

01

Нелинейно-параметрические эффекты и динамический хаос в неавтономной колебательной системе с нелинейной емкостью

© С.Н. Владимиров, В.И. Перфильев

Томский государственный университет,
634050 Томск, Россия
e-mail: vsn@re.tsu.ru, vsn@ic.tsu.ru

(Поступило в Редакцию 15 сентября 2003 г.)

Построена математическая модель неавтономной динамической системы, содержащей нелинейную емкость и обладающей четырехмерным фазовым пространством. Проведено численное исследование бифуркационных процессов и явлений, происходящих при вариациях частоты и амплитуды внешней силы. Показано существование сложных динамических процессов, являющихся комбинацией нелинейных силового и параметрического резонансов. Установлено существование в фазовом пространстве как странного хаотического, так и странного нехаотического аттракторов, причем последний обладал свойством грубости при одночастотном характере внешнего воздействия. Результаты численных расчетов подтверждены натурными экспериментами.

Введение

В классической теории нелинейных колебаний рассмотрение нелинейных силового и параметрического резонансов обычно искусственно разделено [1–3]. С методической стороны это представляется совершенно правильным и естественным, поскольку позволяет простыми средствами осуществить математическое описание моделей и достигнуть их замкнутого аналитического исследования. При этом выявляются основные характерные черты нелинейных систем, их принципиальные отличия от систем линейных. Этого вполне достаточно для формирования мировоззрения начинающих изучать основы теории колебаний специалистов.

Однако при указанном подходе возникает и ряд проблем. Одна из них очень точно отмечена в [2]: „...не вполне корректно рассмотрение случая прямого силового воздействия без одновременного воздействия на параметры системы. ...если учесть, что вынужденный периодический процесс, обязанный своим происхождением прямому воздействию, вызывает в свою очередь периодические изменения параметров нелинейной системы, то становится ясным, что результирующие резонансные явления могут иметь весьма сложный характер. ...это обстоятельство не позволяет для нелинейных систем полное разделение двух упомянутых типов резонансных явлений“. Добавим, что если движения в колебательной системе далеки от периодических, то трудности многократно возрастают.

Не менее важная проблема состоит в том, что классическая теория нелинейных колебаний исследует движения, как правило в динамических системах с небольшой размерностью фазового пространства. Движения в этих системах обычно представляют собой движения, близкие к периодическим. А для современной теории колебаний характерен все возрастающий интерес к движениям стохастическим (гамильтоновы системы) и хаотическим (диссипативные системы). К настоящему

времени стало совершенно очевидным, что такого рода движения динамических систем так же естественны, как, например, состояние покоя или предельный цикл. Следует отметить, что изучение детерминированного хаоса привлекает исследователей не только с точки зрения получения новых значений, но и получает все большую прикладную направленность [4–6].

Еще одной интересной проблемой является идентификация аттракторов динамических систем с нетрадиционным поведением. Впервые понятие странного аттрактора было введено в работе Рюэля и Такенса [7] и с тех пор неоднократно уточнялось [8]. Особый интерес вызывает странный нехаотический аттрактор, некоторые исследователи полагают, что на границе между регулярным и хаотическим движением могут иметь место процессы, подобные процессам эволюции и обработки информации [9]. Как правило, наличие странного нехаотического аттрактора отождествляется с бигармоническим воздействием на нелинейный осциллятор колебаний с несоизмеримыми частотами.

Целью настоящей работы являются построение и численное исследование математической модели динамической системы с небольшим числом степеней свободы и непрерывным временем, в которой при вариациях параметров можно было бы наблюдать все вышеперечисленные явления и процессы. Модель должна быть физически реализуемой и, более того, представлять собой разумное сочетание традиционно используемых в радиофизике и электронике компонентов. Результаты численных экспериментов следует сравнить с результатами натуральных экспериментов.

1. Построение математической модели общего вида

Рассмотрим неавтономную нелинейную цепь, электрическая схема которой представлена на рис. 1 и содержит внешний источник гармонического воздей-

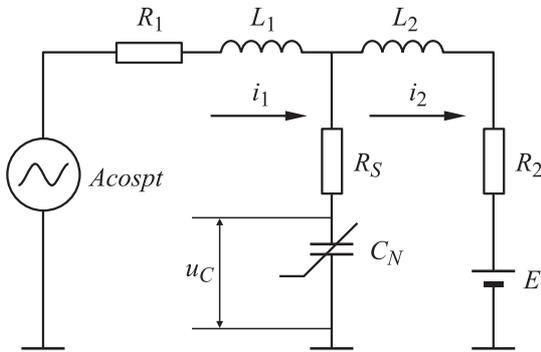


Рис. 1. Принципиальная схема неавтономной электрической цепи с нелинейной емкостью.

ствия вида $A \cos pt$, линейные диссипативные элементы R_1, R_2, R_S , нелинейную емкость C_N , два линейных индуктивных элемента L_1, L_2 и источник напряжения смещения E . Назначение элементов следующее. Диссипативные элементы R_1, R_2, R_S отражают потери энергии в реактивных элементах L_1, L_2 и C_N соответственно. Индуктивность L_1 служит совместно с нелинейной емкостью для настройки цепи в резонанс с частотой внешнего воздействия p , индуктивность L_2 образует цепь смещения нелинейной емкости.

Используя законы Кирхгофа, запишем систему уравнений для токов и напряжений в рассматриваемой цепи

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} = A \cos pt - R_1 i_1 - R_S (i_1 - i_2) - u_C, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} = u_C + R_S (i_1 - i_2) - R_2 i_2, \\ \frac{d}{dt} (C_N u_C) = i_1 - i_2. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система уравнений имеет третий порядок, наличие внешней силы увеличивает порядок на единицу, следовательно, результирующая размерность фазового пространства рассматриваемого потока равняется четырем, что оказывается достаточным для обеспечения богатой и разнообразной динамики модели.

Последнее уравнение системы (1) может быть переписано в виде

$$C_D \frac{du_C}{dt} = \left(C_N + u_C \frac{dC_N}{du_C} \right) \frac{du_C}{dt} = i_1 - i_2, \quad (2)$$

где C_D — динамическая емкость нелинейного элемента.

Конкретизируем вольт-фарадную характеристику нелинейной емкости. Выберем ее максимально приближенной к соответствующей характеристике реальных варикапов с резким p - n -переходом [10]

$$C_N = C_0 \sqrt{\frac{g}{g - u_C}}, \quad g = E + \varphi_0. \quad (3)$$

В последнем соотношении приняты следующие обозначения: E — напряжение смещения, φ_0 — контактная разница потенциалов, C_0 — емкость перехода в рабочей точке при смещении E .

Уравнение (2) с учетом выбранного вида нелинейности (3) после выполнения необходимых преобразований запишем в форме

$$C_0 m(u_C) \frac{du_C}{dt} = i_1 - i_2, \quad (4)$$

в которой множитель

$$m(u_C) = \sqrt{\frac{g}{g - u_C} \frac{g - 0.5u_C}{g - u_C}} \quad (5)$$

является коэффициентом модуляции нелинейной емкости в рабочей точке.

Построенная модель (1), (4), (5) пригодна для проведения расчетов при произвольных значениях параметров диссипативных и реактивных элементов при выполнении единственного ограничения $u_C < g$. Наблюдаемые при вариациях этих параметров бифуркационные явления и процессы настолько множественны и разнообразны, что не представляется возможным рассмотреть их в рамках одной журнальной публикации. Поэтому в настоящей работе ограничимся рассмотрением только резонансного случая.

2. Математическая модель в резонансном случае

Пусть со стороны генератора накачки исследуемая динамическая система имеет в малосигнальном случае ($m(u_C) \approx 1$) резонансную частоту ω_0 . Это позволяет ввести безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и, поскольку $d/dt = \omega_0 d/d\tau$, преобразовать систему уравнений (1) к виду

$$\begin{cases} X_1 \frac{dX_1}{d\tau} = A \cos \Omega \tau - R_1 X_1 - R_S (X_1 - X_2) - u_C, \\ X_2 \frac{dX_2}{d\tau} = u_C + R_S (X_1 - X_2) - R_2 X_2, \\ Y_C m(u_C) \frac{du_C}{d\tau} = i_1 - i_2, \end{cases} \quad (6)$$

в котором использованы следующие обозначения: $X_1 = \omega_0 L_1$, $X_2 = \omega_0 L_2$ — реактивные сопротивления индуктивных элементов, $Y_C = \omega_0 C_0$ — статическая проводимость варикапа на частоте малосигнального резонанса, $\Omega = p/\omega_0$ — нормированная частота внешнего воздействия. Поскольку Y_C , так же как и R_S , является паспортной величиной для конкретного типа варикапа, имеет смысл найти удобные выражения для остальных реактивностей, выразив их именно через эту величину.

Запишем выражение для импеданса цепи на частоте ω_0 со стороны генератора накачки

$$Z(j\omega_0) = R_1 + jX_1 + \frac{R_2 R_S + X_2 X_C + j(R_S X_2 - R_2 X_C)}{R_2 + R_S + j(X_2 - X_C)}, \quad (7)$$

$$X_C = \frac{1}{Y_C}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Обычно потери в реактивных элементах незначительны и ими можно пренебречь в первом приближении. Такое приближение вполне оправдано еще и по той причине, что с ростом амплитуды внешнего воздействия непременно проявятся ангармоничные и неизохронные свойства нелинейной системы, в силу чего резонансная частота неизбежно изменится. В нашем случае нелинейность C_N является „мягкой“ и следует ожидать наклона резонансной кривой влево и смещения резонансной частоты вниз [2]. Это позволяет упростить выражение (7) до следующего вида:

$$Z(j\omega_0) = j \frac{X_1 X_2 - X_C (X_1 + X_2)}{X_2 - X_C}. \quad (8)$$

Совершенно очевидно, что для эффективного использования напряжения накачки с частотой $p \approx \omega_0$ необходимо отсутствие полюса затухания на этой частоте. Поэтому потребуем, чтобы $X_2 \neq X_C$, и положим $X_2 = \alpha X_C$, $\alpha \neq 1$. Кроме того, из условия равенства нулю мнимой части $Z(j\omega_0)$ из (8) следует, что $X_1 = \alpha X_C / (\alpha - 1)$, $\alpha > 1$. Отсюда сразу получаем искомые связи между параметрами системы уравнений (6)

$$X_1 = \alpha \frac{1}{Y_C}, \quad X_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{Y_C}. \quad (9)$$

Параметр α имеет простой физический смысл. Анализ поведения импеданса $Z(j\omega)$ в диапазоне частот (мы опускаем его как не относящийся к существу рассматриваемой задачи), проведенный в приближении малых потерь, позволил установить, что кроме резонансной частоты $\omega_0 = \sqrt{(L_1 + L_2)/C_0 L_1 L_2}$ имеется еще и полюс затухания на частоте $\omega_\infty = 1/\sqrt{C_0 L_2}$. А параметр α определяет связь между этими частотами следующим образом: $\alpha = (\omega_0/\omega_\infty)^2$.

Теперь система (6), дополненная соотношениями (9), позволяет окончательно сформулировать математическую модель

$$\begin{cases} \frac{di_1}{d\tau} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} Y_C [A \cos \Omega \tau - R_1 i_1 - R_S (i_1 - i_2) - u_C], \\ \frac{di_2}{d\tau} = \frac{Y_C}{\alpha} [u_C + R_S (i_1 - i_2) - R_2 i_2], \\ \frac{du_C}{d\tau} = \frac{1}{m(u_C) Y_C} (i_1 - i_2). \end{cases} \quad (10)$$

Результаты численного анализа этой модели приведены в следующем разделе, а в заключение настоящего докажем существование для потока (10) аттрактора — предельного притягивающего множества в фазовом пространстве. Аттрактор существует тогда и только тогда, когда дивергенция потока D отрицательна. Действительно, в этом случае любой начальный объем фазового пространства V_0 с течением времени τ ведет себя следующим образом:

$$V(\tau) = V_0 \exp(D\tau). \quad (11)$$

Это означает, что, если $D < 0$, все фазовые траектории, стартовавшие из V_0 , с течением времени „оседают“ на замкнутом притягивающем множестве нулевого объема — аттракторе [1,11].

Для потока (10) выражение для вычисления дивергенции фазового потока (производной Ли) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial i_1} \left(\frac{di_1}{d\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial i_2} \left(\frac{di_2}{d\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial u_C} \left(\frac{du_C}{d\tau} \right) \\ &= D_1 + D_2 (i_1 - i_2), \\ D_1 &= -\frac{Y_C}{\alpha} [(\alpha - 1)(R_1 + R_2) + R_2 + R_S], \\ D_2 &= \frac{1}{Y_C} \sqrt{1 - \frac{u_C}{g}} \frac{u_C - 4g}{(2g - u_C)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

В этих соотношениях слагаемое D_1 отрицательно при любых значениях входящих в него величин, а множитель D_2 всегда положителен. Слагаемое $D_2(i_1 - i_2)$ в общем случае знакопеременно, является функцией времени и, очевидно, ограничено, хотя бы в силу конечной мощности источника накачки. Поэтому $V(\tau) = V_0 \exp(D_1 \tau) \exp[D_2(i_1 - i_2)\tau] \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, что и доказывает существование у потока (10) аттрактора. Однако о свойствах и структуре этого аттрактора можно будет судить только по результатам численного анализа и натурных экспериментов.

3. Результаты численного анализа

Система дифференциальных уравнений (10) интегрировалась методом Дормана–Принса 8-го порядка с автоматическим управлением шагом интегрирования [12]. Локальная погрешность интегрирования в численных экспериментах не превышала 10^{-8} , а в особо ответственных случаях, например при исследовании окрестности точки бифуркационного перехода, уменьшалась до 10^{-12} . Полученные временные ряды сохранялись и затем обрабатывались. Максимальный характеристический показатель Ляпунова рассчитывался по алгоритму, предложенному в [13]. Емкость аттрактора, информационная и корреляционная размерности аттракторов оценивались на основе подходов, изложенных в работах [14,15].

Приведенные в данном разделе результаты получены при следующих значениях параметров модели (10): $E = 6 \text{ В}$, $\varphi_0 = 0.8 \text{ В}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_S = 0.2 \Omega$, $Y_C = 2 \cdot 10^{-3} \text{ С}$, $\alpha = 10$.

Начнем с построения однопараметрической бифуркационной диаграммы, которая простыми средствами позволяет качественно оценить типы движений и их трансформации. В общем случае бифуркационная диаграмма представляет собой зависимость максимумов некоторого процесса при вариациях управляющего параметра. Если анализируемый процесс имеет гармонический характер, то его максимумы периодически повторяются и

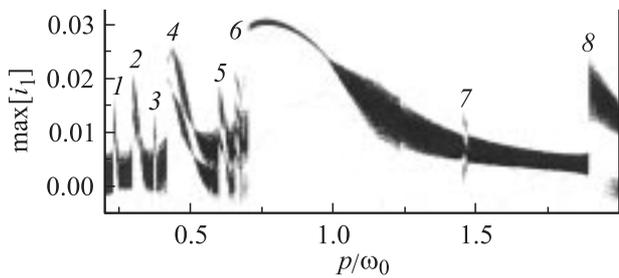


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма: зависимость максимумов процесса i_1 от частоты внешнего воздействия.

бифуркационная диаграмма представляет собой при фиксированном значении управляющего параметра точку, а при вариациях этого параметра — линию. Однако если линии диаграммы размыты или точки сплошь заполняют целые области диаграммы, то процесс имеет ограниченный, непериодический характер и с большой долей уверенности можно говорить о странности аттрактора исследуемой динамической системы.

Бифуркационная диаграмма, приведенная на рис. 2, представляет собой зависимость максимумов тока i_1 от относительной частоты внешнего воздействия $\Omega = p/\omega_0$, построенной при нормированной амплитуде накачки $B = A/g$, равной 0.5. В выбранном диапазоне изменения частоты внешней силы наблюдаются восемь нелинейных резонансов, пронумерованных как 1–8. Частота изменялась снизу вверх, в окрестности резонансных частот наблюдаются гистерезисные явления, резонансные кривые наклонены влево. Если изменять частоту внешнего воздействия сверху вниз, то качественный вид диаграммы сохраняется, лишь гистерезисные явления наблюдаются на более низких частотах, чем при первоначальном законе изменения частоты. Полусумма частот, на которых возникают гистерезисные изменения амплитуды тока i_1 , будем считать частотами нелинейных резонансов. Они имеют следующие значения: $\Omega_1 \approx 0.228$, $\Omega_2 \approx 0.304$, $\Omega_3 \approx 0.373$, $\Omega_4 \approx 0.42$, $\Omega_5 \approx 0.593$, $\Omega_6 \approx 0.757$, $\Omega_7 \approx 1.446$, $\Omega_8 \approx 1.877$.

Как известно из классической теории нелинейных колебаний [2,3], частоты силовых нелинейных резонансов определяются соотношениями вида $\Omega_n = 1/n$, а частоты нелинейных параметрических резонансов — $\Omega_m = 2/m$ (n, m — целые числа). Кроме того, возможны силовые резонансы высоких порядков [1] на частотах $\Omega_{nm} = n/m$.

Первый и седьмой из наблюдаемых на бифуркационной диаграмме резонансов можно отождествить с нелинейными силовыми резонансами пятого порядка при $n/m = 1/4$ и $n/m = 3/2$ соответственно. Резонансы 3, 5, 8 являются проявлениями нелинейных параметрических резонансов с $m = 5, 3, 2$. И наконец, резонансы 2 ($n = 3, m = 6$), 4 ($n = 2, m = 4$) и 6 ($n = 1, m = 2$) являются результатом проявления одновременно силовых и параметрических явлений. Интересно отметить, что силовые резонансы на частотах $\Omega_n = 1/n$ в чистом виде не

проявляются, а всегда сопровождаются нелинейными параметрическими резонансами, поскольку $\Omega_m = 2\Omega_n$, $n = m$.

Обратим внимание на размытость линий бифуркационной диаграммы. Как отмечалось выше, это должно соответствовать сложной внутренней динамике при выбранной амплитуде напряжения накачки. Представляется интересным исследовать свойства системы при вариациях этой амплитуды. Зафиксируем частоту внешней силы в окрестности наиболее выраженного резонанса 6, положив $\Omega = 0.8$, а в качестве управляющего параметра используем B . Поведение старшего ляпуновского характеристического показателя Λ_{\max} в зависимости от амплитуды внешней силы представлено на рис. 3, из которого следует, что существует критическое (бифуркационное) значение амплитуды напряжения накачки $\hat{B} = 0.2358\dots$, разделяющее качественно различные типы движений. При $B < \hat{B}$ старший ляпуновский показатель отрицателен и равен $\Lambda_{\max} \approx -4.4 \cdot 10^{-5}$, что указывает на отсутствие чувствительности к начальным условиям и перемешивания траекторий в фазовом пространстве.

Уместно пояснить, что понимается под старшим показателем Ляпунова. В N -мерной динамической системе существует ровно N ляпуновских показателей. Их знаки образуют так называемую сигнатуру спектра показателей, условно записываемую следующим образом: $\langle +, +, \dots, 0, -, - \rangle$. В потоке (10) присутствие нулевого показателя обязательно и обусловлено действием внешней периодической силы. Действительно, систему (10) можно преобразовать к автономной системе четвертого порядка, добавив уравнение $d\phi/d\tau = \Omega$, что равносильно введению новой переменной $\phi = \Omega\tau$. Очевидно, что вдоль оси ϕ изменения расстояний между траекториями в фазовом пространстве равны нулю, что и приводит к появлению в сигнатуре нулевого показателя. Указанный факт в общем случае строго доказывается известной теоремой Г. Хакена [16]. Мы будем называть старшим

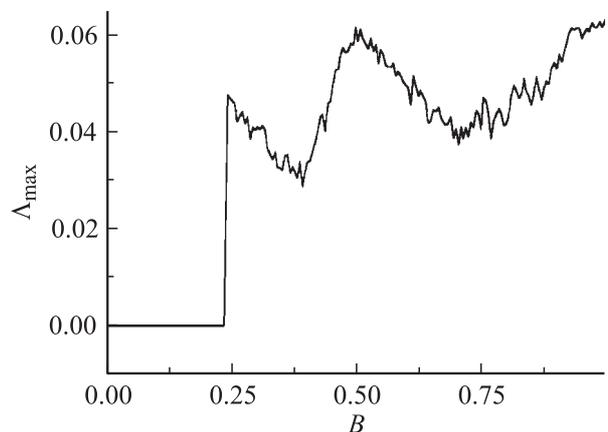


Рис. 3. Зависимость максимального показателя Ляпунова от амплитуды внешней силы. Бифуркационное значение внешней силы $\hat{B} = 0.2358\dots$

ляпуновским показателем тот, который обусловлен только внутренней динамикой системы, хотя бы он был и меньше нуля.

При превышении амплитуды накачки критического значения старший ляпуновский показатель меняет знак и принимает значение $\Lambda_{\max} \approx 4.8 \cdot 10^{-2}$. Следовательно, возникает режим динамического хаоса. Смена режимов происходит скачком, что для термодинамических систем соответствует фазовому переходу первого рода. С дальнейшим ростом B старший показатель Ляпунова немонотонно увеличивается, окна регулярности отсутствуют. Последнее означает, что при $B > \hat{B}$ существует единственный хаотический аттрактор, который не содержит устойчивых регулярных аттракторов и сохраняет свои свойства при вариациях управляющего параметра. По сложившейся классификации аттрактор такого типа следует отнести к квазигиперболическому типу [8].

Исследуем фрактальные свойства аттрактора в окрестности точки бифуркации. Обратимся к рис. 4, *a*, на котором представлена зависимость емкости аттрактора (фрактальной размерности) D_C , информационной D_I и корреляционной D_{cor} размерностей от амплитуды внешней силы. Эти размерности отличаются друг от друга при сохранении обязательных соотношений $D_{\text{cor}} \leq D_I \leq D_C$ и в большей или меньшей мере совершают скачок в точке перехода к хаотическому режиму. Фрактальная размерность увеличивается примерно на 11%, а информационная и корреляционные размерности приблизительно на 5 и 0.8% соответственно. Особенно важно отметить, что все размерности являются дробными как до, так и после бифуркации. Следовательно, до точки бифуркации в системе существует странный нехаотический аттрактор, а после — странный хаотический. Существование странного хаотического аттрактора в настоящее время является таким же привычным, как существование, например, предельного цикла. Для возникновения же в динамической системе странного нехаотического аттрактора до сих пор считалось обязательным условие воздействия на нее двух гармонических сигналов с иррациональным соотношением частот [17,18]. В работе [19] было показано, что иррациональность частотных соотношений обязательна далеко не всегда, а теперь выясняется, что иногда достаточно и одночастотного воздействия. Полученные результаты свидетельствуют о том, что режим странного нехаотического аттрактора не является каким-то редким, экзотическим явлением, а является достаточно типичным проявлением нелинейных свойств динамических систем.

Обратимся к рис. 4, *b*, на котором приведен фрагмент однопараметрической бифуркационной диаграммы, построенной в окрестности знака ляпуновского характеристического показателя. Справа от точки \hat{B} аттрактор устроен достаточно просто, он представляет собой замкнутую слаборазмытую двухоборотную кривую. Слева от точки \hat{B} , несмотря на отрицательность старшего ляпуновского показателя, бифуркаци-

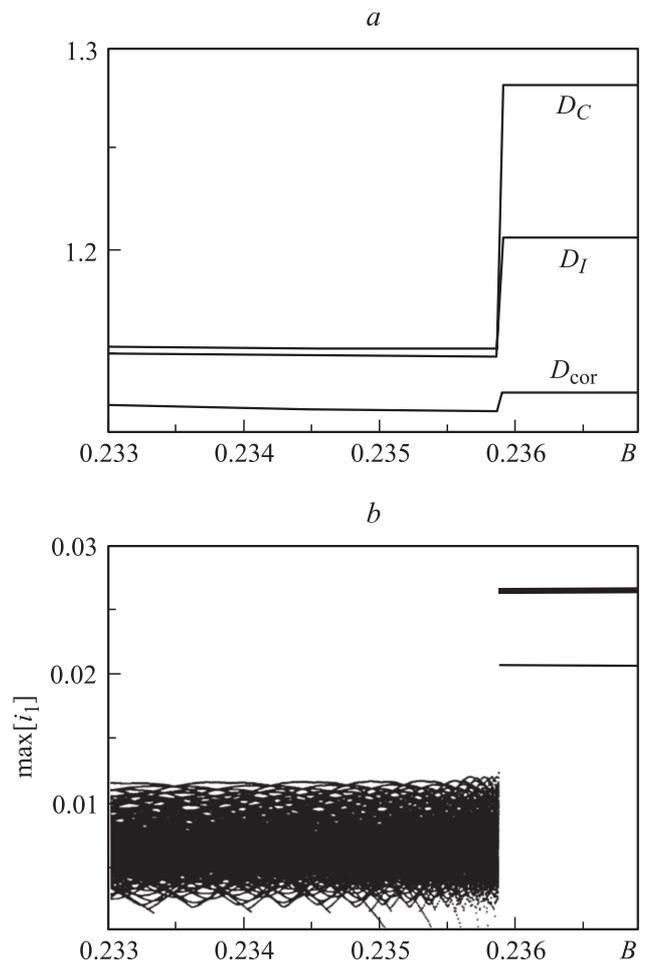


Рис. 4. *a* — зависимость емкости аттрактора D_C , его информационной D_I и корреляционной D_{cor} размерностей от амплитуды внешней силы; *b* — фрагмент бифуркационной диаграммы, построенной в окрестности точки бифуркации.

онная диаграмма гораздо сложнее. Здесь реализуется непериодический колебательный режим со сложной геометрической структурой (странность), но с отсутствием экспоненциального разбегания фазовых траекторий и перемешивания (отсутствие хаотичности), что обусловлено отрицательным знаком ляпуновского показателя. Именно эти свойства характерны для странного нехаотического аттрактора.

Немаловажно, что наблюдаемый странный нехаотический аттрактор является грубым, поскольку его размерность и бифуркационная диаграмма практически не изменяются при вариациях амплитуды внешней силы в достаточно широких пределах. Следовательно, он сохраняет свою структуру при наличии возмущений.

В заключение настоящего раздела рассмотрим еще один важный вопрос, связанный с возможностью оценки фрактальной размерности аттрактора по вычисленной ляпуновской размерности. Этот вопрос нетривиален и длительное время обсуждается в печати. Так, результаты тестов, проведенных для отображений

Эно, Каплана–Йорке, Заславского и уравнений Рабиновича–Фабриканта, показали, что ляпуновская размерность весьма близка к фрактальной [20], но в общем случае для отображений более высоких порядков и потоковых систем это далеко не так. К настоящему времени известен ряд примеров, указывающих на излишне завышенное значение размерности, полученной по процедуре Каплана–Йорке [21].

В работе [22] строго доказана справедливость соотношения

$$k_+ \leq D_C \leq D_L, \quad (13)$$

связывающего между собой число положительных показателей Ляпунова k_+ , фрактальную и ляпуновскую D_L размерности. Следовательно, ляпуновская размерность является верхней границей возможных значений емкости аттрактора. Но остается открытым вопрос о близости этой границы к фрактальной размерности для каждой конкретной динамической системы. Попытаемся найти ответ на этот вопрос для исследуемого потока (10).

Понятие ляпуновской размерности исходит из гипотезы Каплана–Йорке [21], в которой предполагалось использовать D_L для вычисления информационной размерности аттракторов динамических систем. Алгоритм ее вычисления следующий:

$$D_L = k + \frac{\sum_{i=1}^k \Lambda_i}{|\Lambda_{k+1}|}. \quad (14)$$

Здесь k — такое целое число, при котором справедливы соотношения $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_k > 0$, но $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_{k+1} < 0$. Для потока (10) при $B > \hat{B}$ в принципе возможны две сигнатуры ляпуновского спектра, а именно: $\langle +, 0, -, - \rangle$ и $\langle +, +, 0, - \rangle$. Другие сигнатуры невозможны, поскольку сумма ляпуновских показателей диссипативной системы должна быть отрицательной. Заметим, что если бы имела место сигнатура с двумя положительными показателями, то, согласно соотношению (14), размерность аттрактора не могла бы быть меньше трех, что противоречит результатам численного расчета (рис. 4). Следовательно, при использованных в численном эксперименте параметрах режим гиперхаоса нереализуем и однозначно имеет место сигнатура вида $\langle +, 0, -, - \rangle$. Однако и для такой сигнатуры k в зависимости от абсолютного значения Λ_3 может принимать значения 2 либо 3. Следовательно, ляпуновская размерность в самом благоприятном случае ($k = 2$) не может быть меньше двух, что почти на 60% превышает фрактальную и на 66% информационную размерности.

Таким образом, установлено, что ляпуновская размерность для потока (10) не позволяет даже приближенно оценить не только информационную размерность, но и емкость аттрактора.

4. Физический эксперимент

Для проверки результатов численного анализа и соответствия построенной математической модели реальным физическим системам нами был поставлен натурный эксперимент, который с целью исключения различного рода побочных эффектов проводился на низких частотах.

Экспериментальная установка была создана в соответствии с принципиальной схемой, показанной на рис. 1, за исключением двух не влияющих на работу устройства изменений. Эти несущественные изменения заключались в том, что элементы L_1 и R_1 менялись местами, а общий провод подключался к точке соединения элементов R_1 и L_2 . Такого рода модификация позволяла использовать R_1 в качестве датчика тока i_1 , однако при этом требовалась гальваническая развязка источника накачки от макета устройства. Поэтому в качестве источника накачки использовался генератор стандартных сигналов, на выходе которого дополнительно включались согласующий истоковый повторитель напряжения и широкополосный трансформатор.

Нелинейная емкость представляла собой десять параллельно включенных варикапов (экспериментальная разработка ФГУП НИИПП, Томск), каждый из которых имел емкость в рабочей точке C_0 около 500 pF. Частота малосигнального резонанса $f_0 = \omega_0/2\pi$ выбиралась исходя из условия достижения значения $Y_C = \omega_0 C_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ S, использовавшегося в численном эксперименте, и составила $f_0 \approx 65$ kHz. На данной установке была проведена серия экспериментов, в этом разделе приведены только те результаты, которые относятся к предмету настоящей работы.

Прежде всего была снята резонансная характеристика устройства — зависимость среднеквадратичного значения тока i_1 от частоты накачки. При напряжении смещения варикапов $E = 6$ V и амплитуде напряжения накачки $A \approx 3.5$ V резонансная характеристика с высокой точностью соответствовала бифуркационной диаграмме (рис. 2). Были надежно зарегистрированы резонансы 2 (19.6 kHz), 3 (23.4 kHz), 4 (26 kHz), 5 (39 kHz), 6 (50 kHz), 8 (120.2 kHz). Поскольку резонансные пики искривлены, резонансные частоты определялись как полусумма частот, при которых наблюдались гистерезисные явления, соответствующие смене направления изменения накачки. Резонансы 1 и 7 в эксперименте не наблюдались, что могло быть связано с некоторым отличием вольт-фарадных характеристик использованных варикапов от принятой аппроксимации (3).

На экране осциллографа наблюдалась форма тока i_1 . На резонансных частотах этот ток имел вид несинхронизируемой сигналом развертки осциллографа размытой ленты, что свидетельствовало о хаотическом характере движения в системе.

На частоте основного нелинейного параметрически силового резонанса (50 kHz) были исследованы фазовые портреты в координатах $i_1 - u_C$, позволявшие судить о структуре аттракторов нелинейной системы. Эти портреты представлены на рис. 5. При небольших амплитудах накачки, порядка долей вольта, аттрактором являлся

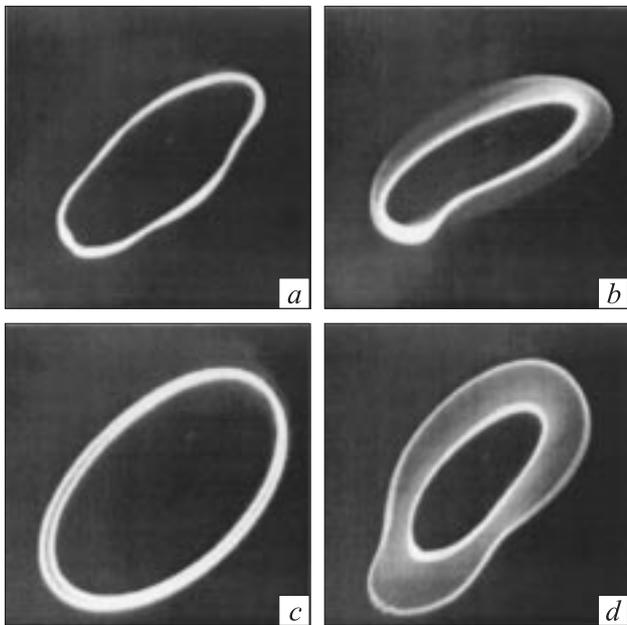


Рис. 5. Последовательность трансформаций аттрактора исследуемой системы в координатах i_1-uc , наблюдаемых в физическом эксперименте по мере увеличения амплитуды внешней силы.

предельный цикл (рис. 5, *a*). Затем по мере увеличения накачки аттрактор приобретает все более размытую форму (рис. 5, *b*). Из результатов численного анализа можно заключить, что это странный нехаотический аттрактор. Первая бифуркация происходила при $A \approx 1.65$ V. В этот момент аттрактор резко трансформировался к виду, представленному на рис. 5, *c*. Теперь форма аттрактора напоминает двухоборотный предельный цикл, однако его размытость указывает на хаотический характер движения (ср. с рис. 4, *b*). С дальнейшим ростом амплитуды накачки аттрактор приобретает вид, близкий к плоской ленте (рис. 5, *d*), что хорошо согласуется с рассчитанной в численном эксперименте фрактальной размерностью.

Таким образом, результаты натурального эксперимента показали хорошее совпадение с результатами численного анализа, что свидетельствует об адекватности построенной модели (10) реальным физическим системам.

Заключение

Предложенная математическая модель динамической системы позволяет исследовать сложные динамические режимы, возникающие в тех случаях, когда имеют место проявления нелинейных силового и параметрического резонансов одновременно. Увеличение размерности фазового пространства до четырех резко обогатило динамику системы, позволяя наблюдать такие типы движений, как детерминированный хаос, возбуждение странного нехаотического аттрактора одночастотным внешним воздействием.

Исследовано влияние амплитуды внешней силы на значение старшего ляпуновского показателя и различные типы размерностей аттрактора.

В настоящее время, используя рассмотренную систему как прототип, авторы заканчивают разработку источника широкополосных шумоподобных сигналов восьми-миллиметрового диапазона длин волн.

Авторы признательны профессору Калифорнийского университета Д. Сарэйлу за предоставление программы расчета фрактальных размерностей и ценные советы по интерпретации возвращаемых ей результатов.

Список литературы

- [1] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [2] Мизгулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 424 с.
- [3] Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей. М.: Связь, 1972. 328 с.
- [4] Hasler M. // IJBC. 1998. Vol. 8. N 4. P. 647–659.
- [5] Vladimirov S.N., Negrul V.V. // Proc. ISAP-2000. Fukuoka (Japan), 2000. Vol. 3. P. 1403–1406.
- [6] Vladimirov S.N., Negrul V.V. // IJBC. 2002. Vol. 12. N 4. P. 819–826.
- [7] Ruelle D., Takens F. // Com. Math. Phys. 1971. Vol. 20. N 2. P. 167–192.
- [8] Анищенко В.С. // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5. № 1. С. 109–128.
- [9] Дмитриев А.С. // Компьютера. 1998. № 47.
- [10] Казанов В.И. Транзисторные радиопередатчики. М.: Энергия, 1976. 448 с.
- [11] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. 368 с.
- [12] Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нижесткие задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [13] Benettin G., Galgani L., Strelkyn J.M. // Phys. Rev. A. 1976. Vol. 14. N 6. P. 2338–2345.
- [14] Liebovitch S., Toth T. // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 141. P. 386–390.
- [15] Sarraïlle J.J., Myers L.S. // Educational and Psychological Measurement. 1994. Vol. 54. N 1. P. 94–97.
- [16] Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1980. 422 с.
- [17] Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. // Phys. D. 1984. Vol. 13. P. 261–268.
- [18] Хованов И.А., Хованова Н.А., Анищенко В.С. и др. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 112–114.
- [19] Владимиров С.Н., Штраух А.А. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 1–5.
- [20] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [21] Kaplan J.L., Yorke J.A. // Lect. Notes in Math. 1979. № 730. P. 204–227.
- [22] Young L.S. // Ergod. Theory and Dyn. System. 1982. Vol. 2. P. 109–124.