Будем считать распределение токов и фаз симметричным относительно середины расстояния между вихрями. Тогда для одинаково ориентированных вихрей, отталкивающихся друг от друга, имеем  $C_1 = -C_2 = \varphi_1/(1 - \gamma^{N-1})$  и

$$\varphi_2 = \varphi_1 k, \quad (6)$$

где  $k = \gamma(1 - \gamma^{N-3})/(1 - \gamma^{N-1})$ .

Подставляя (6) в граничные условия на центральной ячейке вихря

$$I \sin \varphi_1 = \varphi_{-1} - 2\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi, \quad (7)$$

$$I \sin \varphi_{-1} = \varphi_1 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2} - 2\pi, \quad (8)$$

получим следующую систему уравнений для нахождения  $\varphi_{-1}$  и  $\varphi_1$

$$\varphi_{-1} = I \sin \varphi_1 + (2 - k)\varphi_1 - 2\pi, \quad (9)$$

$$\varphi_1 = I \sin \varphi_{-1} + (2 - \gamma)\varphi_{-1} + 2\pi. \quad (10)$$

В (9) и (10) от расстояния между вихрями зависит только коэффициент  $k$ :  $k(\infty) = \gamma$ ,  $k(2) = -1$ ,  $k(3) = 0$  и т.д. На рис. 2 приведены графики зависимостей (9) и (10) для  $I = 2.0$  при  $N = 2, 4$  и  $\infty$  и для  $I = 2.9$  при  $N = 3$  и  $\infty$ . Их этих кривых в [5] делается вывод о

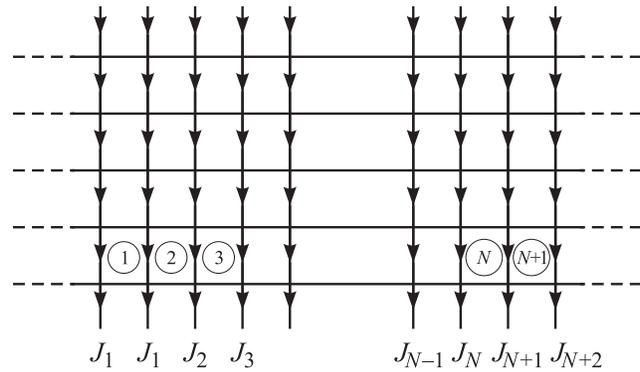


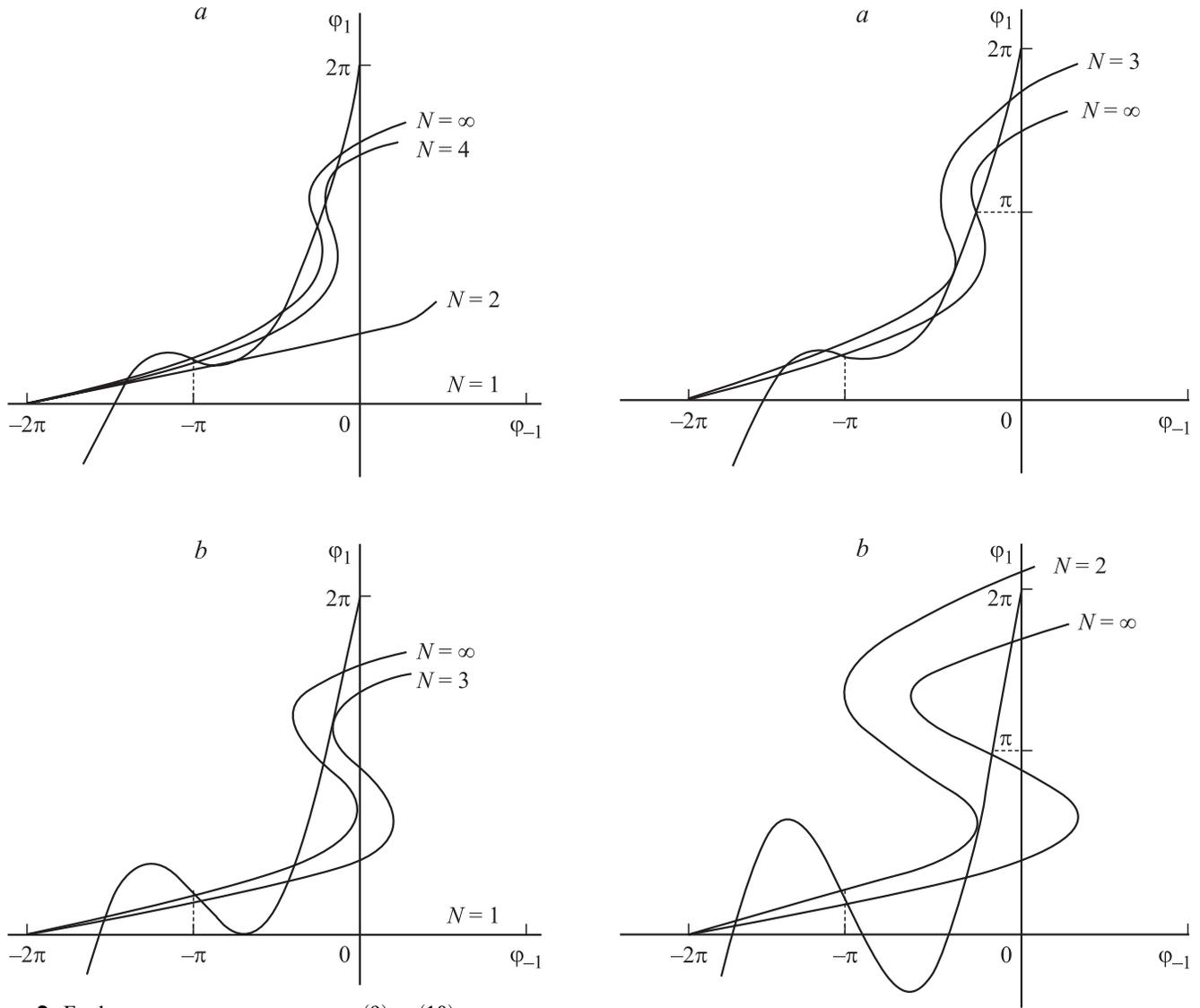
Рис. 1. Распределение токов в плоскости, перпендикулярной осям вихрей, для случая двух уединенных взаимодействующих вихрей.

том, что при каждом значении  $I$  система (9), (10) имеет решение в определенном диапазоне  $N$ , т.е. вихри могут находиться на различных расстояниях друг от друга, начиная с какого-то минимального и до бесконечности. Это результат пиннинга, так как в его отсутствие вихри разбежались бы на бесконечность, т.е. при конечных  $N$  решений не было бы. Найдя минимальное для данного  $I$  значение  $N$ , мы найдем наименьшее расстояние, на котором силы пиннинга еще могут компенсировать взаимное отталкивание вихрей. Из рис. 2, *a* видно, что при  $I = 2$   $N_{\min} = 2$ . При расположении центров вихрей в соседних ячейках  $N = 1$ , из (6) следует  $k(1) = \infty$ , тогда из (9) получим  $\varphi_1 = 0$  (что легко понять исходя из симметрии картины). Наименьшее значение  $I$ , при котором (10) еще удовлетворяется при  $\varphi_1 = 0$ , равно 2.9. Ему соответствует кривая на рис. 2, *b*, которая в своем минимуме касается оси  $\varphi_{-1}$ .

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай двух вихрей различной ориентации, которые будут притягиваться друг к другу. В этом случае положим в (4)  $C_2 = C_1$  и придем к формулам (9) и (10) с единственным отличием:  $k = \gamma(1 + \gamma^{N-3})/(1 + \gamma^{N-1})$ . На рис. 3 приведены графики для этого случая при  $I = 2.16$  и  $N = 3$ ,  $I = 3.69$  и  $N = 2$ ,  $I = 14.3$  и  $N = 1$ .

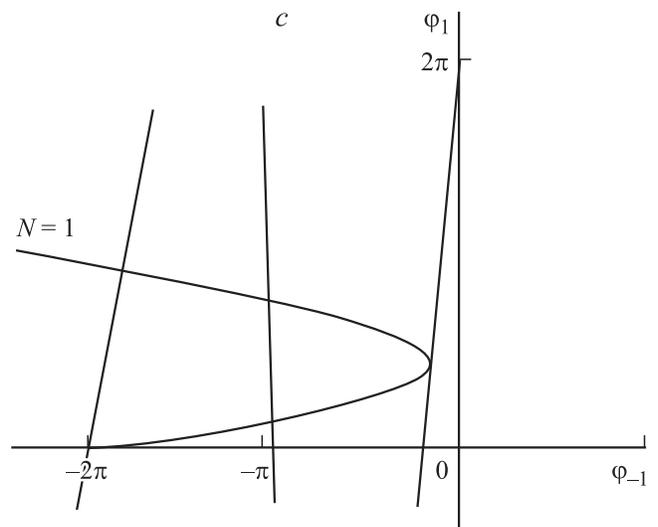
Из рис. 2 и 3 можно сделать и другой важный вывод. Графики зависимостей (9) и (10) имеют не две точки пересечения, как можно было бы ожидать исходя из двух равновесных состояний вихря, а три или даже пять. Однако это не говорит о том, что существуют еще какие-то равновесные вихревые конфигурации. Их на самом деле только две, остальные же точки пересечения являются их „копиями“, соответствующими вычитанию  $2\pi$  на другом ряду контактов, что не меняет физической ситуации.

Рассмотрим подробнее это утверждение для случая уединенного вихря, т.е.  $N = \infty$ . Возьмем центральную точку пересечения с  $-\varphi_{-1} = \varphi_1 = a$ . При этом, для того чтобы вихрь выглядел симметричным по координатам,



**Рис. 2.** Графическое решение системы (9) и (10) для случая вихрей одинаковой ориентации (отталкивание) при различных значениях параметра  $I$ :  $a = 2.0$ ,  $b = 2.9$ .

нате,  $2\pi$  прибавлялось к результатам расчета по (2) при вычислении  $\varphi_1$ . Если бы это было сделано при вычислении  $\varphi_2$ , то  $\varphi_1$  равнялось бы  $(a - 2\pi)$ , т.е. было бы отрицательным, и считалось бы новым  $\varphi_{-1}$ . При этом новым  $\varphi_1$  стало бы бывшее  $\varphi_2 = a\gamma$  (из (4)). Эти значения как раз и соответствуют левой крайней точке пересечения кривых (9) и (10). Аналогично, если бы прибавление  $2\pi$  производилось при вычислении не  $\varphi_1$ , а  $\varphi_{-1}$ , то новым  $\varphi_{-1}$  было бы старое  $\varphi_{-2} = -a\gamma$ , а новым  $\varphi_1$  — старое  $\varphi_{-1}$ , преобразовавшееся в  $(-a + 2\pi)$ . Эта точка соответствует крайнему правому пересечению кривых на рис. 2. Таким образом, оба крайних пересечения соответствуют физическому состоянию, описываемому центральной точкой пересечения, т.е. „первой“ конфигурации вихря. Аналогично можно показать, что две оставшиеся точки пересечения (с  $\varphi_{-1} = -\pi$  и с  $\varphi_1 = \pi$ ) соответствуют одной и той же „второй“ конфигурации.



**Рис. 3.** Графическое решение системы (9) и (10) для случая вихрей противоположной ориентации (притяжение) при различных значениях параметра  $I$ :  $a = 2.16$ ,  $b = 3.69$ ,  $c = 14.3$ .

Для кривых с  $N \neq \infty$ , т.е. с двумя взаимодействующими вихрями ситуация такая же, но идентичные в физическом смысле точки пересечения лежат на разных кривых. Действительно, поскольку при выводе системы (9), (10) для отталкивающих вихрей мы считали распределение фаз симметричным, т.е.  $C_1 = -C_2$ , то расположение нового  $\varphi_{-1}$  в старом  $\varphi_1$  соответствует уменьшению расстояния  $N$  между вихрями на 2. Тогда идентичным оказываются, например, центральное пересечение при  $N = 4$  и крайнее левое при  $N = 2$ , крайнее правое при  $N = 4$  и центральное при  $N = 2$ , а также второе справа при  $N = 4$  и второе слева при  $N = 2$ . Это хорошо видно на рис. 2, а, где имеют место касание кривой (9) с (10) при  $N = 4$  справа сверху и при  $N = 2$  слева внизу, что подтверждает идентичность сразу двух пар точек. То же можно видеть и из рис. 2, б, на котором при  $N = 3$  кривые соприкасаются справа сверху, а при  $N = 1$  кривая (10) касается оси абсцисс, при  $N = 1$ , соответствующей (9).

Таким образом, физически различных состояний всего два. Этот вывод справедлив и для случая притягивающихся вихрей (рис. 3). Далее мы будем считать основными для отталкивающихся вихрей состояния, соответствующие центральной точке пересечения на рис. 2, и второй слева ( $\varphi_{-2} = -\pi$  при  $N = \infty$ ). В случае притягивающихся вихрей кривая (9) при их сближении отклоняется в другую сторону, поэтому основными удобнее считать центральное пересечение и второе справа ( $\varphi_1 = \pi$  при  $N = \infty$ ).

## Энергетический барьер

Проведенное рассмотрение двух взаимодействующих вихрей предполагает скачкообразное изменение расстояния между центрами вихрей  $N$ . Это значит, что при некотором значении  $N$  точки пересечения кривых на рис. 2 и 3 еще существуют, а при  $N$ , на единицу меньшем, их уже нет. Поэтому этот подход не позволяет рассмотреть точный момент перескока вихря из одной ячейки в другую, соответствующий состоянию с максимальной энергией.

Рассмотрим теперь не симметричную конфигурацию двух вихрей, а один несимметричный вихрь со следующими значениями  $\varphi_k$  на контактах, ближайших к центру:

$$\varphi_{-1} = -a, \quad \varphi_{-2} = -a\gamma, \quad \varphi_1 = b - d\gamma, \quad \varphi_2 = b\gamma - d. \quad (11)$$

Эти значения соответствуют выражениям (3) и (4). Подстановка (11) в уравнения (7) и (8) приводит к системе

$$\varphi_{-1} = I \sin \varphi_1 + (2 - \gamma)\varphi_1 - 2\pi + d(1 - \gamma^2), \quad (12)$$

$$\varphi_1 = I \sin \varphi_{-1} + (2 - \gamma)\varphi_{-1} + 2\pi. \quad (13)$$

При этом положительные значения  $d$  соответствуют отталкиванию справа, а отрицательные — притяжению,

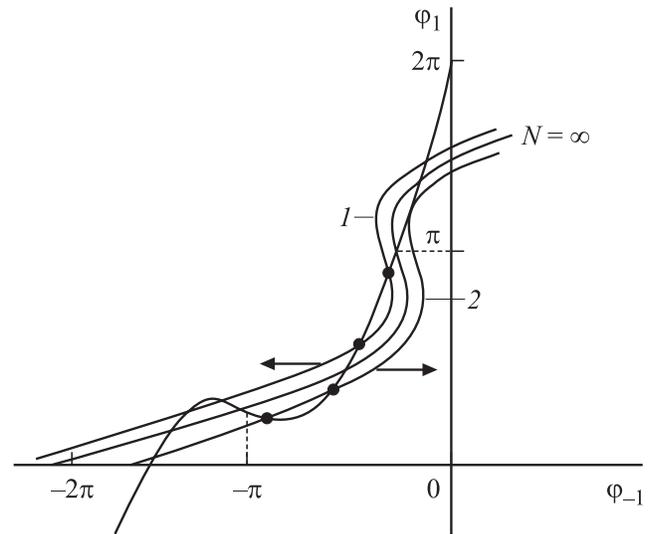


Рис. 4. Графическое решетие системы (12) и (13) при  $I = 2.0$  и при некоторых значениях  $d$  для случаев притяжения (1) и отталкивания (2).

причем рост  $|d|$  ведет к увеличению этого взаимодействия, т.е. при некотором значении  $d$  вихрь уже не сможет находиться в данной ячейке и должен перескочить в следующую. Это значение  $d$  и соответствует энергетическому барьеру.

Система уравнения (12), (13) отличается от (9), (10) для  $N = \infty$  только наличием члена  $d(1 - \gamma^2)$  в (12). Этот член сдвигает вправо или влево всю кривую  $\varphi_{-1}(\varphi_1)$  с  $k = \gamma$ . На рис. 4 приведены графики зависимостей (12) и (13) при  $I = 2.0$  и при некоторых значениях  $d$  для случаев притяжения (кривая 1) или отталкивания (кривая 2). Выше было показано, что физически различных конфигураций всего две. Соответствующие им точки пересечения графиков (12) и (13) выделены на рис. 4 жирными точками. Видно, что с ростом  $|d|$  эти точки сближаются, при некотором  $d$  они совпадают и далее основных точек пересечения нет, т.е. вихрь в данной ячейке находиться уже не может. Важно отметить, что это состояние энергетического барьера не является „второй“ конфигурацией равновесного вихря, как это подразумевалось в [1–3]. И вообще по мере перехода вихря из одной ячейки в другую ни в один момент вихрь не принимает свои равновесные конфигурации — ни „первую“, ни „вторую“. Даже после перескока в следующую ячейку  $d$  не равно нулю, т.е. вихрь не примет свою „первую“ равновесную конфигурацию.

Упомянутые предположения основывались на ошибочной аналогии вихря с точечным объектом на потенциальном рельефе. Действительно, при переходе из одной ложбины в другую энергетический барьер соответствует положению точки на вершине, т.е. ее неустойчивому равновесию. Перейдя через барьер, точка занимает состояние устойчивого равновесия.

Вихрь не является точечным объектом. Он представляет собой конфигурацию, сама форма которой меняется в зависимости от ситуации.

Рассмотрим энергию (1) как функцию многих переменных  $\varphi_k$ . Эта функция описывает „горную систему“ в многомерном пространстве. Равновесные состояния, описываемые системой (2), соответствуют равенству нулю всех частных производных и поэтому могут являться точками локального максимума или минимума, а также седловыми. Каждая из этих точек соответствует равновесному состоянию, причем эти состояния содержат различные количества вихрей, находящихся на различных расстояниях друг от друга. Достаточно очевидным является тот факт, что конфигурация с несколькими вихрями (даже в случае их взаимного притяжения) имеет полную энергию, превышающую энергию уединенного вихря. Это значит, что среди всех критических точек системы, т.е. равновесных состояний, можно выделить состояния с наименьшими энергиями, содержащие один уединенный вихрь. Таких точек бесконечно много, но все они соответствуют размещению в различных ячейках среды всего двух физических различных конфигураций, которые мы называем „первой“ и „второй“. Очевидно, что „первая“ конфигурация, имеющая меньшую энергию, соответствует минимуму, поскольку меньшей энергии вообще быть не может. Любое бесконечно малое изменение комбинации  $\varphi_k$  ведет к увеличению энергии, поэтому это равновесное состояние является устойчивым. „Вторая“ конфигурация, хотя и имеет большую энергию, не соответствует максимуму, как это молчаливо предполагалось в работах [1–3]. Эта точка окружена другими состояниями, соответствующими нескольким вихрям и имеющими большую, чем она, энергию. Таким образом, „вторая“ конфигурация может соответствовать либо минимуму, либо седловой точке. В первом случае это состояние оказалось бы устойчивым, а во втором — неустойчивым, но относительно не любых флуктуаций, а лишь некоторых их комбинаций. Для выяснения характера устойчивости „второй“ конфигурации необходимо специальное исследование, которое будет проведено далее.

При анализе перемещения вихря из одной ячейки в другую под действием силы мы не можем рассматривать вихрь как уединенный, он меняет свою форму. Будем считать, что сила, заставляющая перемещаться вихрь, обусловлена его взаимодействием с другим вихрем. В таблице приведены значения энергий  $E_b$ , соответствующих перескоку вихря в другую ячейку для случаев отталкивания и притяжения, и энергий  $E_1$  и  $E_2$  двух равновесных состояний уединенного вихря. В первом столбце указаны расстояния  $N$  между центрами вихрей, во втором и шестом — наименьшие значения параметра пиннинга  $I$ , при которых эти расстояния еще могут быть такими. Все эти величины были получены на базе точного компьютерного решения системы (2). Обращает на себя внимание тот факт, что при отталкивании значения  $I_{\min}$  существенно меньше, чем

Сравнение энергии  $E_b$ , соответствующей перескоку вихря в другую ячейку для случаев отталкивания и притяжения и энергий равновесных состояний уединенного вихря

№	Отталкивание				Притяжение			
	$I_{\min}$	$E_b$	$E_1$	$E_2$	$I_{\min}$	$E_b$	$E_1$	$E_2$
1	2.907	14.85	12.36	13.07	14.30	22.31	17.43	37.86
2	1.947	11.46	10.62	10.99	3.690	15.78	13.36	15.42
3	1.428	9.65	9.28	9.40	2.156	14.13	11.07	11.57

при притяжении. Это говорит о том, что при одном и том же расстоянии между вихрями сила притяжения противоположно ориентированных вихрей намного больше силы отталкивания одинаково ориентированных. В этом смысле ситуация аналогична электростатическому взаимодействию заряженных шаров конечного размера, которые нельзя считать точечными зарядами: при одинаковых расстояниях между шарами и одинаковых модулях зарядов разноименно заряженные шары притягиваются сильнее, чем отталкиваются одноименно заряженные.

## О смысле понятия „энергия пиннинга“

Энергией пиннинга в рассматриваемой ситуации было бы логично называть разность  $E_b - E_1$ . Из таблицы можно видеть, что при отталкивании эта величина существенно превосходит  $E_2 - E_1$ , т.е. „энергию пиннинга“ в терминологии [1–3]. При притяжении  $E_b - E_1$  может быть как больше, так и меньше  $E_2 - E_1$ . Следовательно, и величина  $(E_b - E_1)$  не является универсальной характеристикой пиннинга. Она зависит от механизма, сдвигающего вихрь, в частности, от того, притягивается ли он соседом с одной стороны или отталкивается от соседа с другой. Могут быть реализованы и другие механизмы воздействия на вихрь. В каждом случае величина  $E_b - E_1$  будет зависеть от характера изменений всей комбинации  $\varphi_k(t)$ . В частности, может стоять вопрос о минимальной энергии вихря, при которой он мог бы двигаться по инерции. Ответ на этот вопрос также неоднозначен, поскольку такое движение может быть организовано разными способами в зависимости от начальной комбинации разностей фаз и скоростей их изменения. Каждому способу соответствует своя энергия.

Для анализа смысла понятий „энергия“ и „сила“ пиннинга полезна следующая модель. Для простоты будем считать вихри взаимодействующими шариками, каждый из которых находится в свое яме, окруженной барьером. Тогда в момент покидания ямы энергия вихря складывается из собственно энергии уединенного вихря, энергии его взаимодействия с другим вихрем и положительной энергии барьера. При отталкивании энергия взаимодействия вихрей положительна, поэтому суммар-

ная энергия вихря больше энергии уединенного вихря, что подтверждается данными таблицы. При притяжении энергия взаимодействия отрицательна, поэтому для второй конфигурации вихря при больших расстояниях между вихрями ( $N = 3$  в таблице)  $E_b > E_2$ , так как модуль энергии взаимодействия меньше энергии барьера, а при  $N = 1$  соотношение уже обратное. Однако для первой конфигурации это рассуждение не подтверждается, так как  $E_b > E_1$  всегда. Скорее всего, это связано с тем, что вихрь нельзя рассматривать как шарик.

В рассмотренной модели наиболее логично было бы называть энергией пиннинга глубину ямы, или высоту барьера, поскольку именно эта величина характеризует взаимодействие вихря с „решеткой“. Проблема заключается в том, как разделить энергии взаимодействия вихря с соседями и с решеткой. Ведь модель, рассматривающая вихрь как точечный объект (шар), как уже говорилось, является упрощенной и не учитывает изменения формы вихря, которое ведет к изменению энергии его взаимодействия с другими вихрями и „глубины ямы“ в зависимости от ситуации. Таким образом, и эта величина не может быть универсальной характеристикой пиннинга.

По этим же причинам нельзя сказать, что вихрь перескакивает из одной ячейки в другую, если сила, действующая на него со стороны других вихрей, превосходит какое-то универсальное значение силы пиннинга. Первая из этих сил по идее должна равняться градиенту энергии взаимодействия вихря с другими вихрями, а вторая — градиенту энергии его взаимодействия с решеткой. Но в разных ситуациях вихрь имеет различную форму, поэтому разделение этих двух энергий, а значит и сил, является проблематичным.

Единственно правильным подходом, строго говоря, является рассмотрение, основанное на анализе системы уравнений, описывающих вихрь, для конкретной задачи. Характеризовать величину пиннинга можно, например, минимально возможным расстоянием между двумя одинаковыми изолированными вихрями, как это сделано выше (рис. 2 и 3).

Предложенный выше подход и система (9), (10) справедливы в предположении немалых значений параметра пиннинга  $I$ . Для  $I$  меньше или порядка единицы этот подход непригоден.

Аналізу пиннинга при малых значениях  $I$  посвящены работы [1–3,5]. В свете всего вышесказанного использованные в них методики выглядят неправомерными по следующим причинам. В [1–3] энергия вихря при различных смещениях его центра относительно центра ячейки рассчитывалась по формуле (1) для вихря неизменной формы, смещающегося по координате. Однако форма вихря не остается неизменной. Любое его положение (при котором центр вихря не находится ни в центре ячейки, ни на проводе) может быть равновесным, только если на него действует сила, например, со стороны других вихрей. Это значит, что форма вихря уже не может быть симметричной, одна из его сторон приподнимается (или

опускается при притяжении). Полная энергия вихря должна включать энергию его взаимодействия с другими вихрями, поэтому она будет отличаться от результатов, полученных в [1–3], где основное внимание уделено математическим аспектам вычисления энергии вихря без учета нарушений симметричности его формы. Это отличие подтверждается вычислениями, проведенными в [5]. В этой работе молчаливо предполагается, что при малых значениях  $I$  энергии и силы взаимодействия вихря с другими вихрями и с решеткой могут быть вычислены раздельно. Первая из них вычисляется без учета пиннинга в модели непрерывных вихрей, а вторая — без учета взаимодействия с другими вихрями, т.е. для симметричного случая, рассмотренного в [1–3]. На базе такого подхода в [5] вычислены минимально возможные расстояния между плоскими вихрями их условия равенства силы взаимодействия соседних вихрей и максимальной силы пиннинга. Легко показать, что при равенстве этих сил энергия взаимодействия вихрей в  $2\pi/\sqrt{I}$  раз больше разности энергий ( $E_2 - E_1$ ) двух равновесных состояний вихря, т.е. энергии его взаимодействия с решеткой. Таким образом, в момент перескока вихря из одной ячейки в другую суммарная энергия взаимодействия вихря существенно превосходит величину ( $E_2 - E_1$ ).

Однако, несмотря на эти замечания, значения расстояний между вихрями, полученные в [5], близки к рассчитанным на базе точного компьютерного решения системы (2). Это подтверждает предположение о возможности раздельного расчета взаимодействия вихря с другими вихрями и с решеткой при малых значениях  $I$ . Отсюда следует важный вывод: при малых значениях параметра  $I$  пиннинг можно характеризовать универсальным значением максимальной силы пиннинга. При немалых  $I$ , как было показано ранее, сила, удерживающая вихрь, зависит от того, каким образом его сдвигают, т.е. не является универсальной характеристикой.

## Устойчивость равновесных состояний вихря

Как было сказано выше, вихрь не является точечным объектом. Он представляет собой конфигурацию, сама форма которой меняется в зависимости от ситуации. Поэтому речь идет не об устойчивости вихря как целого относительно сдвига (подобно шару на потенциальном рельефе), а об устойчивости относительно любых флуктуаций набора значений  $\varphi_k$ , т.е. любых трансформаций формы.

Будем рассматривать энергию как функцию набора переменных  $\varphi_k$ . Комбинация  $\varphi_k$ , описывающая „первую“ конфигурацию, соответствует минимальной энергии уединенного вихря. Эта точка в многомерном пространстве находится в локальном минимуме функции (1) и поэтому является устойчивой.

<i>a</i>									<i>b</i>								
$2+I\cos\varphi_N$	...	0	0	0	0	0	...	0	$a_N$	...	0	0	0	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	...	$2+I\cos\varphi_2$	-1	0	0	0	...	0	0	...	$a_2$	-1	0	0	0	...	0
0	...	-1	$2+I\cos\varphi_1$	-1	0	0	...	0	0	...	-1	$a_1$	-1	0	0	...	0
0	...	0	-1	$2-I$	-1	0	...	0	0	...	0	0	$2-I-2/a_1$	-1	0	...	0
0	...	0	0	-1	$2+I\cos\varphi_1$	-1	...	0	0	...	0	0	0	$a_1$	-1	...	0
0	...	0	0	0	-1	$2+I\cos\varphi_2$	...	0	0	...	0	0	0	0	$a_2$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	...	0	0	0	0	0	...	$2+I\cos\varphi_N$	0	...	0	0	0	0	0	...	$a_N$

**Рис. 5.** Матрица квадратичной формы (16) для „второй“ конфигурации: *a* — исходная, *b* — после приведения к диагональному виду.

Исследуем устойчивость „второй“ конфигурации. Запишем выражение для приращения энергии (1) при наборе вариаций  $\delta\varphi_k$  (первые производные равны нулю согласно (2))

$$\delta E = \sum_{k,m} \frac{\partial^2 E}{\partial\varphi_k \partial\varphi_m} \delta\varphi_k \delta\varphi_m. \quad (14)$$

Будем далее считать  $\varphi_k$ , достаточно удаленные от центра вихря ( $k \geq N+1$ ), равными нулю. Тогда матрица квадратичной формы (14) ( $\partial^2 E / \partial\varphi_k \partial\varphi_m$ ) станет конечной и для „второй“ конфигурации примет вид, приведенный на рис. 5, *a*.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на  $1/(2+I\cos\varphi_N)$ , далее к третьей строке — получившуюся вторую, умноженную на  $1/(2+I\cos\varphi_{N-1})$ , и так далее до центральной строки. Диагонализируя матрицу с другого угла, ко второму справа столбцу прибавим первый справа, умноженный на  $1/(2+I\cos\varphi_N)$ , и так далее до центрального столбца. Полученная матрица, все элементы которой ниже диагонали равны нулю, представлена на рис. 5, *b*. Диагональные элементы вычисляются по рекуррентному закону

$$a_N = 2 + I \cos \varphi_N, \quad a_{n-1} = 2 + I \cos \varphi_n - 1/a_n. \quad (15)$$

Проведя вычисления по алгоритму (15) с использованием значений  $\varphi_k$  для „второй“ конфигурации, полученных в результате точного компьютерного расчета [5], можно убедиться, что при всех значениях  $I$  для достаточно больших значений  $N$ , т.е. размера вихря, имеет место соотношение  $a_1 < 2/(2-I)$ , т.е. центральный диагональный элемент ( $2-I-2/a_1$ ) всегда меньше нуля. Например, для  $I=0.5$  при  $N=3$  имеем  $a_1 = 1.3375$ , при  $N=4$   $a_1 = 1.3316$ , при  $N=10$   $a_1 = 1.3296$ , а  $2/(2-I) = 1.3333$ . Для  $I=0.2$  при  $N=5$  имеем  $a_1 = 1.1192$ , при  $N=15$   $a_1 = 1.1111098$ , при  $N=40$   $a_1 = 1.1111088$ , а  $2/(2-I) = 1.1111111$ . Видно, что при небольших значениях  $I$  расчет величин  $a_k$

должен проводиться достаточно точно. Тот факт, что при малых значениях  $N$  условие  $a_1 < 2/(2-I)$  нарушается, говорит о том, что при данном значении  $I$  размер вихря заметно больше  $N$  и мы не вправе полагать все  $\varphi_k$  при  $k \geq N+1$  равными нулю. В этом случае значение  $N$  надо увеличивать, при достаточно больших  $N$  величина  $a_1$  выходит на насыщение, т.е. перестает изменяться с ростом  $N$ . Это значение  $a_1$  и является истинным.

Определитель матрицы, имеющей все нулевые элементы ниже диагонали, равен произведению всех диагональных элементов. Из отрицательности как минимум одного диагонального элемента следует, что квадратичная форма (14) не является положительно определенной, т.е. энергия в этой точке не имеет локального минимума. Это значит, что „вторая“ конфигурация является, строго говоря, неустойчивой при любых значениях  $I$  и авторы работ [1–3] правы, называя ее так.

Однако нужно принять во внимание следующее рассуждение. Если привести квадратичную форму (14) к строго диагональному виду, то она примет вид  $\delta E = \sum_i A_i \delta\xi_i^2$ , где величины  $\delta\xi_i$  являются линейными комбинациями исходных вариаций скачков фаз  $\delta\varphi_k$ . При ненулевом значении вариации какого-то из  $\varphi_k$  будут отличны от нуля все  $\delta\xi_i$ . В этом случае, если даже один из коэффициентов  $A_i$  окажется отрицательным (но малым по модулю), остальные члены, будучи положительными, не позволят величине  $\delta E$  стать отрицательной. Если лишь небольшая вероятность того, что набор вариаций  $\delta\varphi_k$  случайно окажется таким, что все остальные  $\delta\xi_i$  окажутся малыми, так что не смогут скомпенсировать отрицательный член. Легко понять, что чем меньше по модулю отрицательный коэффициент, тем меньше вероятность такого события. Это значит, что чем меньше величина параметра пиннинга  $I$ , тем „менее неустойчивой“ является „вторая“ конфигурация. При малых значениях  $I$  можно говорить о квазиустойчивости этого состояния.

Отметим, что аналогичный анализ устойчивости „первой“ конфигурации подтверждает ее устойчивость при всех значениях  $I$ . В этом случае центральный диагональный элемент матрицы приводится к виду  $(a_1 - 1/a_1)$ , а рекуррентный расчет по (15) дает  $a_1 > 1$  при любом  $I$ , что означает положительность всех диагональных элементов, т.е. положительную определенность матрицы.

## Заключение

Рассмотрены два равновесных состояния плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде. Исследован смысл понятия „энергия пиннинга“ относительно перехода центра вихря из одной ячейки в другую. Показано, что в общем случае нет оснований называть энергией пиннинга разность энергий равновесных состояний.

Анализируется возможность считать энергией пиннинга разность между минимальной энергией уединенного вихря и энергией вихря в момент его перехода из одной ячейки в другую. Однако при немалых значениях параметра пиннинга  $I$  и эта величина не является универсальной характеристикой пиннинга, поскольку зависит от механизма, сдвигающего вихрь. При рассмотрении конкретной ситуации следует учитывать, что энергия вихря складывается из собственно энергии уединенного вихря, энергии его взаимодействия с другим вихрем и положительной энергии взаимодействия с решеткой. В такой модели наиболее логично было бы называть энергией пиннинга глубину ямы, характеризующей взаимодействие вихря с решеткой. Проблема заключается в том, что при немалых значениях  $I$  не удается разделить энергии взаимодействия вихря с соседями и с решеткой, поскольку при смещении вихря его форма существенно изменяется. Поэтому сила, удерживающая вихрь, зависит от того, каким образом его сдвигают, т.е. не является универсальной характеристикой.

При малых значениях  $I$  энергии и силы взаимодействия вихря с другими вихрями и с решеткой могут быть вычислены отдельно: первая из них — без учета пиннинга в модели непрерывных вихрей, а вторая — без учета взаимодействия с другими вихрями. Отсюда следует, что при малых значениях параметра  $I$  пиннинг можно характеризовать универсальным значением максимальной силы пиннинга.

Исследуется устойчивость двух равновесных состояний вихря. Показано, что состояние с большей энергией не обязательно является неустойчивым. Корректный анализ устойчивости должен основываться на исследовании квадратичной формы, описывающей энергию токовой конфигурации. Проведено такое исследование для равновесных состояний вихря. При малых значениях параметра пиннинга состояние вихря с большей энергией оказывается квазиустойчивым.

## Список литературы

- [1] *Zelikman M.A.* // *Superconductor Sci. & Technol.* 1999. Vol. 12. N 1. P. 1–5.
- [2] *Брыксин В.В., Гольцев А.В., Дороговцев С.Н., Кузьмин Ю.А., Самухин А.Н.* // *ЖЭТФ.* 1991. Т. 100. С. 1281–1290.
- [3] *Dorogovtsev S.N., Samukhin A.N.* // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 25. P. 693–698.
- [4] *Френкель Я.И., Конторова Т.М.* // *Физический журнал.* 1939. Т. 1. С. 137–152.
- [5] *Зеликман М.А.* // *ЖТФ.* 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 44–52.