

## Нагревательное устройство неизоэнтропного сжатия

© Д.Б. Волов

Самарская государственная академия путей сообщения,  
443066 Самара, Россия

(Поступило в Редакцию 5 мая 2003 г.)

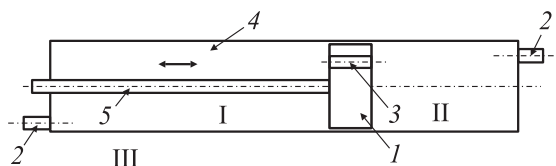
Составлена математическая и механическая модели нагревательного устройства периодического неизоэнтропного сжатия, определены границы применения моделей. Получена формула для минимального периода собственных колебаний, выявлены особенности поведения нелинейной системы. Рассмотрено явление самоорганизации системы, приводящее к однозначному квазилинейному поведению.

### Введение

Принцип работы так называемой *HS*-системы основан на неизоэнтропном разогреве газа при его периодическом перетекании из одного объема в другой. Это явление, в частности, используется в баллистических устройствах разогрева — многостадийных плазмотронах [1]. Баллистические плазмотроны находят широкое применение в различных областях техники, используются для закалки и термоупрочнения инструментов, накачки твердотельных лазеров [2,3], в плазмо- и фотохимии [4] и т.д.

Устройство неизоэнтропного периодического разогрева может применяться как самостоятельная единица, так и в качестве элемента накачки лазеров. Разработка подобной системы открывает широкие перспективы по использованию недорогих, простых в эксплуатации лазеров в технологических комплексах (резка, сварка, термоупрочнение деталей и т.д.). Воздействие лазерного излучения на поверхность обрабатываемых деталей обладает рядом уникальных свойств, что обеспечивает высокое качество изделия.

Наиболее простым и очевидным представляется использование *HS*-систем в воздушных устройствах обогрева. Существующие источники обогрева используют нагревательные элементы либо с высокой рабочей температурой, что приводит к сжиганию кислорода воздуха и появлению запаха гари в помещении, либо низкотемпературные теплоносители (в масляных обогревателях), не способные быстро вывести устройство на расчетный режим. В предлагаемой системе разогрев достигается путем прямого нагрева воздуха, т.е. через передачу энергии непосредственно газу, минуя теплоноситель.



**Рис. 1.** Схема установки: 1 — поршень, 2 — выпускное отверстие, 3 — отверстие (сопло) в поршне, 4 — цилиндр, 5 — шток.

Главными узлами подобных систем являются цилиндр и поршень с отверстием (соплом). Поршню тем или иным способом сообщается возвратно-поступательное движение. Газ разогревается при перетекании через отверстие [5].

Открытая система работает следующим образом. Извне газ поступает в цилиндр, где при периодическом движении поршня с отверстием происходит увеличение температуры. Часть газа выходит из цилиндра (новая поступает), другая нагревается далее (рис. 1).

Установками *HS-1* будем называть устройства, определенные как *HS*-системы, у которых амплитуда движения поршня фиксирована. Установками *HS-2* типа назовем *HS*-устройства, в которых периодическое возбуждение передается свободному поршню и поэтому амплитуда его колебаний может изменяться.

### Построение математической модели

Воспользовавшись полисекционной теорией [6], можно составить математическую модель работы устройства и проинтегрировать полученную систему нелинейных дифференциальных уравнений численными методами. Однако если учесть некоторые особенности работы *HS*-системы, можно применить и аналитический подход. Разобьем систему на три секции: объем слева от поршня образует секцию I, справа — II, объем вне установки принимаем за секцию III. Выпишем исходную систему уравнений

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{V_1}(G_{12} + G_{13}) - \frac{\rho_1}{V_1} \frac{dV_1}{dt}, \quad (1)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{V_1} \left( \frac{1}{\rho_1} \left\{ \begin{aligned} (\gamma T_1 - T_1)G_{12}, & \quad p_1 > p_2 \\ (\gamma T_2 - T_1)G_{21}, & \quad p_1 \leq p_2 \end{aligned} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\rho_1} \left\{ \begin{aligned} (\gamma T_1 - T_1)G_{13}, & \quad p_1 > p_3 \\ (\gamma T_3 - T_1)G_{31}, & \quad p_1 \leq p_3 \end{aligned} \right. \right) - (\gamma - 1) \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{V_2}(G_{21} + G_{23}) - \frac{\rho_2}{V_2} \frac{dV_2}{dt}, \quad (2)$$

$$\rho_3 = \frac{1}{V_3}(m_{01} + m_{02} + m_{03} - \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1), \quad (3)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{V_2} \left( \frac{1}{\rho_2} \begin{cases} (\gamma T_2 - T_2)G_{21}, & p_2 > p_1 \\ (\gamma T_1 - T_2)G_{12}, & p_2 \leq p_1 \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_2} \begin{cases} (\gamma T_2 - T_2)G_{23}, & p_2 > p_3 \\ (\gamma T_3 - T_2)G_{32}, & p_2 \leq p_3 \end{cases} \right) - (\gamma - 1) \frac{T_2}{V_2} \frac{dV_2}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{1}{V_3} \left( \frac{1}{\rho_3} \begin{cases} (\gamma T_3 - T_3)G_{31}, & p_3 > p_1 \\ (\gamma T_1 - T_3)G_{13}, & p_3 \leq p_1 \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_3} \begin{cases} (\gamma T_3 - T_3)G_{32}, & p_3 > p_2 \\ (\gamma T_2 - T_3)G_{23}, & p_3 \leq p_2 \end{cases} \right) - \frac{\alpha_3(T_3 - T_0)S'_3}{c_v \rho_3 V_3}, \quad (6)$$

$$G_{ml} = -S_{ml} \rho_m a_{ml}$$

$$\times \begin{cases} \left( \frac{2}{\gamma_m + 1} \right)^{\frac{\gamma_m + 1}{2(\gamma_m - 1)}}, & p_l < p_m k_m, \\ \sqrt{\frac{2}{\gamma_m - 1} \left( 1 - \left( \frac{p_l}{p_m} \right)^{\frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m}} \right) \left( \frac{p_l}{p_m} \right)^{\frac{1}{\gamma_m}}}, & p_m k_m \leq p_l < p_m, \end{cases}$$

$$k_m = \left( 1 - \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m + 1} \right)^{\frac{\gamma_m}{\gamma_m - 1}}, \quad a_{ml} = \frac{p_m - p_l}{|p_m - p_l|} \sqrt{\gamma_m \frac{R_0}{\mu_m} T_m},$$

$$m, l = \begin{cases} i, j, & p_i > p_j, \\ j, i, & p_i \leq p_j. \end{cases} \quad (7)$$

где  $t$  — время,  $a$  — скорость звука,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $S$  — площадь отверстия,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $m$  — масса газа,  $R_0$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — полярная масса,  $\alpha'$  — коэффициент теплопередачи,  $S'$  — поверхность теплопередачи,  $V$  — объем секции, индекс 0 относится к начальным значениям параметров, индексы 1–3 — указывают на номер секции; в уравнениях (4), (5) необходимо учесть еще теплоотвод через стенки цилиндра.

При достаточной мощности двигателя координата центра масс поршня изменяется по гармоническому закону. В любом другом случае периодическое движение координаты центра масс поршня можно разложить в ряд Фурье.

При включении установки сначала наблюдается переходный режим, когда положение точки переключения направления скорости потока газа в сопле мигрирует от срединного положения поршня до некоторого устойчивого значения, характерного для установившегося режима. Формируется опережение по переключению на другое направление потока и соответственно на другую ветвь уравнений (1)–(7). По завершении переходного режима образуются два устойчивых положения переключения скорости  $u$ , слева и справа от  $L_0/2$  ( $L_0$  — длина цилиндра) на  $\psi$ . Эти положения соответствуют равенству давлений в секциях  $p_1 = p_2$ . Подобное явление происходит потому, что газ за движущимся поршнем нагревается и при обратном движении ему приходится сжимать уже подогретый газ. Этот газ имеет уже большее давление, и условие  $p_1 = p_2$  будет выполнено раньше, до момента прохождения точки  $L_0/2$ . Поскольку

подогрев газа за один проход невелик, то смещение точек перехода от положения равновесия незначительно и для расчета температуры можно считать координату точки переключения  $x = L_0/2$ .

## Механическая интерпретация работы газовой нагревательной системы

Механическая аналогия в данном случае оказывается весьма полезной. При работе устройства газ периодически сжимается, что соответствует действию на поршень двух пружин переменной жесткости (1, 2 на рис. 2). Наличие отверстия (сопла) в поршне диаметром  $d_c$  приводит к разогреву газа, т.е. к рассеянию энергии в системе. При  $d_c = 0$  увеличения температуры не происходит (потери на трение между частями установки пренебрежимо малы в сравнении с рассматриваемым эффектом). Поэтому удобно ввести неконсервативную силу квазитрения, учитывающую влияние  $d_c$  и вызывающую диссипацию энергии. Таким образом, механическая модель устройства представляет собой тело массы  $m_p$  (массы поршня) с закрепленными на расстоянии  $L_0$  друг от друга пружинами переменной жесткости. Причем на тело действует сила трения  $R$  (рис. 2).

Предположим, что на собственную частоту колебаний диаметр сопла не влияет. При малых соплах ( $d_c < D$ ) это оправдано. Тогда уравнение собственных колебаний механической системы

$$m_p \frac{d^2 x}{dt^2} + F(x) = 0, \quad F(x) = p_2 \sigma - p_1 \sigma, \quad (8)$$

где  $x$  — координата центра масс поршня,  $\sigma$  — площадь сечения цилиндра.

Выберем  $x = 0$  в положении равновесия. Давление газа в данном случае рассчитывается из уравнения адиабаты

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{V_{01}}{V_1} \right)^\gamma = \left( \frac{L_0/2 - l_p/2}{L_0/2 + x - l_p/2} \right)^\gamma,$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \left( \frac{L_0/2 - l_p/2}{L_0/2 - x - l_p/2} \right)^\gamma,$$

где  $l_p$  — длина поршня; индекс 0 у газодинамических параметров относится к положению равновесия; индексы 1, 2 указывают на номер секции (рис. 1).

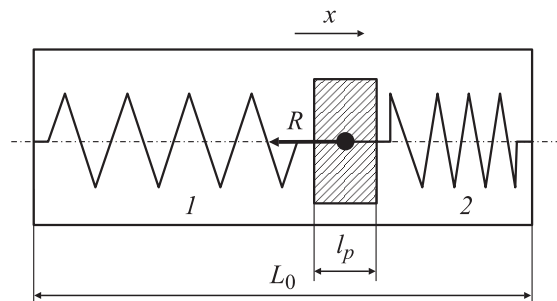


Рис. 2. Механическая модель системы.

Приведенной длиной установки назовем величину  $L = L_0 - l_p$ . Тогда  $F(x)$  в уравнении (8)

$$F(x) = k((L/2 - x)^{-\gamma} - (L/2 + x)^{-\gamma}), \quad k = p_0\sigma(L/2)^\gamma.$$

Выполняя интегрирование (8), получаем закон движения поршня

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m_p} \left( C - \int_0^x F(\xi) d\xi \right)}}, \quad C = \text{const.}$$

Тогда период колебаний, учитывая симметрию задачи ( $A$  — амплитуда колебаний),

$$T_p = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m_p} \int_0^A F(\xi) d\xi}}. \quad (9)$$

Введем три безразмерных параметра: относительную координату  $l = x/A$ , фактор истечения  $\lambda_1$  и геометрический фактор  $\lambda_2$

$$\lambda_1 = \frac{uS}{\sigma A \omega}, \quad \lambda_2 = \frac{L}{2A},$$

где  $\omega$  — частота вынужденных колебаний.

Тогда период свободных колебаний

$$T_p = 4A^{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{m_p(\gamma-1)}{2k}} \times \int_0^1 \frac{dl}{\sqrt{(\lambda_2+1)^{1-\gamma} + (\lambda_2-1)^{1-\gamma} - (\lambda_2+l)^{1-\gamma} - (\lambda_2-l)^{1-\gamma}}}. \quad (10)$$

Таким образом, период колебаний оказывается зависящим от амплитуды, причем существует максимальное значение периода при  $A \rightarrow 0$ . Для его отыскания разложим в степенной ряд по  $x$  функцию  $F(x)$  и, поскольку при  $A \rightarrow 0$  также  $x \rightarrow 0$ , удержим первый член ряда. Подставляя его в (9) и проводя интегрирование, для максимального периода свободных колебаний получим

$$(T_p)_{\max} = \pi \sqrt{\frac{m_p L}{k \gamma}} \left( \frac{L}{2} \right)^\gamma. \quad (11)$$

Перейдем к рассмотрению периодического движения системы при внешнем воздействии. Воспользуемся методом гармонического баланса [7]. Пусть возмущающая сила изменяется по гармоническому закону. При достаточной мощности двигателя координата центра масс поршня  $x$  изменяется также по гармоническому закону. В любом другом случае периодическое движение поршня можно охарактеризовать разложением в ряд Фурье. Уравнение движения имеет вид:

$$m_p \frac{d^2x}{dt^2} + F(x) + R\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + N = P_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (12)$$

где  $R$  — псевдосила трения,  $N$  — реакция опоры,  $P_0$  — амплитуда вынуждающей силы,  $\phi$  — фаза.

Для  $HS$ -систем второго типа  $N = 0$ , а для первого типа реакция опоры компенсирует силы, определяемые свойствами системы  $N = -F(x) - R(x, dx/dt)$ .

Будем искать решение уравнение (12) в форме  $x = A \cos \omega t$ .

В уравнение (12) входит член  $R(x, dx/dt)$  неконсервативных сил, работа которых приводит к увеличению температуры в системе. Для выяснения характера зависимости этих сил от параметров системы механической аналогии недостаточно. Необходим термодинамический подход на основе математической модели (1)–(7). Эта система нелинейных дифференциальных уравнений численно проинтегрирована и рассчитаны температуры и давления газа в секциях. Характер сил трения определяется видом кривой гистерезиса [7]. Действие сил сопротивления определяется величиной  $\sigma(p_2 - p_1) = R(x, dx/dt) + F(x)$ .

Как видно из рис. 3, характер сил псевдотрения довольно сложный. При малых диаметрах сопла, много меньших диаметра поршня  $D$  (рис. 3, *a*), работа этих сил за период невелика и кривая повторяет контуры линии  $F(x)$ . При диаметрах сопла, на которых достигается максимальный нагрев (диаметр сопла также  $d_c \ll D$ ) (рис. 3, *b*), форма петли близка к эллипсу.

Как указано в [7], жидкостному трению в линейной системе ( $F(x) \sim x$ ) соответствует петля гистерезиса в форме эллипса.

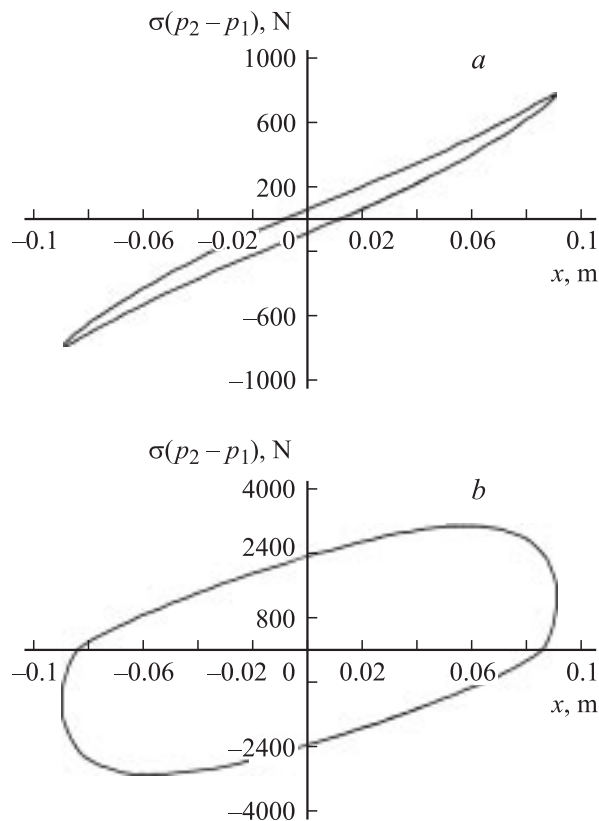
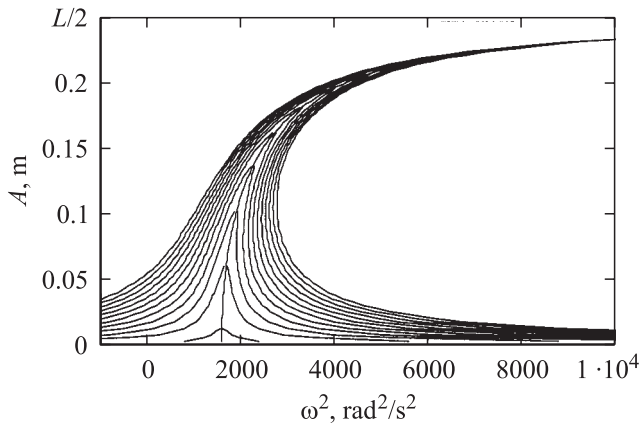


Рис. 3. Форма петли гистерезиса при различных значениях диаметра отверстия в установившемся режиме: *a* — при  $c \ll D$ ; *b* — при  $d_c$ , близком к оптимальному.



**Рис. 4.** Амплитудно-частотная характеристика нелинейной системы *HS-2*.

Из энергетической оценки сил сопротивления следует [7], что, несмотря на совершенно различную форму гистерезисной петли, общий характер затухания зачастую схожий. Главной характеристикой сил трения при колебаниях является коэффициент поглощения [7], форма же петли гистерезиса второстепенна. Это первое замечание по характеру сил псевдотрения. Во-вторых, в наиболее важном случае оптимального значения диаметра сопла режим работы соответствует движению с жидкостным трением (рис. 3, *b*). В-третьих, с расчетной точки зрения произвольный закон трения  $R(x, dx/dt)$  может быть приближенно заменен эквивалентным вязким трением с таким же коэффициентом поглощения. Это следует из того факта, что при решении методом гармонического баланса  $R(x, dx/dt)$  как периодическая функция также раскладывается в ряд Фурье. Удержание первого члена ряда  $R_1(A, \omega) \sin(\omega t)$  приводит к случаю жидкостного трения [7].

Эти три аргумента позволяют ограничиться рассмотрением случая жидкостного трения  $R = \alpha(dx/dt)$ ,  $\alpha = \text{const}$  (коэффициент  $\alpha$  зависит от параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ). Тогда при отыскании решения (12) в форме  $x = A \cos(\omega t)$  для систем второго типа метод гармонического баланса приводит к следующим соотношениям [7]:

$$[\omega_0^2(A) - \omega^2]A = \frac{P_0}{m_p} \cos \phi, \quad 2n\omega A = \frac{P_0}{m_p} \sin \phi,$$

где  $\alpha/m_p = 2n$ ,  $\omega_0(A) = 2\pi/T_p$  — собственная частота колебаний.

Исключив отсюда фазовый сдвиг, приходим к зависимости между частотой возмущающей силы и амплитуды вынужденных колебаний в системе *HS-2*

$$\omega^2 = \omega_0^2(A) - 2n^2 \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{m_p A}\right)^2 - 4n^2 \omega_0^2(A) + 4n^4}. \quad (13)$$

На рис. 4 представлена амплитудно-частотная характеристика  $A(\omega^2)$ , рассчитанная по формуле (13). При этом для построения скелетной кривой  $\omega_0^2(A)$

используется точное решение (10). На рис. 4 видно, что система сильно нелинейная резонансная частота зависит от амплитуды колебаний. При этом существует минимальная резонансная частота, значение которой соответствует (11).

В системах *HS-2* могут быть рассмотрены нелинейные эффекты в виде „дрейфа“ свободного поршня, спонтанного перехода при увеличении частоты от колебаний с малой амплитудой к колебаниям с  $A \approx L/2$  и вступлением в резонанс, субгармонические колебания и т.д.

Таким образом, механическая модель теплоэнергетического устройства позволяет определить резонансные режимы, выявить особенности работы нелинейной системы. Используя данный подход, можно перейти к инженерному расчету энергетических характеристик, минуя интегрирование полисекционной системы.

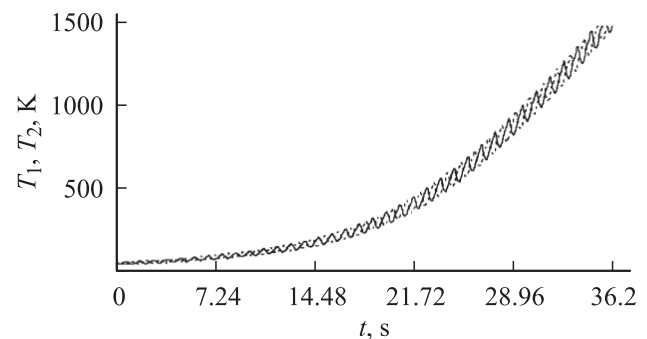
### Численные расчеты. Возникновение аттракторов в системе нагрева неизоэнтропного сжатия

Аналитическое решение системы уравнений (1)–(7) в отсутствие теплоотвода может быть найдено при условии, что закон периодического движения поршня известен. В приближении постоянства скорости звука это решение найдено. Температура газа в секции в этом случае изменяется по геометрической прогрессии

$$\begin{cases} T_1^{(m+1)} = T_1^m ((c_4 + c_5)(c'_4 + c'_5) + c_3 c'_6) \\ \quad + T_2^m (c'_4 + c'_5) c_6, \\ T_2^{(m+1)} = T_1^m (c_4 + c_5) c_3 + T_2^m c_6 c_3, \end{cases} \quad (14)$$

где коэффициенты  $c_i = \text{const}$  для заданной геометрии и режима работы,  $m$  — номер периода.

Однако при проведении численного интегрирования системы выяснилось, что решение (14) справедливо в ограниченной области. После нелинейного участка, определяемого этой формулой, следует линейное возрастание температуры в системе (рис. 5). Подобный результат на первый взгляд может показаться странным, тем более, что система изначально нелинейна (см. уравнения (1)–(7)). Рост температуры с геометрической



**Рис. 5.** Изменение температуры в секциях системы при отсутствии теплоотвода.  $T_1$  — сплошная линия,  $T_2$  — штрихпунктир.



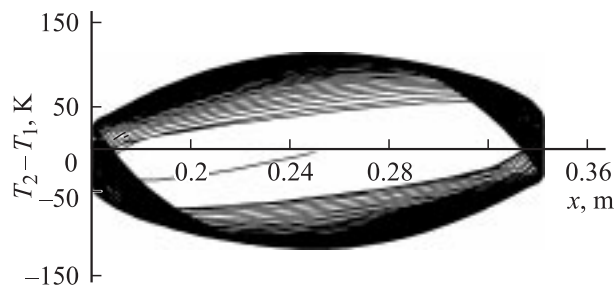


Рис. 6. Разность температур по координате поршня  $x$ .

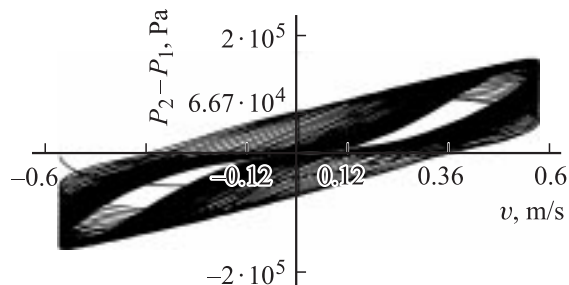


Рис. 7. Разность давлений по скорости поршня.

прогрессией сменяется ростом, соответствующим арифметической прогрессии.

При ближайшем рассмотрении выяснилось, что изменение характера решения связано с существованием зависимости скорости звука от температуры. При отыскании (14) мы этим пренебрегали, что справедливо лишь в некотором диапазоне изменения температур. На самом деле скорость звука медленно растет с увеличением температуры (пропорционально корню из температуры). Именно эта зависимость и образует обратную связь, ответственную за возникновение самоорганизации в системе.

В более общем случае обратная связь устанавливается не по зависимости скорости звука от температуры, а по зависимости безразмерных комплексов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от термодинамических параметров системы. Данное обстоятельство обнаруживается при численном решении системы (1)–(7). Зависимость любой величины, входящей в эти комплексы, от термодинамических функций состояния (температуры, давления и т.д.) приводит к „подстраиванию“ системы к внешнему воздействию и выходу на линейный режим увеличения температуры. При этом, как показывает численный эксперимент, сам вид функциональной зависимости величин, входящих в комплексы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от функции состояния, не играет никакой роли (хотя бы в случае монотонной непрерывной зависимости). В любом случае система самоорганизуется и распределение ее параметров в пространстве и времени притягивается к некоторому устойчивому решению (аттрактору). Форма аттрактора определяется геометрическими и термодинамическими характеристиками системы (рис. 6, 7). В отсутствие обратной связи такого явления не возникает.

В реальных условиях работы установки этот эффект менее заметен, поскольку сказывается влияние теплопотерь. Их наличие приводит к появлению энергетического баланса и выходу на стационарный режим с постоянной средней температурой. Это справедливо как в случае линейного закона роста температуры, так и в случае нелинейного. Вот почему при рассмотрении особенностей данных режимов потери из рассмотрения были исключены.

Таким образом, при наличии обратной связи возникают устойчивые решения, причем не зависящие от формы связи. Здесь оказывается важным сам факт наличия этой зависимости. В данном случае мы сталкиваемся с явлением самоорганизации в нелинейной системе, приводящей к однозначному квазилинейному поведению.

Разные подходы к решению данной задачи взаимно дополняют друг друга, позволяют детализировать процесс и выявить массу особенностей поведения системы.

## Список литературы

- [1] Шмелев В.М., Волов В.Т., Волов Д.Б. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 17–21.
- [2] Dowling J.A., Shumsky J., Echerman J., Schelier R.E. // Appl. Phys. Lett. 1968. Vol. 12. N 5. P. 184.
- [3] Шмелев В.М., Волов В.Т., Волов Д.Б. и др. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 67–70.
- [4] Марголин А.Д., Василик Н.Я., Шмелев В.М. и др. // Тез. докл. Первого Всесоюзного симпозиума по радиационной плазмодинамике. М., 1989. С. 33.
- [5] Волов Д.Б., Шмелев В.М., Волов В.Т. // ТВТ. 2000. Т. 38. № 2. С. 188–193.
- [6] Волов Д.Б. // Межвузовский сб. науч. тр. с международным участием. 2002. Вып. 23. С. 477–480.
- [7] Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.