

01;03

Нелинейный аналитический асимптотический анализ осцилляций неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 27 октября 2003 г. В окончательной редакции 13 января 2004 г.)

Во втором порядке малости по амплитуде капиллярных осцилляций поверхностно однородно заряженной струи идеальной несжимаемой проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности, получено аналитическое выражение для формы струи как функции времени при возбуждении в начальный момент неосесимметричных мод. В том же приближении определены поле скоростей течения жидкости в струе и распределение электрического поля в ее окрестности. Поправки второго порядка малости к аналитическим выражениям для формы струи и потенциалов поля скоростей течения жидкости в струе и электростатического поля в окрестности струи имеют резонансный вид, определяемый условиями их взаимодействия с решениями первого порядка малости.

1. Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости цилиндрической заряженной струи представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена (см., например, монографию [1], содержащую подробный обзор литературы по обсуждаемому вопросу до девяностых годов прошлого века). В связи с актуальностью проблемы она в последние годы неоднократно становилась предметом теоретического исследования в линейной и нелинейной постановках [2–9]. Однако во всех работах, посвященных нелинейным исследованиям, рассматривались лишь осесимметричные осцилляции струи, поскольку авторы проведенных исследований интересовались в основном закономерностями разбиения струи на капли, а еще Рэлей [10] показал, что разбиение незаряженной струи на отдельные капли происходит за счет возбуждения осесимметричной волны. В то же время в [11,12] показано, что для струй, достаточно сильно заряженных (поверхностно или объемно), инкременты неустойчивости неосесимметричных волн могут превышать инкремент неустойчивости осесимметричной волны. Поэтому в настоящем рассмотрении будет проведено аналитическое асимптотическое исследование нелинейных осцилляций неосесимметричных волн на поверхности заряженной идеально проводящей струи в рамках метода многих масштабов, использованного ранее в [13] для исследования нелинейных осцилляций незаряженной струи.

2. Рассмотрим движущуюся с постоянной скоростью \overline{U}_0 бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярно оси струи. Вследствие этого на поверхности распределен заряд, поверхностная плотность которого в равновесном состоянии, т.е. в условиях отсутствия каких-либо возмущений цилиндрической формы струи, имеет величину χ .

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью \overline{U}_0 , а ось OZ направлена вдоль струи по направлению ее движения $\mathbf{n}_z \parallel \mathbf{U}_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Проследим эволюцию во времени распространяющейся по поверхности струи в положительном направлении оси OZ неосесимметричной волны с волновым числом k , амплитуда которой мала по сравнению с радиусом струи.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, приняв в качестве основных единиц R, ρ, σ (т.е. полагая $R = \rho = \sigma = 1$). В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1; \quad (1)$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты; t — время; ξ — функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели потенциального течения математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи

$$\Delta\Psi = 0, \quad \Delta\Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и в бесконечности

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla\Psi| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi| \rightarrow 0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1): кинематического

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Psi \cdot \nabla F = 0; \\ F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)]; \quad (4)$$

динамического:

$$r = 1 + \xi: \quad \Delta P - \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5)$$

и условия эквипотенциальности поверхности струи

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_S(t). \quad (6)$$

В выражении (5) ΔP — перепад давлений внутри и вне струи в равновесном состоянии ($\xi = 0, \Psi = 0$); предпоследнее и последнее слагаемые — давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности (1); $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$.

Краевую задачу (1)–(6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны $\lambda = 2\pi/k$,

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi\lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \pi\lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2)–(8) необходимо задать еще начальные условия. Однако в силу того, что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах об отыскании периодических волновых профилей поверхности идеальной жидкости принято выбирать начальные условия так, чтобы решение принимало наиболее простой вид [14,15]. Этот прием и будет использован в нижеследующих рассуждениях.

Будем искать решение задачи (2)–(8) в виде разложения по малому параметру ε , в качестве которого выберем отношение амплитуды волны к радиусу струи. Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до второго порядка малости включительно, представим искомые функции ξ, Ψ и Φ в виде рядов по степеням ε , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется двумя временными масштабами: основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon t$

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Psi(r, \varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку мы считаем, что волна, распространяющаяся по поверхности струи, бежит в положительном направлении оси OZ , то примем, что форма свободной поверхности жидкости

$$r = 1 + \varepsilon \cdot f(\varphi) \left(A(T_1) \exp(i\theta) + \overline{A(T_1) \exp(i\theta)} \right) + O(\varepsilon^2),$$

где $\theta \equiv k \cdot z - \omega_m(k) \cdot T_0$, где $\omega_m(k)$ — частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; $f(\varphi)$ — действительная функция, описывающая форму поперечного сечения струи; $A(T_1)$ — пока неизвестная комплексная функция, зависящая от медленного времени T_1 ; горизонтальная черта означает комплексное сопряжение.

Очевидно, что $f(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 2π и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_m \cdot \exp(im\varphi) + \overline{C_m} \exp(-im\varphi) \right); \quad C_m = \frac{1}{2\pi(1 + \delta_{m,0})} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi.$$

Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся рассмотрением случая, когда форма поперечного сечения струи определяется какой-либо одной гармоникой, т. е. примем, что

$$f(\varphi) = C_m \exp(im\varphi) + \overline{C_m} \exp(-im\varphi),$$

тогда, переобозначая надлежащим образом коэффициенты ($\xi^{(+)}(T_1) = C_m \cdot A(T_1)$, $\xi^{(-)}(T_1) = \overline{C_m} \cdot A(T_1)$), выражение для свободной поверхности струи запишем в виде

$$r = 1 + \varepsilon \left[\left(\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi) \right) \exp(i\theta) + (\text{к.с.}) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее аббревиатура (к.с.) обозначает слагаемые, комплексно-сопряженные к выписанным. Выражение (10) будем рассматривать как начальное условие, необходимое для замыкания краевой задачи (2)–(8).

3. Подстановка разложений (9) в уравнения (2)–(8), использование оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$$

для вычисления производной по времени и разложение условий (4)–(8) в ряд Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r = 1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε и с приравниванием нулю множителей при различных степенях ε позволяет вместо исходной краевой задачи получить задачи различных порядков малости.

а) В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородного заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю $\Phi_S^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи

$$\Delta p = 1 - 2\pi\chi^2.$$

б) В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9), функции $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) в первом приближении являются решениями записанных для них уравнений, полностью аналогичных (2), (3).

Система граничных и дополнительных условий (4)–(8) в первом порядке малости принимает вид

$$r = 1 : \quad \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \right\} + \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} = 0; \quad (13)$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)}(t); \quad (14)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right] \Big|_{r=1} d\varphi \cdot dz = 0; \quad (15)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)} \cdot d\varphi \cdot dz = 0. \quad (16)$$

На основании (1), (9) и (10) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}$ получим следующее выражение:

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) = [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + (\text{к.с.}). \quad (17)$$

Явный вид функции $\xi^{(+)}(T_1)$ и $\xi^{(-)}(T_1)$ может быть определен лишь при анализе задачи следующего порядка малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (17) удовлетворяет условию неизменности объема (16).

Принимая во внимание, что поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (12) и условием эквипотенциальности (14), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ методом разделения переменных, представив их в виде

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= A(T_1) \cdot B(r) \cdot D(\varphi) \exp(i\theta) + (\text{к.с.}); \\ \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= [S(T_1) \cdot C(r) \cdot W(\varphi) \exp(i\theta) + (\text{к.с.})] + \Phi_S^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18), а также (17), (11) в (12), (14) и приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$\begin{aligned} A(T_1) \cdot D(\varphi) &= \frac{-i\omega}{B'(1)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)]; \\ S(T_1) \cdot W(\varphi) &= \frac{4\pi\chi}{C(1)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи.

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (2), которые после подстановки в них (18), (19) легко сводятся к имеющим одинаковый вид обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $B(r)$ и $C(r)$

$$\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG(r)}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \cdot G(r) = 0.$$

Здесь $G(r) \equiv B(r)$ или $G(r) \equiv C(r)$. Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$. Учитывая, что добавки к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ должны удовлетворять условиям ограниченности (3), можно записать $B(r) = I_m(kr)$, $C(r) = K_m(kr)$. В результате выражения для поправок к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ примут окончательный вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= -i\omega \frac{I_m(kr)}{k \cdot I_m'(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + (\text{к.с.}); \\ \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + (\text{к.с.}). \end{aligned} \quad (20)$$

При записи выражения для $\Phi^{(1)}$ учтено, что из условия сохранения заряда следует, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности равна нулю $\Phi_S^{(1)}(t) = 0$.

Из системы граничных и дополнительных условий (12)–(16) осталось неиспользованным динамическое граничное условие (13). Подставляя в него решения (11), (17) и (20), получаем дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k и азимутальное число m с частотой колебаний ω ,

$$\omega_m^2(k) = G_m(k)[k^2 + m^2 - 1 + W \cdot (1 + H_m(k))];$$

$$G_m(k) \equiv \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)}; \quad H_m(k) \equiv \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)}; \quad W \equiv 4\pi \cdot \chi^2. \quad (21)$$

в) Во втором порядке малости из системы (4)–(8) получим неоднородное уравнение для поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ (см. Приложение А). Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого (11) и первого (17), (20) порядков малости, после подстановки которых граничные и дополнительные условия (А.1)–(А.5) примут вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = \left[\frac{\partial \xi^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \xi^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + i \left[X_1 \cdot ((\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi)) + X_2 \cdot 2\xi^{(+)} \cdot \xi^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + (\text{к.с.}); \quad (22)$$

$$- \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi\xi^{(2)} \right] + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} = -i\omega \frac{1}{G_m(k)} \left[\frac{\partial \xi^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \xi^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \times \exp(i\theta) + \left[Y_1 ((\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi)) + Y_2 \cdot 2\xi^{(+)} \xi^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + Y_3 \cdot 2\xi^{(+)} \cdot \overline{\xi^{(-)}} \exp(i2m\varphi) + Y_4 (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) + (\text{к.с.}); \quad (23)$$

$$\Phi^{(2)} - 4\pi\chi\xi^{(2)} = \Phi_S^{(2)} + L \left\{ [(\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) + 2\xi^{(+)} \xi^{(-)}] \exp(i2\theta) + 2\xi^{(+)} \cdot \overline{\xi^{(-)}} \exp(i2m\varphi) + (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) + (\text{к.с.}) \right\}; \quad (24)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} d\varphi \cdot dz = -4\pi^2 \lambda \chi [k^2 + m^2 - 4H_m(k)] (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2); \quad (25)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} \cdot d\varphi \cdot dz = -\pi\lambda \cdot (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2). \quad (26)$$

Все недостающие обозначения приведены в Приложении В. При записи уравнения (25) использовалось

рекуррентное соотношение [16]

$$K_m''(k) = \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) K_m(k) - \frac{1}{k} K_m'(k).$$

Зададимся целью найти частное решение задачи второго порядка малости, удовлетворяющее записанным для функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ уравнениям (2), (3) и системе уравнений (22)–(26). Вид функций неоднородности в (22)–(24) подсказывает характер зависимости искомого решения от координаты φ и аргумента θ . На этом основании примем, что

$$\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = A_0 + [A_1^{(+)} \exp(im\varphi) + A_1^{(-)} \exp(-im\varphi)] \times \exp(i\theta) + [A_2 + A_2^{(+)} \exp(i2m\varphi) + A_2^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \times \exp(i2\theta) + A_3 \exp(i2m\varphi) + (\text{к.с.}); \quad (27)$$

$$\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = B_0 \cdot F_0(r) + [B_1^{(+)} \cdot F_1^{(+)}(r) \exp(im\varphi) + B_1^{(-)} \cdot F_1^{(-)}(r) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + [B_2 \cdot F_2(r) + B_2^{(+)} \cdot F_2^{(+)}(r) \exp(i2m\varphi) + B_2^{(-)} \cdot F_2^{(-)}(r) \exp(-i2m\varphi)] \times \exp(i2\theta) + B_3 \cdot F_3(r) \exp(i2m\varphi) + (\text{к.с.}); \quad (28)$$

$$\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = D_0 \cdot C_0(r) + [D_1^{(+)} \cdot C_1^{(+)}(r) \exp(im\varphi) + D_1^{(-)} \cdot C_1^{(-)}(r) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + [D_2 \cdot C_2(r) + D_2^{(+)} \cdot C_2^{(+)}(r) \exp(i2m\varphi) + D_2^{(-)} \cdot C_2^{(-)}(r) \exp(-i2m\varphi)] \times \exp(i2\theta) + D_3 \cdot C_3(r) \exp(i2m\varphi) + (\text{к.с.}). \quad (29)$$

Зависимости функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от координаты r определим из уравнений Лапласа. Подставляя (28), (29) в (2) и требуя обращения в нуль сумм коэффициентов при экспонентах с различными показателями, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для каждой из функций $F_j^{(\pm)}(r)$ и $C_j^{(\pm)}(r)$; $j = 0, 1, 2, 3$. Решения этих уравнений с учетом условий ограниченности (3) позволяют привести выражения (28), (29) для потенциалов $\Psi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$ к виду

$$\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = B_0 + [B_1^{(+)} \exp(im\varphi) + B_1^{(-)} \exp(-im\varphi)] \times I_m(kr) \exp(i\theta) + [B_2 \cdot I_0(2kr) + (B_2^{(+)} \exp(i2m\varphi) + B_2^{(-)} \exp(-i2m\varphi)) \cdot I_{2m}(2kr)] \exp(i2\theta) + B_3 \cdot r^{2m} \exp(i2m\varphi) + (\text{к.с.}); \quad (30)$$

$$\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = D_0 \ln r + [D_1^{(+)} \exp(im\varphi) + D_1^{(-)} \exp(-im\varphi)] \cdot K_m(kr) \exp(i\theta) + [D_2 \cdot K_0(2kr) + (D_2^{(+)} \exp(i2m\varphi) + D_2^{(-)} \exp(-i2m\varphi)) \cdot K_{2m}(2kr)] \exp(i2\theta) + D_3 \cdot r^{-2m} \exp(i2m\varphi) + (\text{к.с.}). \quad (31)$$

Коэффициенты $A_j^{(\pm)}$, $B_j^{(\pm)}$ и $D_j^{(\pm)}$ определяются из системы уравнений (22)–(26). Заметим, что B_0 может быть функцией времени, выбранной в удобной для записи решения форме, поскольку никакого физического значения она не имеет. Из условий сохранения объема (26) и заряда (25) несложно найти

$$A_0 = -\frac{1}{2}(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2);$$

$$D_0 = -2\pi\chi(k^2 + m^2)(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2). \quad (32)$$

Подставляя (27) и (30) в кинематическое граничное условие (22) и приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых экспонентах из левой и правой частей равенства, получим

$$k \cdot I'_m(k) \cdot B_1^{(\pm)} + i \cdot \omega_m(k) \cdot A_1^{(\pm)} = \frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial T_1};$$

$$2k \cdot I'_m(2k) \cdot B_2^{(\pm)} + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot A_2^{(\pm)} = i \cdot X_1 \cdot (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$2k \cdot I'_0(2k) \cdot B_2 + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot A_2 = i \cdot X_2 \cdot 2\xi^{(+)} \cdot \xi^{(-)};$$

$$B_3 = 0. \quad (33)$$

Аналогичным образом, используя (27) и (31), из условия эквипотенциальности поверхности струи (24) получим следующую систему равенств:

$$K_m(k) \cdot D_1^{(\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_1^{(\pm)} = 0;$$

$$K_{2m}(2k) \cdot D_2^{(\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_2^{(\pm)} = L(\xi^{(\pm)})^2;$$

$$K_0(2k) \cdot D_2 - 4\pi\chi \cdot A_2 = L \cdot 2\xi^{(+)}\xi^{(-)};$$

$$D_3 - 4\pi\chi \cdot A_3 = L \cdot 2\xi_+ \bar{\xi}_-;$$

$$\Phi_S^{(2)} = 4\pi\chi(1 + H_m(k)) \cdot (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2). \quad (34)$$

Отметим, что при получении значения добавки второго порядка малости к потенциалу поверхности $\Phi_S^{(2)}$ были использованы выражения (32).

Наконец, подставляя (27), (30) и (31) в динамическое граничное условие (23), а также учитывая (32), найдем

$$(1 - k^2 - m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_1^{(\pm)} + i \cdot \omega_m(k) \cdot I_m(k) \cdot B_1^{(\pm)} - \chi \cdot k \cdot K'_m(k) \cdot D_1^{(\pm)} = -i \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial T_1};$$

$$(1 - 4k^2 - 4m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_2^{(\pm)} + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot I_{2m}(2k) \cdot B_2^{(\pm)} - \chi \cdot 2k \cdot K'_{2m}(2k) \cdot D_2 = Y_1 \cdot (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$(1 - 4k^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_2 + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot I_0(2k) \cdot B_2 - \chi \cdot 2k \cdot K'_0(2k) \cdot D_2^{(\pm)} = Y_2 \cdot 2\xi_+ \cdot \xi_-;$$

$$(1 - 4m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_3 + 2m\chi \cdot D_3 = Y_3 \cdot 2\xi^{(+)} \cdot \bar{\xi}^{(-)};$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial T_0} = -\left[Y_4 + \frac{1}{2} - 2\pi\chi^2(k^2 + m^2 + 1) \right] \cdot (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2). \quad (35)$$

Выяснение вида функции B_0 (см. последнее из равенств (35)) имеет чисто академическое значение, поскольку потенциал определяется с точностью до произвольной аддитивной функции, зависящей только от времени [17].

Совместное решение системы равенств (33)–(35) позволяет определить искомые коэффициенты. Рассмотрим первые равенства из выписанных систем. Выражая из (33) коэффициенты $B_1^{(\pm)}$, а из (34) — $D_1^{(\pm)}$ и подставляя из в (35), получим

$$\left[1 - k^2 - m^2 - 4\pi\chi^2 \cdot (1 + H_m(k)) + \frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} \right] A_1^{(\pm)} = -i \cdot 2 \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial T_1}.$$

Несложно заметить, что в силу дисперсионного соотношения (21) квадратная скобка при $A_1^{(\pm)}$ обращается в нуль. В результате получаем

$$\frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial T_1} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) означает, что комплексные амплитуды $\xi^{(\pm)}$ не зависят от временного масштаба T_1 и при решении рассматриваемой задачи с точностью до второго порядка малости являются константами.

Коэффициенты $A_1^{(\pm)}$ остались неопределенными. Их значения можно выяснить только из начальных условий. Поскольку мы поставили перед собой цель построить решение, имеющее наиболее простой вид, подбирая нужным образом начальные условия, то мы вправе выбрать их так, чтобы получить $A_1^{(\pm)} = 0$. При этом, согласно (33) и (34), будем иметь $B_1^{(\pm)} = 0$ и $D_1^{(\pm)} = 0$.

Определяя из системы (33)–(35) все оставшиеся коэффициенты, запишем решение второго порядка малости в окончательном виде

$$\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = -\frac{1}{2}(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) + 2a_3 \cdot \xi^{(+)} \cdot \bar{\xi}^{(-)} \exp(i2\theta) + \left[a_1 \cdot ((\xi^{(+)}))^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) \right] + 2a_2 \cdot \xi^{(+)} \cdot \xi^{(-)} \exp(i2\theta) + (\text{к.с.});$$

$$\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = -b_0(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) \cdot T_0 - i \cdot \left[b_1 \cdot ((\xi^{(+)}))^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) \right] \times I_{2m}(2kr) + 2b_2 \xi^{(+)} \xi^{(-)} I_0(2kr) \exp(i2\theta) + (\text{к.с.});$$

$$\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = -2\pi\chi(k^2 + m^2)(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) \ln r + \left[d_1 \cdot ((\xi^{(+)}))^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) \right] \times K_{2m}(2kr) + 2d_2 \cdot \xi^{(+)} \xi^{(-)} K_0(2kr) \exp(i2\theta) + 2d_3 \cdot \xi^{(+)} \cdot \bar{\xi}^{(-)} \exp(i \cdot 2\varphi) + (\text{к.с.}); \quad (37)$$

все вновь введенные обозначения приведены в Приложении С.

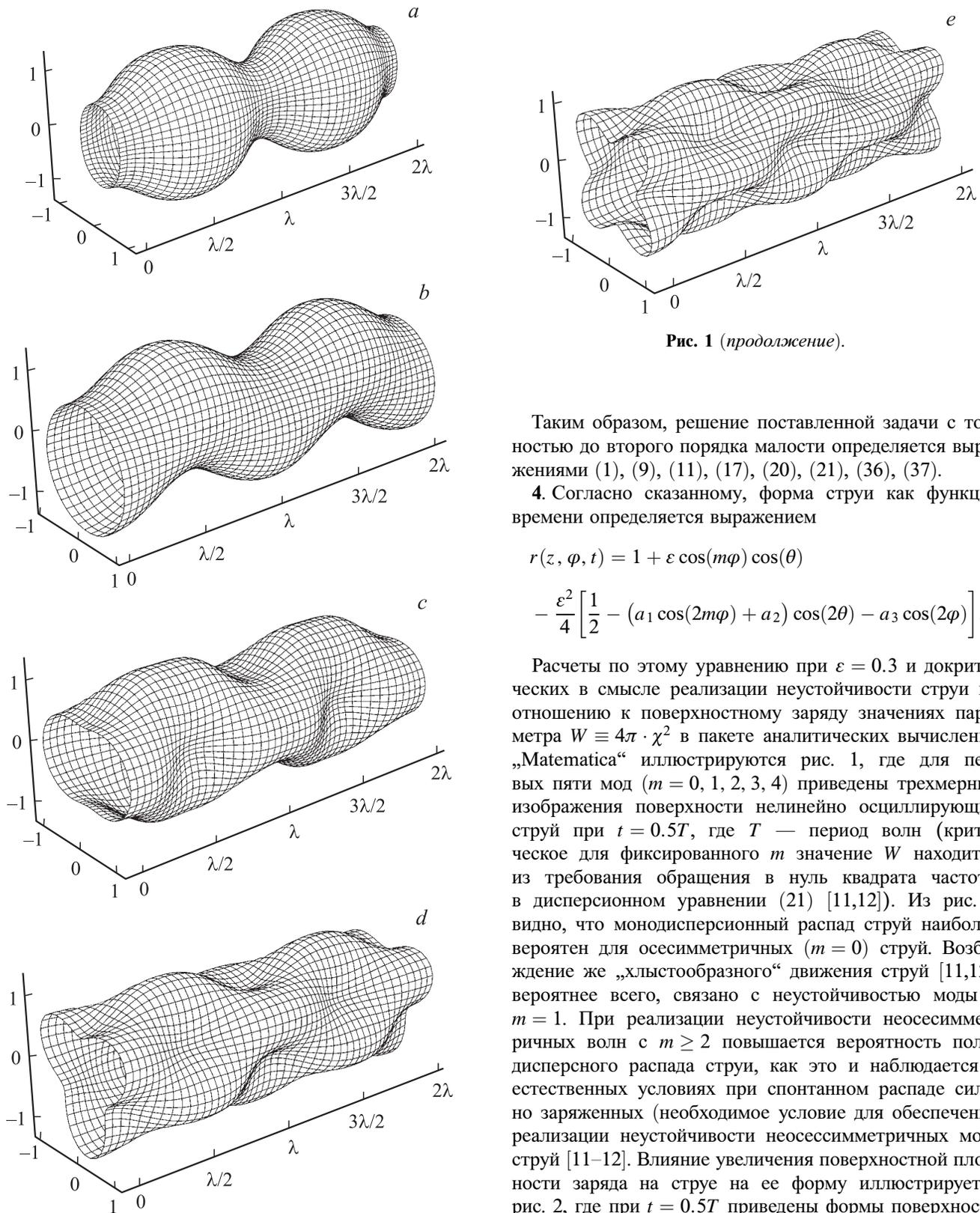


Рис. 1 (продолжение).

Таким образом, решение поставленной задачи с точностью до второго порядка малости определяется выражениями (1), (9), (11), (17), (20), (21), (36), (37).

4. Согласно сказанному, форма струи как функция времени определяется выражением

$$r(z, \varphi, t) = 1 + \varepsilon \cos(m\varphi) \cos(\theta) - \frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{1}{2} - (a_1 \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\theta) - a_3 \cos(2\varphi) \right].$$

Расчеты по этому уравнению при $\varepsilon = 0.3$ и докритических в смысле реализации неустойчивости струи по отношению к поверхностному заряду значениях параметра $W \equiv 4\pi \cdot \chi^2$ в пакете аналитических вычислений „Mathematica“ иллюстрируются рис. 1, где для первых пяти мод ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) приведены трехмерные изображения поверхности нелинейно осциллирующих струй при $t = 0.5T$, где T — период волн (критическое для фиксированного m значение W находится из требования обращения в нуль квадрата частоты в дисперсионном уравнении (21) [11,12]). Из рис. 1 видно, что монодисперсионный распад струй наиболее вероятен для осесимметричных ($m = 0$) струй. Возбуждение же „хлыстообразного“ движения струй [11,12], вероятнее всего, связано с неустойчивостью моды с $m = 1$. При реализации неустойчивости неосесимметричных волн с $m \geq 2$ повышается вероятность полидисперсного распада струи, как это и наблюдается в естественных условиях при спонтанном распаде сильно заряженных (необходимое условие для обеспечения реализации неустойчивости неосесимметричных мод) струй [11–12]. Влияние увеличения поверхностной плотности заряда на струе на ее форму иллюстрируется рис. 2, где при $t = 0.5T$ приведены формы поверхности неосесимметричных струй с $m = 1, 2, 3, 4$, полученные при $\varepsilon = 0.3$, когда плотность поверхностного заряда близка к критической для данной моды. Видно, что с увеличением поверхностной плотности электрического заряда амплитуды волн растут, а вероятность именно полидисперсного распада при $m \geq 2$ становится более

Рис. 1. Формы поверхности нелинейно осциллирующих струй при докритических в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду значениях поверхностной его плотности, рассчитанные при $\varepsilon = 0.3, k = 2$: *a* — $W = 0.5, m = 0$; *b* — $W = 1, m = 1$; *c* — $W = 1, m = 2$; *d* — $W = 1, m = 3$; *e* — $W = 1, m = 4$.

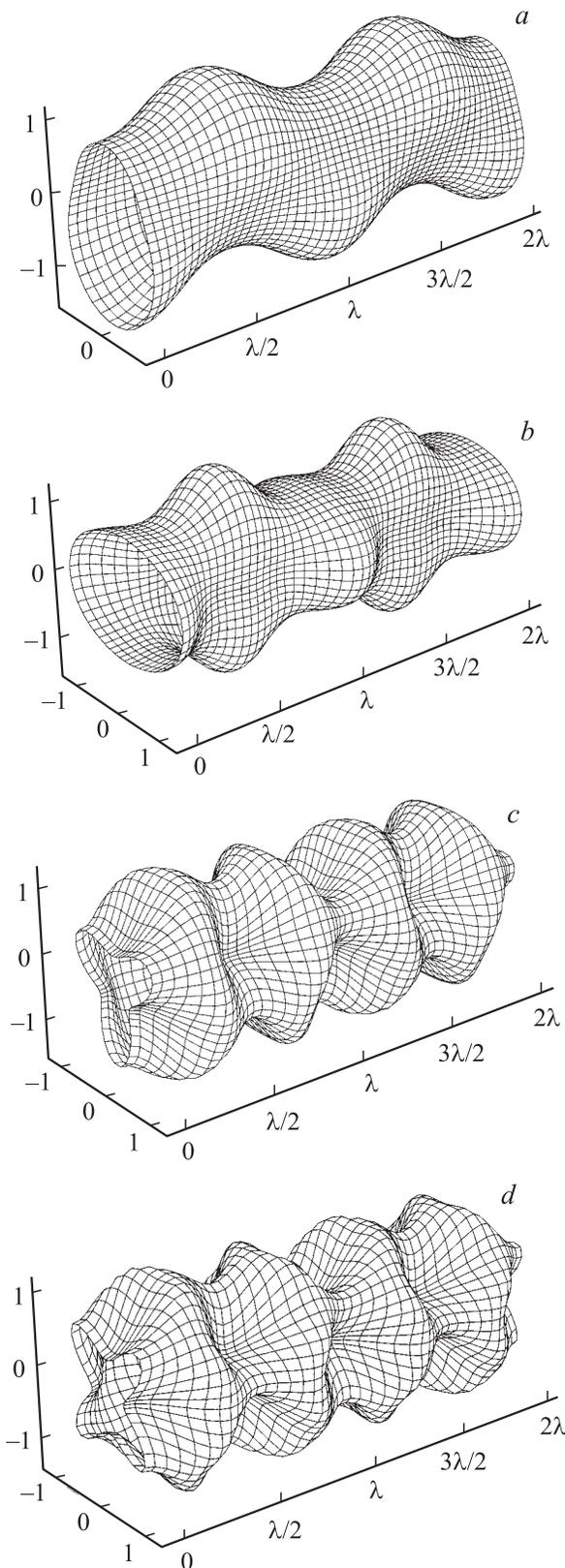


Рис. 2. Формы поверхности нелинейно осциллирующих струй при $\varepsilon = 0.3$, $k = 2$, когда поверхностная плотность заряда на струе близка к критической для данной моды: a — $W = 2.456$, $m = 1$; b — $W = 3.329$, $m = 2$; c — $W = 4$, $m = 3$; d — $W = 5.25$, $m = 4$.

очевидной. Использованное в расчетах для рис. 1 и 2 большое значение малого параметра $\varepsilon = 0.3$ выбрано для наглядности.

Из выписанного уравнения для формы струи несложно видеть, что кроме волны с волновым числом k , существующей в начальный момент времени, возбуждается также за счет нелинейного взаимодействия волна с удвоенным волновым числом $2k$. Между этими двумя волнами имеет место резонансное взаимодействие, определяющееся наличием у коэффициентов a_1 и a_2 знаменателей, которые при определенных условиях обращаются в нуль [18–20]. Изучение резонансного взаимодействия цилиндрических волн составляет предмет отдельного исследования, пока же интересно отметить, что при резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций и волн возможен стопроцентный обмен энергией между ними [20–21]. Кроме того, примечательно, что резонансно взаимодействуют волны с различными волновыми и азимутальными числами, т.е. с различной симметрией, как это видно из выражений для коэффициентов a_1 и a_2 . Влияние величины поверхностной плотности электрического заряда на струе χ на закономерности реализации резонансного взаимодействия сводится к изменению положения резонанса (к изменению волновых чисел и азимутальных параметров взаимодействующих волн при варьировании χ). Вдали от положений резонансов влияние электрического заряда, имеющегося на поверхности струи, сводится к появлению возможности развития неустойчивости неосесимметричных мод при достаточно больших плотностях заряда: при $4\pi\chi^2 \geq 1$ [11–12]. Напомним, что в отсутствие заряда (при $\chi = 0$) все неосесимметричные моды устойчивы [1], это следует из дисперсионного уравнения (21). Влияние заряда (объемного, либо поверхностного) на форму струи реализуется через зависимость от его плотности χ коэффициентов a_j , определяющих отклонение второго порядка малости формы струи от цилиндрической.

В проанализированном выше втором приближении по амплитуде волны поправок к частотам нет, они могут появиться лишь в следующем, третьем, приближении [20,22–23]. Поэтому в настоящем рассмотрении критические условия реализации неустойчивости поверхности неосесимметричной струи в смысле разбиения ее на отдельные капли определяются из линейного приближения, как это описано в [11,12], условием перехода через нуль в область отрицательных значений квадрата частоты (21). Впрочем, следует отметить, что поправки к критическим условиям реализации неустойчивости, связанные с нелинейным взаимодействием волн, не могут быть значительными и привести к заметному изменению существующих представлений о развитии неустойчивости поверхности струи, поскольку имеют второй порядок малости (см., например, ранее проделанные нелинейные анализы третьего порядка малости для заряженных сферических капель и плоской заряженной поверхности жидкости [22,24,25]).

Заключение

Решение задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной струи уже во втором порядке малости по амплитуде деформации невозмущенной цилиндрической струи позволяет обнаружить резонансное взаимодействие волны, определяющей начальную виртуальную деформацию, с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Положение резонансных ситуаций зависит от величины поверхностной плотности электрического заряда на струе.

Приложение А. Система граничных и дополнительных условий второго порядка малости

$$r = 1 : \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z}; \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(2)} \right\} \\ & + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} = \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right] \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] (\xi^{(1)})^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} + (\xi^{(1)})^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + 2 \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (A.2) \end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)}(t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} (\xi^{(1)})^2; \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \cdot \xi^{(2)} \right] d\varphi \cdot dz \\ & = - \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \cdot \xi^{(1)} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \cdot (\xi^{(1)})^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right] d\varphi \cdot dz; \quad (A.4) \end{aligned}$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} d\varphi \cdot dz = -\frac{1}{2} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} (\xi^{(1)})^2 d\varphi \cdot dz. \quad (A.5)$$

Приложение В. Выражения для коэффициентов в граничных и дополнительных условиях (22)–(26)

$$X_1 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2(k^2 + m^2) - G_m(k)];$$

$$X_2 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2k^2 - G_m(k)];$$

$$Y_1 = 1 + \frac{1}{2} (k^2 - 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 + m^2 - 3(G_m(k))^2]$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_2 = 1 + \frac{1}{2} (k^2 - 3m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - 3(G_m(k))^2]$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_3 = 1 - \frac{1}{2} (k^2 + 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - (G_m(k))^2]$$

$$+ 2\pi\chi^2 [k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_4 = 1 - \frac{1}{2} (k^2 + 3m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 + m^2 - (G_m(k))^2]$$

$$+ 2\pi\chi^2 [k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$L = -2\pi\chi [1 + 2H_m(k)].$$

Приложение С. Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости,

$$a_1 \equiv \frac{G_{2m}(2k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k)X_1}{4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)};$$

$$a_2 \equiv \frac{G_0(2k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + 2\omega_m(k)X_2}{4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)};$$

$$a_3 \equiv \frac{Y_3 - 2m\chi L}{(1 - 2m)(1 + 2m - 4\pi\chi^2)};$$

$$b_0 \equiv Y_4 + \frac{1}{2} - 2\pi\chi^2 (k^2 + m^2 + 1);$$

$$b_1 \equiv \frac{2\omega_m(k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + [4k^2 + 4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2(1 + H_{2m}(2k))]X_1}{I_{2m}(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)]};$$

$$b_2 \equiv \frac{2\omega_m(k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + [4k^2 - 1 + 4\pi\chi^2(1 + H_0(2k))]X_2}{I_0(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)]};$$

$$d_1 \equiv \frac{G_{2m}(2k) \cdot [4\pi\chi Y_1 - (4k^2 + 4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L] + 2\omega_m(k)[4\pi\chi X_1 + 2\omega_m(k)L]}{K_{2m}(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)]};$$

$$d_2 \equiv \frac{G_0(2k) \cdot [4\pi\chi Y_2 - (4k^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L] + 2\omega_m(k)[4\pi\chi X_2 + 2\omega_m(k)L]}{K_0(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)]};$$

$$d_3 \equiv \frac{4\pi\chi Y_3 - (4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L}{(1 - 2m)(1 + 2m - 4\pi\chi^2)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [2] Ентов В.М., Шмарьян Л.Е. // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 97–106.
- [3] Шутов А.А., Захарьян А.А. // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 4. С. 12–15.
- [4] Разумовский Н.А., Чесноков Ю.Г. // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 97–104.
- [5] Горшков В.Н., Чабан М.Г. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
- [6] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 2 (12). С. 1990–2005.
- [7] Чесноков Ю.Г. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 31–38.
- [8] Чесноков Ю.Г. // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 56–62.
- [9] Hohman M.N., Shin M., Rutledge G., Brenner M.P. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. N 8. P.2201–2220.
- [10] Рэлей (Стретт Дж.В.) Теория звука. Т. 2. М.: Гостехтеориздат. 1955. 475 с.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 5–12.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
- [13] Naufel F.H. // Phys. Fluids. 1970. N 4. P. 841–847.
- [14] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.
- [15] Naufel F.H. // J. Fluid Mech., 1971. Vol. 48. P. 385–395.
- [16] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [18] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [19] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
- [20] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
- [21] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
- [22] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 36–45.
- [23] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [24] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [25] Белоножко Д.Ф., Климов А.В., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 24. С. 41–45.