

01;03

# Капиллярный распад конфигурации, образованной двумя вязкими феррожидкостями, окружающими токнесущий проводник и имеющими цилиндрическую поверхность раздела

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия  
e-mail: korovin@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 26 февраля 2003 г. В окончательной редакции 2 декабря 2003 г.)

Исследуется влияние магнитного поля с круговыми силовыми линиями на капиллярную неустойчивость цилиндрической поверхности раздела несмешивающихся феррожидкостей с различными магнитными восприимчивостями и одинаковыми плотностями и вязкостями. С использованием модифицированного уравнения движения получено дисперсионное соотношение и проведен анализ предельного режима развития неустойчивости, реализующегося в случае больших чисел Онезорге.

## Введение

Капиллярный распад покрывающий тонкую нить цилиндрической оболочки, состоящей из сильно вязкой жидкости, окруженной снаружи воздухом, длительное время привлекал внимание многих исследователей [1,2]. Примером такой системы является природный объект — один из видов свежей паутины [1].

Феррогидродинамический аналог [3–6] классических экспериментов [1] ярко демонстрирует эффективность применения неоднородного магнитного поля для управления процессом капиллярного распада цилиндрического слоя магнитной жидкости, покрывающего длинный токнесущий проводник круглого сечения. По сравнению с экспериментами [1,2], в которых использовалась немагнитная жидкость, на феррожидкость дополнительно действуют направленные к оси симметрии объемные магнитные силы, удерживающие слой на поверхности проводника. Для формирования строго цилиндрической внешней границы слоя в экспериментах [3,4] путем создания гидроневесомости устранялось влияние силы тяжести на феррожидкость. Эта цель достигалась за счет погружения проводника и покрывающего его слоя в сильно вязкую немагнитную жидкость, имеющую одинаковую плотность с феррожидкостью, образующей слой. При подобной модификации классических экспериментов толщина слоя феррожидкости на несколько порядков превосходит толщину окруженной воздухом оболочки из немагнитной жидкости, покрывающей нить.

Теоретический анализ наблюдавшегося в экспериментах стабилизирующего воздействия магнитного поля (индуцируемого протекающим по проводнику электрическим током) на капиллярный распад цилиндрической конфигурации, состоящей из вязких магнитной и немагнитной жидкостей, наиболее просто проводится в рамках модели, представляемой цилиндрическим слоем невязкой феррожидкости, окруженной газом с пренебрежимо малой плотностью [4–6]. Ис-

пользование такой схематизации для реально исследованной в экспериментах системы из двух вязких жидкостей позволило вычислить критическое значение магнитного числа Бонда  $Bo_m$  (равное единице), разделяющее случаи устойчивости  $Bo_m > 1$  и неустойчивости  $Bo_m < 1$ , и привело к выводу, что длина волны наиболее быстро растущей гармоники  $\lambda_*$  (определяющей характерный размер капель, образующихся после распада сплошного слоя) практически не зависит от толщины слоя. В этой связи следует отметить, что при усложнении модели, заключающемся в учете вязкости феррожидкости, образующей цилиндрический слой, а также в учете конечной плотности окружающей слой невязкой жидкости обнаруживается [7] заметное влияние толщины слоя на величину  $\lambda_*$ .

В данной работе исследована капиллярная неустойчивость двухжидкостной системы в случае, когда разделенные в начальный момент времени цилиндрической границей несмешивающиеся феррожидкости имеют одинаковые плотности и вязкости, тогда как магнитная восприимчивость внутренней жидкости больше восприимчивости внешней жидкости. Изучено влияние магнитного поля и толщины слоя на  $\lambda_*$  в предельном режиме развития капиллярной неустойчивости, когда вклад инерционных сил мал по сравнению с вязкими силами (случай больших чисел Онезорге).

## Постановка задачи

Рассматривается сплошной слой покоящейся феррожидкости постоянной толщины  $d$ , покрывающий прямой цилиндрический проводник радиуса  $c$ , по которому протекает постоянный ток  $I$ , индуцирующий магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Снаружи слой окружен несмешивающейся феррожидкостью, заполняющей кювету, стенки которой и свободная поверхность феррожидкости, налитой в кювету, находятся достаточно далеко от боковой поверхно-

сти слоя. Предполагается, что по своим реологическим свойствам обе жидкости являются ньютоновскими и что они имеют одинаковый коэффициент динамической вязкости  $\eta$  и одинаковую плотность  $\rho$ , в то время как их абсолютные магнитные проницаемости  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (соответственно у внутренней и внешней жидкостей) различны и зависят лишь от модуля вектора напряженности магнитного поля, причем  $\mu_1(H) > \mu_2(H)$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \vartheta, z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью проводника и обозначим через  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_z$  единичные векторы, соответствующие координатным линиям  $r, \vartheta, z$ . При таком выборе системы координат поверхность раздела находящихся в состоянии гидростатического равновесия жидкостей описывается уравнением  $r = a$ , где  $a = c + d$ , а магнитное поле азимутально  $\mathbf{H}(r) = H\mathbf{e}_\vartheta$  и в занятой жидкостями области  $r > c$  имеем  $H = I/(2\pi r)$ . При этом магнитная восприимчивость  $\chi_0(H)$ , намагниченность  $\mathbf{M}_0$  и плотность объемной магнитной силы  $\mathbf{f}_0$  в рассматриваемой двухжидкостной системе описываются выражениями

$$\chi_0 = \chi_1(H)[1 - \theta(z - a)] + \chi_2(H)\theta(r - a),$$

$$\mathbf{M}_0 = \chi_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{f}_0 = \mu_0 M_0 \text{grad } H = -\frac{\mu_0 \chi_0 I^2}{4\pi^2 r^3} \mathbf{e}_r, \quad (1)$$

где  $\chi_j(H) = \mu_j/\mu_0 - 1$  — магнитные восприимчивости внутренней ( $j = 1$ ) и внешней ( $j = 2$ ) жидкостей,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — магнитная постоянная,  $\theta(r - a)$  — функция Хевисайда

$$\theta(r - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ 1 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

В состоянии гидростатического равновесия жидкостей магнитная сила, естественно, потенциальна.

В экспериментах, как известно [3–6], статическая конфигурация, о которой шла речь выше, реализуется лишь в тех случаях, когда магнитное число Бонда  $\text{Bo}_m = \mu_0(4\pi^2\alpha a)^{-1}I^2(\chi_1 - \chi_2)|_{H=H(a)} > 1$ ; здесь и далее  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. При уменьшении же  $\text{Bo}_m$  (легко реализуемого уменьшением  $I$ ) до значений, меньших единицы, цилиндрическая поверхность раздела становится неустойчивой и сплошной цилиндрический слой внутренней жидкости распадается на отдельные капли, нанизанные подобно бусинам на токнесущий проводник.

Сформулируем задачу о вызываемости (в случае  $\text{Bo}_m < 1$ ) силами поверхностного натяжения совместном осесимметричном движении несмешивающихся жидкостей, когда форма их границы раздела представляет слабдеформированную в продольном направлении цилиндрическую поверхность и описывается уравнением  $r = r_s(z, t)$ , где  $t$  — время. Положим  $r_s(z, t) = a + \xi(z, t)$ , где  $\xi(z, t)$  описывает малое ( $|\xi(z, t)/a| \ll 1$ ) возмущение исходного радиуса цилиндрической поверхности раздела жидкостей. Функция  $\xi(z, t)$  заранее неизвестна и подлежит нахождению в процессе решения задачи.

В случае осесимметричного движения жидкостей деформация первоначально цилиндрической поверхности раздела сред, обладающих различными магнитными восприимчивостями, не вызывает возмущения исходного магнитного поля, поскольку круговые магнитные силовые линии не пересекают возмущенную поверхность раздела. При этом, однако, ввиду перераспределения магнитных жидкостей вследствие перехода жидких частиц, обладающих различными магнитными восприимчивостями, сквозь мысленно вводимую геометрическую поверхность  $r = a$  (совпадающую с начальной формой поверхности раздела) магнитная восприимчивость  $\chi(H)$ , а также намагниченность  $\mathbf{M}$  и плотность объемной магнитной силы  $\mathbf{f}$  в возмущенной движением двухжидкостной системе становятся отличными от соответствующих выражений (1)

$$\chi = \chi_1(H)[1 - \theta(r - r_s)] + \chi_2(H)\theta(r - r_s),$$

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}, \quad \mathbf{f} = -\frac{\mu_0\chi I^2}{4\pi^2 r^3} \mathbf{e}_r. \quad (2)$$

Легко найти

$$\text{rot } \mathbf{f} = \Gamma\delta(r - r_s)\mathbf{e}_\vartheta, \quad \Gamma = \frac{\mu_0(\chi_2 - \chi_1)I^2}{4\pi^2 r^3} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $\delta(r - r_s)$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом, вызываемая капиллярными силами деформация исходной цилиндрической поверхности раздела (вследствие чего  $\partial \xi / \partial z \neq 0$ ) генерирует завихренность магнитной силы, причем завихренность  $\text{rot } \mathbf{f}$  локализована на поверхности раздела, в то время как вне этой поверхности магнитная сила остается потенциальной.

Ввиду несжимаемости рассматриваемых жидкостей поле скоростей  $\mathbf{u}(r, z, t) = (u_r, 0, u_z)$ , естественно, является соленоидальным

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Специфика исследуемого случая — постоянство плотности среды и коэффициента динамической вязкости во всем объеме двухжидкостной системы и отсутствие [8] сосредоточенных на поверхности раздела  $r = r_s(z, t)$  пар внешних сил [9] позволяет отойти от стандартной постановки линейной задачи о гидродинамической устойчивости цилиндрической конфигурации двух несмешивающихся жидкостей [7], требующей раздельного построения дифференцируемых решений уравнений гидродинамики в областях, занятых каждой из жидкостей, и последующей сшивки найденных решений с помощью кинематических и динамических условий на границе раздела жидкостей.

Напомним, что в рамках линейной теории эти условия формулируются на невозмущенной поверхности раздела  $r = a$ . Анализ показывает [10], что в рассматриваемом случае при переходе через поверхность  $r = a$  производные  $\partial u_r / \partial r$ ,  $\partial u_r / \partial z$ ,  $\partial u_z / \partial r$ ,  $\partial u_z / \partial z$  непрерывны, так

что вязкие напряжения не дают вклад в динамическое условие на поверхности раздела феррожидкостей [6], выражающее баланс нормальных напряжений, действующих на противоположные стороны границы раздела. Вследствие этого реализуется ситуация, свойственная невязким жидкостям, — скачок давления при переходе через поверхность раздела определяется коэффициентом поверхностного натяжения  $\alpha$  и средней кривизной поверхности раздела  $K$  и не зависит от поля скоростей

$$p_2(a, z, t) - p_1(a, z, t) = -2\alpha K, \\ K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{\xi}{a^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) > 0, \quad (5)$$

где через  $p_1(r, z, t)$ ,  $p_2(r, z, t)$  обозначены давления соответственно во внутренней ( $c < r < a$ ) и внешней ( $a < r < \infty$ ) феррожидкостях.

В рассматриваемом приближении пренебрегается отклонением вектора нормали к границе раздела от радиального направления, так что напряжение  $\mathbf{f}_c$ , создаваемое капиллярными силами и действующее на границу раздела со стороны внешней феррожидкости, с учетом (5) записывается следующим образом:  $\mathbf{f}_c(z, t) = -2\alpha K \mathbf{e}_r$ .

В отличие от стандартной формулировки задачи [7] будем рассматривать исследуемую двухжидкостную систему как единую среду. Введем для этой среды давление

$$p(r, z, t) = \begin{cases} p_1(r, z, t) & \text{при } r < a, \\ p_2(r, z, t) & \text{при } r > a \end{cases}$$

и, следуя работе [11], учтем воздействие капиллярных сил непосредственно в уравнении движения. Последовательный вывод модифицированного дифференциального уравнения движения показывает [10], что в рамках линейной теории такая процедура реализуется путем учета в уравнении движения напряжения  $\mathbf{f}_c$ , локализованного на поверхности  $r = a$ . При этом после пренебрежения квадратичными по скорости членами уравнение движения рассматриваемой среды записывается следующим образом:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_c, \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{f}_c \delta(r - a), \quad \mathbf{f}_c = -2\alpha K \mathbf{e}_r \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{g} = (g_r, g_\vartheta, g_z)$  — ускорение свободного падения;  $\mathbf{F}_c$  — объемная плотность сил, создаваемых эффектом капиллярности. Исходя из (6), нетрудно показать, что для решения  $(\mathbf{u}, p)$  системы уравнений (4), (6) в отсутствие разрывов поля скоростей условие (5) автоматически выполняется. Таким образом, при использовании модифицированного уравнения движения (6) необходимость в постановке динамического условия (5) отпадает.

На поверхности проводника должны выполняться условия непроницаемости и прилипания

$$u_r(c, z, t) = 0, \quad u_z(c, z, t) = 0. \quad (8)$$

Линеаризованное кинематическое условие на поверхности раздела жидкостей (при  $r = a$ ) имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r(a, z, t). \quad (9)$$

Физически равенство (9) означает, что поверхность раздела состоит из одних и тех же жидких частиц. Отметим также, что по смыслу задачи  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

С целью упрощения дальнейших выкладок исключим из уравнения движения (6) давление. Применяя к (6) оператор rot, с учетом (7) получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_v}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{\omega}_v = \frac{1}{2\rho} (\text{rot } \mathbf{f} + \text{rot } \mathbf{F}_c), \quad \nu = \frac{\xi}{\rho}, \quad (10)$$

$$\text{rot } \mathbf{F}_c = \alpha \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) \delta(r - a) \mathbf{e}_\vartheta, \quad (11)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_v = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$  — вектор вихря скорости.

Уравнение (10) описывает диффузию вихрей в движущейся двухжидкостной среде, порождаемых эффектом прилипания жидкости к твердой поверхности проводника, а также источниками, фигурирующими в правой части (10), — завихренностями сил магнитного (3) и капиллярного (11) происхождения.

Обращаясь к уравнению неразрывности (4) и вводя функцию тока Стокса  $r\psi(r, z, t)$

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r},$$

легко получить

$$\boldsymbol{\omega}_v = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\vartheta L\psi, \quad \Delta \boldsymbol{\omega}_v = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\vartheta LL\psi,$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

С учетом этих выражений уравнение (10) в скалярном виде записывается следующим образом:

$$\left( L - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) L\psi = \frac{\alpha}{\eta a^2} \left\{ \text{Bo}_m \left( \frac{a}{r} \right)^3 \frac{\partial \xi}{\partial z} \delta[r - a - \xi(z, t)] - \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + a^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) \delta(r - a) \right\}. \quad (12)$$

Переписывая с использованием функции тока кинематическое условие на границе раздела жидкостей (9) и условия на поверхности проводника (8), получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=a} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=c} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=c} + \frac{\psi(c, z, t)}{c} = 0. \quad (14)$$

Далее рассматривается система дифференциальных уравнений (12), (13) и исследуется поведение с ростом времени ее решения, удовлетворяющего краевым условиям (14).

## Дисперсионное соотношение

Ввиду осевой симметрии сформулированной задачи при нахождении решения уравнения (12) целесообразно применить операционный метод, базирующийся на использовании преобразования Ханкеля [12]. Известно, что для кусочно-непрерывной функции  $w(r)$ , удовлетворяющей достаточно общим условиям ограниченности [12], имеют место формулы обращения Ханкеля порядков  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{H}_n\{w(r)\} = \int_0^\infty w(r) J_n(sr) r dr \equiv W_n(s),$$

$$\mathcal{H}_n^{-1}\{W(s)\} = \int_0^\infty W_n(s) J_n(sr) s ds \equiv w(r), \quad (15)$$

где  $J_n(sr)$  — функция Бесселя порядка  $n$ .

При этом [12]

$$\mathcal{H}_1\left\{\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2}\right\} = -s^2 W_1(s). \quad (16)$$

Доопределим функцию  $\psi(r, z, t)$ , полагая ее равной  $\psi(c, z, t)$  при  $0 \leq r \leq c$ , и введем обозначение

$$\mathcal{H}_1\{\psi(r, z, t)\} = \Sigma(s, z, t).$$

Совершив в уравнении (12) преобразование Ханкеля первого порядка, с учетом (16) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - s^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2\right) \Sigma$$

$$= \frac{\alpha J_1(sa)}{\eta a} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial z} \left[ \frac{a^3 \text{Bo}_m}{(a + \xi)^3} - 1 \right] - a^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right\}. \quad (17)$$

Пренебрегая в правой части (17) величинами порядка  $|\xi/a|$  и выше по сравнению с единицей, получаем линейное уравнение, описывающее начальную стадию развития неустойчивости, когда различие между фактически реализуемой (изменяющейся со временем) формой поверхности раздела жидкостей  $r = r_s(z, t)$  и исходной статической формой  $r = a$  малó,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - s^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2\right) \Sigma$$

$$= \frac{\alpha J_1(sa)}{\eta a} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial z} (\text{Bo}_m - 1) - a^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right]. \quad (18)$$

Физически переход от уравнения (17) к уравнению (18) означает, что распределение локализованных на поверхности раздела  $r = r_s(z, t)$  магнитных источников

$$\frac{1}{2\rho} \Gamma \delta(r - r_s) \mathbf{e}_\vartheta,$$

являющихся одним из факторов, порождающих завихренность поля скоростей, в рамках линейной теории

допустимо перенести с поверхности  $r = r_s(z, t)$  на поверхность  $r = a$ .

Коэффициенты линейных уравнений (13), (18) не зависят от времени, так что для исследования поведения решения линеаризованной задачи (12)–(14) оказывается возможным применить метод преобразования Фурье [13]. Сущность метода заключается в построении (с использованием оператора обратного преобразования Фурье) решения задачи в виде суперпозиции частных решений (нормальных мод), в которых время и пространственные переменные разделены и зависимость от времени выбрана в виде экспоненциального множителя  $\exp(-i\omega t)$

$$\xi_k \exp[i(kz - \omega t)], \quad \Psi_k(r) \exp[i(kz - \omega t)],$$

$$\Sigma_k(s) \exp[i(kz - \omega t)], \quad i = \sqrt{-1}. \quad (19)$$

Здесь  $\xi_k$  — константа (фурье-образ искомой функции  $\xi(z, t)$ , рассматриваемой в начальный момент времени  $t = 0$ ); величина  $k$  — вещественный параметр (волновое число); функция  $\omega = \omega(k)$  подлежит нахождению в процессе решения задачи.

После нахождения функции  $\Sigma_k(s)$  с помощью обратного преобразования Ханкеля находится амплитудная функция  $\Psi_p(r)$  в представлении частотного решения линеаризованного неоднородного уравнения (12)

$$\Psi_p(r) \exp[i(kz - \omega t)], \quad \Psi_p(r) = \mathcal{H}_1^{-1}\{\Sigma_k(s)\}. \quad (20)$$

При подстановке выражений (19) в систему уравнений (13), (18) и в краевые условия (14) имеем

$$\xi_k \omega + k \Psi_k(a) = 0, \quad (21)$$

$$(s^2 + k^2)(s^2 + m^2) \Sigma_k(s) = \frac{i\alpha \kappa \xi_k}{\eta a^2} Q J_1(sa), \quad (22)$$

$$\Psi_k(c) = 0, \quad \left. \frac{d\Psi_k}{dr} \right|_{r=c} + \frac{\Psi_k(c)}{c} = 0, \quad (23)$$

где

$$Q = \text{Bo}_m - 1 + \kappa^2, \quad \kappa = ka,$$

$$m = \sqrt{k^2 - i \frac{\omega}{v}}, \quad \text{Re } m > 0.$$

С учетом разложения рациональной дроби

$$\frac{1}{(s^2 + k^2)(s^2 + m^2)} = \frac{1}{m^2 - k^2} \left( \frac{1}{s^2 + k^2} - \frac{1}{s^2 + m^2} \right)$$

из равенства (22) получаем

$$\Sigma_k(s) = \frac{i\alpha Q}{\eta a^2} \frac{\kappa \xi_k}{m^2 - k^2} \left[ \frac{J_1(sa)}{s^2 + k^2} - \frac{J_1(sa)}{s^2 + m^2} \right].$$

Далее, обращаясь к (20), с использованием приведенных в [14] определенных интегралов от цилиндрических функций (формулы 6.535 и 6.541), находим

$$\Psi_p(r) = \frac{i\alpha}{\eta a^2} \frac{\kappa \xi_k}{m^2 - k^2} Q R(r), \quad (24)$$

где

$$R(r) = K_1(\kappa) I_1(kr) - K_1(ma) I_1(mr) \quad \text{при } r \leq a,$$

$$R(r) = I_1(\kappa) K_1(kr) - I_1(ma) K_1(mr) \quad \text{при } r \geq a.$$

Нетрудно показать, что в точке  $r = a$  решение (24) имеет непрерывные производные первого и второго порядков.

Поскольку найденное решение (24) не удовлетворяет условиям (21), (23), то требуется привлечь также решения вида (19), которыми обладает однородное уравнение

$$\left(L - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) L\psi = 0, \quad (25)$$

соответствующее неоднородному уравнению (12). При подстановке второго выражения (19) в (25) получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + m^2\right)\right] \times \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2\right)\right] \Psi_k = 0.$$

Легко выписать фундаментальную систему этого уравнения, выражающуюся через модифицированные функции Бесселя первого и второго родов [15],

$$\Psi_k^{(1)} = I_1(kr), \quad \Psi_k^{(2)} = K_1(kr),$$

$$\Psi_k^{(3)} = I_1(mr), \quad \Psi_k^{(4)} = K_1(mr)$$

и далее с учетом (24) построить ограниченное при  $r \rightarrow \infty$  общее решение

$$\Psi_k(r) = CK_1(kr) + DK_1(mr) + \Psi_p(r), \quad (26)$$

содержащее произвольные константы  $C, D$ .

После подстановки выражения (26) в равенства (21), (23) с использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя [15] приходим к следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $C, D, \xi_k$ :

$$C\kappa K_1(\kappa) + D\kappa K_1(q) + \xi_k \times \left\{ \omega a - \frac{\alpha \kappa^2}{\rho a^2 \omega} Q \left[ I_1(\kappa) K_1(\kappa) - I_1(q) K_1(q) \right] \right\} = 0,$$

$$CK_1(\kappa_1) + DK_1(q_1) + \xi_k \frac{\alpha \kappa}{\rho a^2 \omega} \times Q \left[ I_1(q_1) K_1(q) - I_1(\kappa_1) K_1(\kappa) \right] = 0,$$

$$C\kappa_1 K_0(\kappa_1) + Dq_1 K_0(q_1) + \xi_k \frac{\alpha \kappa}{\rho a^2 \omega} \times Q \left[ \kappa_1 I_0(\kappa_1) K_1(\kappa) - q_1 I_0(q_1) K_1(q) \right] = 0,$$

где

$$\kappa_1 = kc = \kappa(1 - \sigma), \quad q = ma,$$

$$q_1 = mc = q(1 - \sigma) \quad \sigma = d/a < 1.$$

Условия существования нетривиального решения этой системы уравнений — равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \kappa K_1(\kappa) & \kappa K_1(q) & \omega a - \frac{\alpha \kappa^2}{\rho a^2 \omega} Q \left[ I_1(\kappa) K_1(\kappa) - I_1(q) K_1(q) \right] \\ K_1(\kappa_1) & K_1(q_1) & \frac{\alpha \kappa^2}{\rho a^2 \omega} Q \left[ I_1(q_1) K_1(q) - I_1(\kappa_1) K_1(\kappa) \right] \\ \kappa_1 K_0(\kappa_1) & q_1 K_0(q_1) & \frac{\alpha \kappa^2}{\rho a^2 \omega} Q \left[ \kappa_1 I_0(\kappa_1) K_1(\kappa) - q_1 I_0(q_1) K_1(q) \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

представляет дисперсионное соотношение, служащее для нахождения искомой функции  $\omega = \omega(k)$ . Вычисление определителя (27) с учетом [15] выражения для вронскианов  $W\{K_0(\kappa_1), I_0(\kappa_1)\}$ ,  $W\{K_0(q_1), I_0(q_1)\}$  приводит к результату

$$\omega^2 = \frac{\alpha \kappa^2}{\rho a^3} (\text{Bo}_m - 1 + \kappa^2) \left\{ I_1(\kappa) K_1(\kappa) - I_1(q) K_1(q) + [\kappa_1 K_0(\kappa_1) K_1(q_1) - q_1 K_0(q_1) K_1(\kappa_1)]^{-1} \times \left\{ K_1^2(\kappa) [\kappa_1 I_0(\kappa_1) K_1(q_1) + q_1 I_1(\kappa_1) K_0(q_1)] - 2K_1(\kappa) K_1(q) + K_1^2(q) [\kappa_1 I_1(q_1) K_0(\kappa_1) + q_1 I_0(q_1) K_1(\kappa_1)] \right\} \right\}. \quad (28)$$

В предельном случае  $v \rightarrow 0$  дисперсионное соотношение (28) принимает простой вид

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho a^3} \frac{\kappa^2 K_1(\kappa)}{K_1(\kappa_1)} (\text{Bo}_m - 1 + \kappa^2) \times [I_1(\kappa) K_1(\kappa_1) - I_1(\kappa_1) K_1(\kappa)],$$

что с точностью до обозначений совпадает с дисперсионным соотношением аналогичной задачи для невязких магнитных жидкостей, полученным в [7] (выражение (30)) в рамках стандартной постановки задачи об устойчивости. Это обстоятельство подтверждает (ввиду независимости друг от друга эффектов, вызываемых капиллярными и вязкими силами) правомерность использования линеаризованного уравнения движения, записанного в модифицированном виде (6), где объемная плотность сил, создаваемых эффектом капиллярности, вычисляется по формуле (7).

## Вязкий режим развития капиллярной неустойчивости

Вызываемый капиллярными силами распад (в случае  $\text{Bo}_m < 1$ ) первоначально цилиндрической конфигурации магнитных жидкостей является результатом сложного взаимодействия капиллярных, инерционных, магнитных и вязких сил. Рассмотрим развитие неустойчивости в случае, когда в общем балансе этих сил вклад инерционных сил мал по сравнению с вкладом вязких сил. Такой режим капиллярного распада реализуется при больших числах Онезорге  $Z = \eta(\rho a d)^{-\frac{1}{2}} \gg 1$ , причем линейная стадия развития неустойчивости в этом случае характеризуется [7] масштабным временем  $\tau_v = \eta a / (\alpha \sigma)$ .

Дисперсионное соотношение (27) нетрудно записать в безразмерном виде

$$\begin{pmatrix} \kappa K_1(\kappa) & \kappa K_1(q) & \varepsilon \sigma \Omega^2 - \kappa^2 Q [I_1(\kappa)K_1(\kappa) - I_1(q)K_1(q)] \\ K_1(\kappa_1) & K_1(q_1) & \kappa Q [I_1(q_1)K_1(q) - I_1(\kappa_1)K_1(\kappa)] \\ \kappa_1 K_0(\kappa_1) & q_1 K_0(q_1) & \kappa Q [\kappa_1 I_0(\kappa_1)K_1(\kappa) - q_1 I_0(q_1)K_1(q)] \end{pmatrix} = 0, \quad (29)$$

где  $\Omega = \omega \tau_v$ ,  $q = \sqrt{\kappa^2 - i\varepsilon \Omega}$ ,  $\varepsilon = Z^{-2}$ .

Обозначим через  $F(\Omega, \kappa; \varepsilon, \sigma, \text{Bo}_m)$  определитель, стоящий в левой части этого равенства. Легко видеть, что при  $\Omega = 0$  первый столбец рассматриваемого определителя равен второму столбцу, а все элементы третьего столбца обращаются в нуль, так что  $F(0, \kappa; \varepsilon, \sigma, \text{Bo}_m) \equiv 0$ . Из сказанного следует, что дисперсионное соотношение (29) имеет тривиальный корень  $\Omega = 0$  кратности два. С физической точки зрения этот корень, разумеется, не представляет интереса.

Аналогичный анализ показывает  $F(\Omega, \kappa; 0, \sigma, \text{Bo}_m) = 0$  при любых  $\Omega, \kappa, \sigma, \text{Bo}_m$ . Дифференцируя по  $\varepsilon$  левую часть (29), получаем

$$F'_\varepsilon = \begin{pmatrix} \kappa K_1(\kappa) & \kappa \frac{d}{d\varepsilon} K_1(q) & \varepsilon \sigma \Omega^2 - \kappa^2 Q [I_1(\kappa)K_1(\kappa) - I_1(q)K_1(q)] \\ K_1(\kappa_1) & \frac{d}{d\varepsilon} K_1(q_1) & \kappa Q [I_1(q_1)K_1(q) - I_1(\kappa_1)K_1(\kappa)] \\ \kappa_1 K_0(\kappa_1) & \frac{d}{d\varepsilon} [q_1 K_0(q_1)] & \kappa Q [\kappa_1 I_0(\kappa_1)K_1(\kappa) - q_1 I_0(q_1)K_1(q)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa K_1(\kappa) & \kappa K_1(q) & \sigma \Omega^2 + \kappa^2 Q \frac{d}{d\varepsilon} [I_1(q)K_1(q)] \\ K_1(\kappa_1) & K_1(q_1) & \kappa Q \frac{d}{d\varepsilon} [I_1(q_1)K_1(q)] \\ \kappa_1 K_0(\kappa_1) & q_1 K_0(q_1) & -\kappa Q \frac{d}{d\varepsilon} [q_1 I_0(q_1)K_1(q)] \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Из этого выражения находим  $F'_\varepsilon(\Omega, \kappa; 0, \sigma, \text{Bo}_m) \equiv 0$ , поскольку в первом определителе, фигурирующем в правой части выражения (30), при  $\varepsilon = 0$  последний столбец состоит из нулей, а во втором определителе в случае  $\varepsilon = 0$  первые два столбца одинаковы. Аналогичный анализ показывает, что в общем случае  $F''_{\varepsilon\varepsilon}(\Omega, \kappa; 0, \sigma, \text{Bo}_m) \neq 0$ . Ввиду этого разложение функции  $F(\Omega, \kappa; \varepsilon, \sigma, \text{Bo}_m)$  по степеням малого параметра  $\varepsilon \ll 1$  начинается с квадратичного члена. Таким образом, в случае больших чисел Онезорге дисперсионное соотношение (29) в первом приближении имеет вид

$$F''_{\varepsilon\varepsilon}(\Omega, \kappa; 0, \sigma, \text{Bo}_m) = 0. \quad (31)$$

Пользуясь известными из высшей алгебры свойствами определителя, из этого уравнения нетрудно найти корень  $\Omega$ , описывающий вязкий режим развития капиллярной неустойчивости рассматриваемой конфигурации магнитных жидкостей. В размерном виде этот корень записывается следующим образом:

$$\omega = \frac{i\alpha}{2\eta a} \kappa \varphi(\kappa, \sigma) (1 - \text{Bo}_m - \kappa^2), \quad \varphi(\kappa, \sigma) = \frac{\det \|c_{ij}\|}{c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}}, \quad (32)$$

где  $\|c_{ij}\|$  — квадратная матрица третьего порядка

$$\begin{pmatrix} K_1(\kappa) & K_0(\kappa) + K_2(\kappa) & c_{13} \\ K_1(\kappa_1) & (1 - \sigma)[K_0(\kappa_1) + K_2(\kappa_1)] & c_{23} \\ \kappa K_0(\kappa_1) & 2[\kappa_1 K_1(\kappa_1) - K_0(\kappa_1)] & c_{33} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$c_{13} = I_1(\kappa)K_0(\kappa) - I_2(\kappa)K_1(\kappa),$$

$$c_{23} = \frac{1}{2} \left\{ I_1(\kappa_1)[K_0(\kappa) + K_2(\kappa)] - (1 - \sigma)K_1(\kappa)[I_0(\kappa_1) + I_2(\kappa_1)] \right\},$$

$$c_{33} = I_0(\kappa_1)K_1(\kappa) + \kappa_1 I_1(\kappa_1)K_1(\kappa) - \frac{\kappa}{2} I_0(\kappa_1)[K_0(\kappa) + K_2(\kappa)].$$

Функция  $\varphi(\kappa, \sigma)$  определена для всех  $\kappa > 0$ ,  $0 < \sigma < 1$ , причем  $\varphi(\kappa, \sigma) > 0$ ,  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \varphi(\kappa, \sigma) = 0$ , так что знак  $\text{Im } \omega$  совпадает со знаком множителя  $1 - \text{Bo}_m - \kappa^2$ . Ввиду этого в плоскости параметров  $(\text{Bo}_m, \kappa)$  кривая нейтральной устойчивости (вдоль которой  $\text{Im } \omega = 0$ ), разделяющая области устойчивости (где  $\text{Im } \omega < 0$ ) и неустойчивости (где  $\text{Im } \omega > 0$ ), описывается уравнением  $\kappa = \sqrt{1 - \text{Bo}_m}$  при  $0 \leq \text{Bo}_m \leq 1$ .

На рис. 1 область устойчивости является первый квадрант с выброшенной заштрихованной частью, представляющей область неустойчивости. Как видно из этого рисунка, с ростом магнитного поля пороговое безразмерное волновое число  $\kappa_c = \sqrt{1 - \text{Bo}_m}$  уменьшается, т. е. диапазон неустойчивых гармоник сужается. Если же изначально  $\text{Bo}_m > 1$ , то рассматриваемая конфигурация несмешивающихся магнитных жидкостей с цилиндрической поверхностью раздела устойчива. Эти выводы, естественно, согласуются с результатами исследования

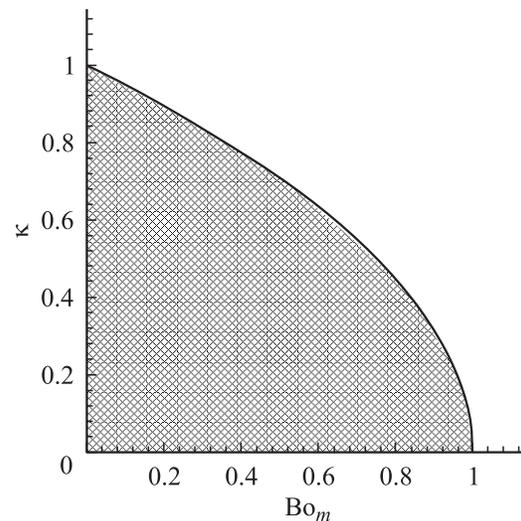
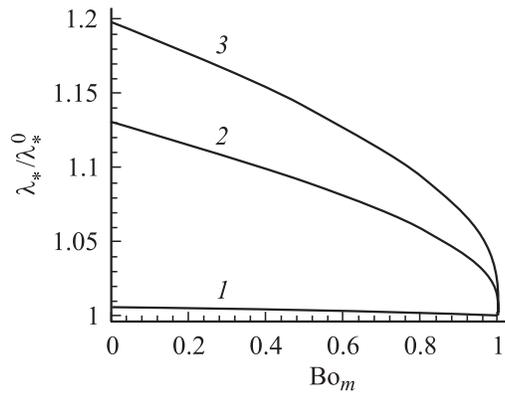


Рис. 1. Область неустойчивости (заштрихована).



**Рис. 2.** Зависимость нормированной длины волны наиболее быстро растущей гармоники от магнитного числа Бонда.  $\sigma = 0.05$  (1), 0.8 (2), 0.99 (3).

капиллярной неустойчивости в рамках модели невязкой жидкости [3–6].

В случае  $Z \gg 1$  при заданных  $0 \leq \text{Bo}_m \leq 1$ ,  $0 < \sigma < 1$  волновое число наиболее быстро растущей гармоники  $\kappa_* = 2\pi a / \lambda_*$ , определяющей характерный размер капель, образующихся в результате капиллярного распада исходной двухжидкостной конфигурации, является точкой максимума функции  $\text{Im} \omega(\kappa)$ . Исходя из (32), запишем уравнение для нахождения  $\kappa_*$

$$(1 - \text{Bo}_m - \kappa_*^2) [\varphi(\kappa_*, \sigma) + \kappa_* \varphi'_\kappa(\kappa_*, \sigma)] - 2\kappa_*^2 \varphi(\kappa_*, \sigma) = 0. \quad (33)$$

Отметим, что в случае невязкой феррожидкости теоретический анализ капиллярной неустойчивости окруженных газом предельных форм цилиндрического слоя — тонкой жидкой оболочки, покрывающей цилиндрический токнесущий проводник, и сплошного жидкого цилиндра, находящегося в магнитном поле с круговыми силовыми линиями, привел к выводу [4,6], что во всем диапазоне  $0 \leq \text{Bo}_m \leq 1$  различие между длинами волн наиболее быстро растущих гармоник  $\lambda_*^0$  составляет менее 2%. При этом для тонкого слоя

$$\lambda_*^0 = 2\pi a \sqrt{\frac{2}{1 - \text{Bo}_m}}. \quad (34)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости нормированной величины  $\lambda_*/\lambda_*^0$  от магнитного числа Бонда при различных  $\sigma$ , построенные с использованием формулы (34) после решения уравнения (33). Из графиков видно, что в случае контактирующих между собой несмешивающихся феррожидкостей одинаковой вязкости, окружающих токнесущий проводник радиуса  $a$ , в результате капиллярного распада слоя образуются более крупные капли, чем это имеет место при тех же  $\text{Bo}_m$ ,  $a$  в случае слоя невязкой феррожидкости, окруженной газом. Указанное различие в размерах капель

наиболее ярко проявляется при малых  $\text{Bo}_m$ , причем с ростом относительной толщины слоя оно усиливается.

Сравнение графиков на рис. 2 с аналогичными графиками [7], построенными для случая вязкой феррожидкости, окруженной невязкой жидкостью, имеющей одинаковую плотность с феррожидкостью, свидетельствует, что физический механизм влияния толщины слоя на характерный размер капель в первую очередь связан с условием прилипания (8) жидких частиц на поверхности проводника, тогда как касательные напряжения на границе раздела жидкостей играют второстепенную роль.

## Заключение

С использованием модифицированного уравнения движения, учитывающего явным образом воздействие капиллярных сил, локализованных на слабodeформированной цилиндрической поверхности раздела несмешивающихся феррожидкостей одинаковых плотностей и вязкостей, сформулирована осесимметричная задача о капиллярной неустойчивости первоначально цилиндрической конфигурации, состоящей из двух феррожидкостей различных магнитных восприимчивостей, окружающих длинный токнесущий проводник. Выведено дисперсионное соотношение и найден его корень, описывающий предельный режим развития неустойчивости, когда в общем балансе инерционных, вязких, капиллярных и магнитных сил вклад инерционных сил мал по сравнению с вкладом вязких сил.

Получено уравнение кривой нейтральной устойчивости и представлена область устойчивости в плоскости параметров: магнитное число Бонда  $\text{Bo}_m$  — безразмерное волновое число  $\kappa$ . Показано, что при малых  $\text{Bo}_m$  толщина первоначально цилиндрического слоя феррожидкости, заключенного между поверхностью проводника и поверхностью раздела феррожидкостей, оказывает заметное влияние на характерный размер капель, образующихся в результате капиллярного распада слоя. По сравнению с изученным ранее капиллярным распадом слоя невязкой феррожидкости, покрывающего токнесущий проводник и окруженного снаружи газом, в рассматриваемом случае формируются более крупные капли.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00694).

## Список литературы

- [1] Бойсь Ч.В. Мыльные пузыри. Издание Л.Ф. Пантелеева. СПб., 1894. 134 с.
- [2] Goren S.L. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. Pt 2. P. 309–319.
- [3] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // ДАН БССР. 1979. Т. 23. № 4. С. 341–343.
- [4] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 3–8.

- [5] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [6] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [7] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 16–25.
- [8] *Баренблатт Г.И., Черный Г.Г.* // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 784–793.
- [9] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [10] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 22–32.
- [11] *Stone H.A., Brenner M.P.* // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 318. P. 373–374.
- [12] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [13] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
- [14] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
- [15] *Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* М.: Мир, 1979. 830 с.