01;03

Термофорез неоднородных по теплопроводности сублимирующих аэрозольных частиц

© Ю.И. Яламов, А.С. Хасанов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: rectorat@mgou.ru

(Поступило в Редакцию 4 декабря 2003 г.)

Построена теория термофореза сублимирующей крупной твердой сферической аэрозольной частицы, коэффициент теплопроводности которой зависит от координат. Получена и проанализирована формула для скорости термофореза.

Постановка задачи

Рассмотрим крупную твердую сферическую аэрозольную частицу, взвешенную в однокомпонентном газе, в котором поддерживается постоянный на большом удалении от частицы градиент температуры. На поверхности частицы происходит фазовый переход в виде испарения (сублимации) вещества частицы с образованием вокруг частицы вязкой бинарной смеси. Взаимодействие бинарной смеси с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению смеси по поверхности частицы. Возникновение локальной неоднородности по концентрациям бинарной смеси, как известно, создает диффузионное скольжение газовой смеси вдоль поверхности частицы. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под воздействием которого она приходит в ускоренное движение. Но на частицу действует одновременно и сила вязкого сопротивления бинарной смеси. Когда величина суммарной силы, действующей на частицу, становится равной нулю, частица начинает двигаться равномерно и прямолинейно с некоторой постоянной скоростью, нахождение и последующий анализ которой являются основной целью данной работы.

Перейдем к системе координат, начало которой совпадает с центром частицы. Мы получим задачу об обтекании сферы потоком, имеющим в бесконечности постоянную по величине и направлению скорость $\mathbf{v}_\infty$. Положительное направление оси $0x$ выберем параллельно постоянному в бесконечности градиенту температуры $(\nabla T_e)_\infty$. Если скорость движения частицы относительно центра тяжести внешней среды обозначить через $\mathbf{U}$, то $\mathbf{v}_\infty = -\mathbf{U} = U\mathbf{i}$, где U — длина вектора $\mathbf{U}$. Переходя к сферической системе координат, угол θ будем отсчитывать от положительного направления оси $0x$. Рассматривая стационарное движение бинарной смеси относительно частицы при малых числах Рейнольдса в отсутствии внешних сил, мы приходим [1] к следующим уравнениям движения (1) и граничным условиям на бесконечности (2):

$$\eta\nabla^2\mathbf{v} = \nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$v_r = U\cos\theta, \quad v_\theta = -U\sin\theta, \quad p = p_\infty \text{ при } r \to \infty, \tag{2}$$

где η — коэффициент динамической вязкости бинарной смеси, $\mathbf{v}$ и p описывают распределение в ней скоростей и давления, p_∞ — некоторая постоянная, $v_\varphi = 0$.

Пусть n_1, n_2 — числа молекул первой компоненты (испаряющегося вещества частицы) и второй компоненты (однокомпонентного газа) бинарной смеси в единице объема; c_1, c_2 — соответственно их относительные концентрации; $n = n_1 + n_2$. Тогда

$$c_1 = \frac{n_1}{n}, \quad c_2 = \frac{n_2}{n}, \quad c_1 + c_2 = 1. \tag{3}$$

Из формул (3) следует, что достаточно найти c_1. Так как мы имеем дело с малыми скоростями (число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$), то функция c_1 удовлетворяет [1] уравнению (4) и условию на бесконечности (5)

$$\nabla^2 c_1 = 0, \qquad c_1 = c_\infty, \tag{4), (5}$$

где c_∞ — некоторая постоянная.

В дальнейшем при записи граничных условий мы будем использовать величины n_{01}, n_{02}, n_0, ρ_0, T_{0e}, T_{0i}. Дело в том, что величины n_1, n_2, n, ρ, T_e, T_i, где ρ, T_e — плотность и температура бинарной смеси, T_i — температура внутри частицы, являются, строго говоря, переменными, зависящими от r и θ. Однако внешнее возмущение, вызванное градиентом температуры $(\nabla T_e)_\infty$, является малой добавкой к невозмущенным параметрам [1]: $n_1 = n_{01} + n'_1$, $n_2 = n_{02} + n'_2$, $n = n_0 + n'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T_e = T_{0e} + T'_e$, $T_i = T_{0i} + T'_i$, где первые члены в правых частях этих соотношений равны невозмущенным значениям соответствующих величин, а вторые члены — отклонениям от средних значений, вызванным наличием градиента температуры $(\nabla T_e)_\infty$. В нашей задаче эти отклонения малы по сравнению со средними значениями [1] и в граничных условиях не учитываются (т.е. граничные условия записаны в линеаризованной форме).

Поверхность капли будем считать непроницаемой для второй компоненты бинарной смеси [1]

$$n_{02}v_r - D\beta_1 \frac{\partial c_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \tag{6}$$

где

$$\beta_1 = n_0^2 \frac{m_1}{\rho_0}, \tag{7}$$

a — радиус частицы, m_1 — масса молекулы испаряющегося вещества частицы, D — коэффициент взаимной диффузии компонент бинарной смеси.

На основании формулы (3) перепишем условие (6) в следующем виде:

$$v_r = -\frac{D\beta_1}{n_{02}} \frac{\partial c_1}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a. \tag{8}$$

Тепловое и диффузное скольжения бинарной смеси по поверхности частицы приводят к следующему условию для скорости v_θ [1]:

$$v_\theta = \frac{K_{Tsl}^{(e)}}{aT_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \frac{K_{sl}D}{a} \frac{\partial c_1}{\partial \theta} \quad \text{при} \quad r = a, \tag{9}$$

где $K_{Tsl}^{(e)}$, K_{sl} — коэффициенты теплового и диффузионного скольжения бинарной смеси.

Перейдем к рассмотрению процесса теплопереноса в системе частица–среда. Будем считать, что этот процесс протекает квазистационарно. Если распределение температуры T в неравномерно нагретой среде поддерживается только за счет внешних источников тепла, постоянных во времени, то уравнение теплопроводности принимает вид [2]

$$\rho c_p(\mathbf{v}, \nabla T) = \operatorname{div}(\kappa \nabla T), \tag{10}$$

где ρ — плотность, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\mathbf{v}$ — скорость, κ — коэффициент теплопроводности.

В нашей задаче уравнение (10) принимает вид [1,2]

$$\nabla^2 T_e = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{div}(\kappa_i \nabla T_i) = 0, \tag{12}$$

где T_i, κ_i — соответственно температура и коэффициент теплопроводности внутри частицы.

Температура T_e удовлетворяет следующему условию на бесконечности [1]:

$$T_e = T_{0e} + |(\nabla T_e)_\infty| r \cos\theta \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{13}$$

Коэффициент теплопроводности внешней среды κ_e будем считать величиной постоянной [1], а коэффициент теплопроводности κ_i в нашей задаче считается переменной величиной и зависящей в каждой точке частицы от радиус-вектора r этой точки. Будем считать, что радиус частицы значительно больше длин свободного пробега молекул компонент бинарной смеси (число Кнудсена мало́) и на поверхности частицы выполнено условие (поправки, пропорциональные числу Кнудсена, мы не будем учитывать) [1]

$$T_e = T_i \quad \text{при} \quad r = a. \tag{14}$$

Так как на поверхности частицы происходит фазовый переход, то имеем следующие граничные условия [1]:

$$n_{01}v_r - D\beta_2 \frac{\partial c_1}{\partial r} = n_0 \alpha \nu (s_1 - c_1) \quad \text{при} \quad r = a, \tag{15}$$

$$-\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = -Lm_1 n_0 \alpha \nu (s_1 - c_1) \quad \text{при} \quad r = a, \tag{16}$$

где

$$\beta_2 = n_0^2 \frac{m_2}{\rho_0}; \tag{17}$$

m_2 — масса молекул второй компоненты бинарной смеси; α — коэффициент испарения ($\alpha \in [0, 1]$), $\nu = \sqrt{kT_{0e}/(2\pi m_1)}$; s_1, L — соответственно одна четвертая абсолютной тепловой скорости испаряющихся молекул (k — постоянная Больцмана), насыщающая относительная концентрация и удельное тепло фазового перехода первой компоненты бинарной смеси.

На основании соотношений (8), (15), $n_{01}m_1 + n_{02}m_2 = \rho_0$, перепишем (16) в виде

$$-\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{Lm_1 D n_0^2}{n_{02}} \frac{\partial c_1}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a. \tag{18}$$

На основании линеаризованной формулы [1] $s_1(T_i) = s + \delta(T_i - T_{0i})$ при $r = a$ и уравнения (8) перепишем условие (15) в виде

$$T_i - T_{0i} = \frac{c_1 - s}{\delta} - \frac{Dn_0}{n_{02}\alpha\nu\delta} \frac{\partial c_1}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a, \tag{19}$$

где

$$s = s_1 \quad \text{при} \quad T_i = T_{0i}, \tag{20}$$

$$\delta = \frac{\partial s_1}{\partial T_i} \quad \text{при} \quad T_i = T_{0i}. \tag{21}$$

На основании приведенных уравнений и граничных условий нужно найти T_i, T_e, c_1 (тепловая и диффузионная части), $\mathbf{v}$, p (гидродинамическая часть), скорость $\mathbf{U}$.

Решение тепловой и диффузионной частей задачи

Перейдем от переменных r и θ к переменным R и θ, где

$$R = r/a. \tag{22}$$

Так как $r = a(r/a)$, то мы можем рассматривать κ_i как функцию, зависящую от R:

$$\kappa_i = f\left(\frac{r}{a}\right) = f(R). \tag{23}$$

Пусть

$$T_1 = |(\nabla T_e)_\infty| a, \tag{24}$$

$$g_e(R,\theta) = (T_e - T_{0e} - T_1 R\cos\theta)/T_1, \tag{25}$$

$$g_i(R,\theta) = (T_i - T_{0i})/T_1, \tag{26}$$

$$c_1(R,\theta) = (c_1 - c_\infty)/(\delta T_1). \tag{27}$$

Тогда уравнения (12), (11), (4), (14), (18), (19), (13), (5) соответствуют условиям

$$\nabla^2 g_i = -\frac{f'}{f}\, g_i', \tag{28}$$

$$\nabla^2 g_e = 0, \tag{29}$$

$$\nabla^2 c_1 = 0, \tag{30}$$

$$g_i - g_e = \cos\theta + (T_{0e} - T_{0i})/T_1 \quad \text{при} \quad R = 1, \tag{31}$$

$$\frac{\kappa_{i1}}{\kappa_e}\, g_i' - g_e' - k_2 c_1' = \cos\theta \quad \text{при} \quad R = 1, \tag{32}$$

$$c_1 - k_1 c_1' - g_i = (s - c_\infty)/(\delta T_1) \quad \text{при} \quad R = 1, \tag{33}$$

$$g_e = 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty, \tag{34}$$

$$c_1 = 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty, \tag{35}$$

где κ_{i1} — значение κ_i на поверхности частицы; f', g_i', g_e', c_1' — производные по R (в липласианах $\nabla^2 g_i$, $\nabla^2 g_e$, $\nabla^2 c_1$ переменная r также заменена на переменную R); безразмерные постоянные k_1, k_2 определяются по формулам

$$k_1 = \frac{D n_0}{\alpha \nu n_{02} a}, \tag{36}$$

$$k_2 = \frac{L m_1 D n_0^2 \delta}{n_{02} \kappa_e}. \tag{37}$$

Начнем с уравнения (28). Функцию $g_i(R,\theta)$ будем искать в виде

$$g_i(R,\theta) = M(R)\cos\theta. \tag{38}$$

Тогда для функции $M(R)$ мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$R^2 M'' + \left(2 + R\,\frac{f'}{f}\right) R M' - 2M = 0. \tag{39}$$

Функцию $f(R)$ мы считаем заданной и представимой в виде степенного ряда

$$f(R) = \sum_{t=0}^{\infty} f_t R^t, \tag{40}$$

где f_t — коэффициент разложения.

Из разложения функции $f(R)$ можно получить коэффициенты разложения функции $2 + Rf'/f$, например методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$2 + R\,\frac{f'}{f} = \sum_{t=0}^{\infty} b_t R^t, \tag{41}$$

где b_t — неопределенные коэффициенты.

Найдем эти неопределенные коэффициенты. Ясно, что

$$b_0 = 2 \tag{42}$$

($\kappa_i = f(R) > 0$ при всех $R \le 1$).

Так как из формулы (40) следует, что

$$f'(R) = \sum_{t=1}^{\infty} t f_t R^{t-1}, \tag{43}$$

то, с учетом формул (42), (43), соотношение (41) может быть записано в виде

$$\sum_{t=1}^{\infty} t f_t R^t = \left(\sum_{t=0}^{\infty} f_t R^t\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^{\infty} b_t R^t\right). \tag{44}$$

Перемножив ряды в правой части формулы (44) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях R, получим, что

$$b_1 = \frac{f_1}{f_0}, \tag{45}$$

$$b_t = \frac{t f_t - \sum\limits_{j=1}^{t-1} f_j b_{t-j}}{f_0}, \tag{46}$$

где $t \ge 2$.

Считая теперь коэффициенты b_t найденными, перепишем уравнение (39) в виде

$$R^2 M'' + \left(\sum_{t=0}^{\infty} b_t R^t\right) R M' - 2M = 0. \tag{47}$$

Частное решение M_1 этого уравнения ищем в виде [3]

$$M_1 = R^\rho \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t R^t, \tag{48}$$

где ρ — неопределенный показатель степени.

Так как мы ищем частное решение, то можно выбрать $\alpha_0 = 1$. Из формулы (48) следует, что

$$R M_1' = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t (\rho + t) R^{\rho+t}, \tag{49}$$

$$R^2 M_1'' = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t (\rho + t)(\rho + t - 1) R^{\rho+t}. \tag{50}$$

Подставляя формулы (48)–(50) в уравнение (47), получим, что

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left[(\rho + t)(\rho + t - 1)\alpha_t + \sum_{j=0}^{t} (\rho + t - j)\alpha_{t-j} b_j - 2\alpha_t \right] R^{\rho+t} = 0. \tag{51}$$

Из соотношения (51) следует, что при любом $t \geq 0$ справедливо равенство

$$(\rho+t)(\rho+t-1)\alpha_t+\sum_{j=0}^{t}(\rho+t-j)\alpha_{t-j}b_j-2\alpha_t=0. \quad (52)$$

Так как $\alpha_0=1$, $b_0=2$, то из равенства (52) при $t=0$ получаем уравнение относительно ρ

$$\rho(\rho-1)+2\rho-2=0. \quad (53)$$

Из двух корней этого уравнения подходит только корень $\rho=1$. Пусть $t \geq 1$. Перепишем соотношение (52) в виде

$$(\rho+t)(\rho+t-1)\alpha_t+(\rho+t)\alpha_t b_0-2\alpha_t$$
$$+\sum_{j=1}^{t}(\rho+t-j)\alpha_{t-j}b_j=0. \quad (54)$$

Так как $\rho=1$, то из (54) следует, что коэффициенты α_t при $\forall t \geq 1$ могут быть найдены по рекуррентной формуле

$$\alpha_t=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{t}(t+1-j)\alpha_{t-j}b_j}{t(t+3)}, \quad (55)$$

где $\alpha_0=1$.

Таким образом, одно частное решение $M_1(R)$ уравнения (39) построено. Как известно [3], по одному частному решению $y_1(x)$ дифференциального уравнения вида

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad (56)$$

его второе решение, линейно независимое от первого, может быть построено по формуле

$$y_2(x)=y_1(x)\int\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau\right)\frac{dx}{y_1^2(x)}. \quad (57)$$

Уравнение (39) легко может быть сведено к виду (56). По формуле (57) получим второе частное решение M_2 уравнения (39)

$$M_2(R)=M_1(R)\int_{1}^{R}\frac{dt}{t^2 f(t)M_1^2(t)}. \quad (58)$$

Общее решение уравнения (39) имеет вид

$$M=C_1M_1(R)+C_2M_1(R)\int_{1}^{R}\frac{dt}{t^2 f(t)M_1^2(t)}, \quad (59)$$

где C_1, C_2 — неопределенные коэффициенты.

Легко видеть, что в нашей задаче мы должны выбрать $C_2=0$. Итак, $M(R)=C_1M_1(R)$ и на основании (38)

$$g_i(R,\theta)=C_1M_1(R)\cos\theta. \quad (60)$$

В общем случае функция $M_1(R)$ строится по приведенным выше рекуррентным формулам, но в двух крайних случаях эта функция может быть найдена и непосредственно из дифференциального уравнения (39). Если коэффициент теплопроводности меняется слабо, т.е. $\kappa_i=\text{const}$, то $f(R)=\text{const}$ и искомое частное решение дифференциального уравнения (39) легко находится

$$M_1=R, \quad (61)$$

а если коэффициент теплопроводности меняется сильно, например,

$$\kappa_i=C\exp(kR), \quad (62)$$

где C, k — некоторые постоянные, то искомым частным решением уравнения (39) является функция

$$M_1(R)=-\frac{6}{k^3R^2}\left(\exp(-kR)-1+kR-\frac{k^2R^2}{2}\right). \quad (63)$$

Перейдем к уравнениям (29) и (30). Функции g_e, c_1 ищем в виде

$$g_e=\frac{\mu_1}{R^2}\cos\theta+\frac{\varphi}{R^2}, \quad (64)$$

$$c_1=\frac{\mu_2}{R^2}\cos\theta, \quad (65)$$

где μ_1, φ, μ_2 — неопределенные коэффициенты.

Из условий (31)–(33) мы получим шесть уравнений относительно четырех коэффициентов C_1, μ_1, φ, μ_2 и двух величин T_{0e}, c_∞. Решая эту систему, находим T_e, T_i, c_1. Приведем только значение μ_2

$$\mu_2=3\left[2(1+2k_1)+2k_2+(1+2k_1)\frac{\kappa_{i1}}{\kappa_e}\cdot\frac{M_1'(1)}{M_1(1)}\right]^{-1}. \quad (66)$$

Решение гидродинамической части задачи

Решение уравнения Стокса ищем в виде [1]

$$v_r=\left(\frac{A_e}{R^3}+\frac{B_e}{R}+1\right)U\cos\theta, \quad (67)$$

$$v_\theta=\left(\frac{A_e}{2R^3}-\frac{B_e}{2R}-1\right)U\sin\theta, \quad (68)$$

$$p=p_\infty+\eta\frac{U}{a}\frac{B_e}{R^2}\cos\theta. \quad (69)$$

Из граничных условий (8), (9) находим A_e и B_e. Приведем только значение B_e

$$B_e=-\frac{3}{2}+\frac{D\delta T_1}{aU}\left[\frac{\beta_1}{n_{02}}+\frac{K_{Tsl}^{(e)}(1+2k_1)}{\delta T_{0e}D}+K_{sl}\right]\mu_2. \quad (70)$$

Подставляя значения A_e, B_e в формулы (67)–(69), можно найти выражения для v_r, v_θ, p. Сила воздействия потока на частицу находится по формуле [1]

$$\mathbf{F} = \left(\iint_S (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, ds \right)\mathbf{i}, \qquad (71)$$

где $p_{rr}, p_{r\theta}$ — составляющие тензора напряжений на поверхности частицы S.

Вычисляя интеграл (71), находим выражение для силы $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = -4\pi\eta U a B_e \mathbf{i}. \qquad (72)$$

Для нахождения скорости равномерного прямолинейного движения ставим условие

$$\mathbf{F} = 0. \qquad (73)$$

Отсюда $B_e = 0$. Из формул (70) и (66) получим

$$\mathbf{U} = -\left[\frac{2K_{Tsl}^{(e)}}{T_{0e}} + \frac{2D\delta}{1+2k_1}\left(\frac{\beta_1}{n_{02}} + K_{sl}\right)\right] \times \left[2 + \frac{2k_2}{1+2k_1} + \frac{\kappa_{i1}}{\kappa_e}\frac{M_1'(1)}{M_1(1)}\right]^{-1} (\nabla T_e)_\infty. \qquad (74)$$

Анализ полученных результатов

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (74). Если на поверхности частицы отсутствует фазовый переход, то $\alpha = 0$, $k_1 = \infty$ (см. формулу (36)), $K_{Tsl}^{(e)} = K_{Tsl}\eta/\rho$ [1], где K_{Tsl}, η, ρ — соответственно коэффициент теплового скольжения, коэффициент динамической вязкости и плотность однокомпонентного газа. Формула (74) приобретает вид [4]

$$\mathbf{U} = -\frac{K_{Tsl}\eta}{\rho T_{0e}} 2\kappa_e \left[2\kappa_e + \kappa_{i1}\frac{M_1'(1)}{M_1(1)}\right]^{-1} (\nabla T_e)_\infty. \qquad (75)$$

Если вдобавок частица является однородной по теплопроводности, то $\kappa_i \equiv \text{const}$, $M_1(R) = R$ (см. формулу (61)), $M_1'(1)/M_1(1) = 1$ и формула (75) в свою очередь переходит в известную формулу для скорости термофореза [1].

Если же на поверхности частицы происходит фазовый переход и частица является однородной по теплопроводности, то $\kappa_i \equiv \text{const}$, $M_1(R) = R$, $M_1'(1)/M_1(1) = 1$ и мы получим из формулы (74) следующую формулу [5]

$$\mathbf{U}_0 = -\left[\frac{2K_{Tsl}^{(e)}}{T_{0e}} + \frac{2D\delta}{1+2k_1}\left(\frac{\beta_1}{n_{02}} + K_{sl}\right)\right] \times \left[2 + \frac{2k_2}{1+2k_1} + \frac{\kappa_{i1}}{\kappa_e}\right]^{-1} (\nabla T_e)_\infty. \qquad (76)$$

Используя формулу (76), формулу (74) можно переписать в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \cdot \left\{1 + \left(\frac{M_1'(1)}{M_1(1)} - 1\right) \times \left[1 + \frac{2\kappa_e}{\kappa_{i1}}\left(1 + \frac{k_2}{1+2k_1}\right)\right]^{-1}\right\}^{-1}. \qquad (77)$$

Второй множитель в правой части формулы (77) является поправочным множителем и зависит как от коэффициента испарения, так и от неоднородности по теплопроводности. Естественно рассмотреть случай, когда первый множитель формулы (77) зависит от коэффициента испарения, а второй множитель практически не зависит от коэффициента испарения и характеризует только влияние переменной теплопроводности. Пусть

$$\gamma_1 = 1 + \frac{2\kappa_e}{\kappa_{i1}}\left(1 + \frac{k_2}{1+2k_1}\right), \qquad (78)$$

$$\gamma_2 = \frac{M_1'(1)}{M_1(1)}. \qquad (79)$$

Из формулы (78) следует, что

$$1 \le \gamma_1 \le 1 + \frac{2\kappa_e}{\kappa_{i1}}(1 + k_2). \qquad (80)$$

Из формулы (80) следует, что если величина $2\kappa_e \times (1 + k_2)/\kappa_{i1}$ мала, то поправочный множитель в формуле (77) слабо зависит от коэффициента испарения α и хорошо описывает влияние переменной теплопроводности на скорость термофореза. Рассмотрим один из таких случаев. Пусть лед на поверхности частицы плавится и испаряется в воздух. Так как [6] $\kappa_e = 2.38 \cdot 10^{-4}\,\text{W/(m} \cdot \text{deg)}$, $\kappa_{i1} = 5.69 \times 10^{-1}\,\text{W/(m} \cdot \text{deg)}$, то $2\kappa_e/\kappa_{i1} = 8.36 \cdot 10^{-4}$. Вычислим коэффициент k_2, определяемый по формуле (37). Удельное тепло фазового перехода первой компоненты бинарной смеси найдем как сумму $L = q + r$, где q — удельная теплота плавления льда, r — удельная теплота парообразования: $q = 3.4 \cdot 10^5\,\text{J/kg}$, $r = 2.50 \times 10^6\,\text{J/kg}$, $L = 2.84 \cdot 10^6\,\text{J/kg}$. Величина n_{02} приближенно равна n_0, а $n_0 = 2.65 \cdot 10^{25}\,1/\text{m}^3$. Приведем значения остальных величин, необходимых для вычисления k_2: $m_1 = 2.99 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$, $D = 2.5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$, $\delta = 1.67 \times 10^{-3}\,1/\text{deg}$. Отсюда $k_2 = 3.95$, а $2\kappa_e(1+k_2)/\kappa_{i1} = 4.14 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, поправочный множитель в правой части формулы (77) слабо зависит от α. Легко построить эту конкретную зависимость от α для $a = 10^{-5}\,\text{m}$ ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\text{J/deg}$, $T_{0e} = 273\,\text{K}$, $m_1 = 2.99 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$, $v = 1.42 \cdot 10^2\,\text{m/s}$)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0\left[1 + (\gamma_2 - 1)\frac{100\alpha + 352}{100.4\alpha + 352.3}\right]^{-1}. \qquad (81)$$

С целью выявления степени влияния переменной теплопроводности на движение сублимирующей частицы естественно рассматривать частицы с сильно выраженной неоднородностью, т. е. такие частицы, теплопроводность которых в центре существенно отличается от теплопроводности на границе. Поэтому в качестве модели зависимости возьмем экспоненциальную зависимость (62)

$$\kappa_i(R) = \kappa_i(0)\exp(kR). \tag{82}$$

При проведении анализа мы будем считать, что изменение $\kappa_i(R)$ (перепад на расстоянии в один радиус частицы) подчинено следующему условию:

$$0.1 \le \frac{\kappa_i(1)}{\kappa_i(0)} \le 10. \tag{83}$$

Из неравенства (83) следует, что

$$-2.3 \le k \le 2.3. \tag{84}$$

Как было сказано выше, если $\kappa_i(R)$ определяется формулой (82), то $M_1(R)$ определяется формулой (63). Из формулы (63) следует, что

$$\frac{M_1'(1)}{M_1(1)} = -2 - k\,\frac{\exp(-k) - 1 + k}{\exp(-k) - 1 + k - 0.5k^2}. \tag{85}$$

Из формулы (85) и из условия (84) следует, что величина γ_2 принимает значения из отрезка $[0.59, 1.81]$. Так как поправочный множитель в формуле (81) почти не зависит от α, то при изменении γ_2 от 0.59 до 1.81 его значение меняется приблизительно от 0.6 до 1.6. Данный пример показывает, что неоднородность по теплопроводности существенно может влиять на скорость сублимирующей частицы независимо от значения коэффициента испарения α.

Список литературы

[1] *Галоян В.С., Яламов Ю.И.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
[3] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. II. М.: Наука, 1967. 655 с.
[4] *Яламов Ю.И., Хасанов А.С.* // ТВТ. 1996. Т. 34. № 6. С. 929.
[5] *Яламов Г.Ю.* // Вестник МГОУ. Сер. Физика, химия, география. 2003. № 1. С. 26.
[6] *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.