

01;07

Анализ колебательных процессов в лазерах с помощью метода обобщенных собственных функций

© В.Ю. Петрунькин, Б.В. Львов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: borislvov@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 13 октября 2003 г.)

Метод обобщенных собственных функций, используемый в теории дифракции, применен для анализа некоторых стационарных и узкополосных нестационарных процессов в лазерах. Это помогло избежать трудностей традиционного частотного метода, связанных с интегрированием по непрерывному спектру собственных функций излучающей системы. Метод использует разложение по модам, ортогональным внутри активной среды. При этом исключается проблема экспоненциального роста моды на бесконечности. Кроме того, обобщенные собственные функции в ряде важных случаев лучше описывают распределение поля в активной среде лазера.

Метод обобщенных собственных функций был создан для решения стационарных задач дифракции [1]. Предварительные результаты применения метода в теории лазеров были опубликованы в работах [2,3]. Метод также использовался для исследования динамических процессов в антеннах [4,5]. Его основное достоинство — возможность анализа излучающих систем без интегрирования по непрерывному спектру излучения. Используя в качестве собственных чисел значения какого-либо внутреннего параметра системы вместо частоты, можно разложить электромагнитное поле по собственным функциям, ортогональным внутри активной среды. Тем самым устраняется проблема роста собственных функций на бесконечности для систем с активным усилением и потерями на излучение. Ранее метод был использован нами для анализа динамики колебательных процессов в антенне с диэлектрическим резонатором [6]. В данной работе описано применение метода обобщенных собственных функций для нахождения распределения поля в резонаторе лазера с активной средой в виде

плоскопараллельного слоя. К таким системам относятся полупроводниковые лазеры, активные волноводы в интегральной оптике, некоторые твердотельные лазеры на стеклах и кристаллах. Кроме того, исследованы вопросы динамики формирования моды излучения в резонаторе лазера.

Рассмотрим вкратце постановку задачи. Подробное изложение метода обобщенных собственных функций для стационарных задач можно найти в книге [1], а для нестационарных — в работе [2].

Предполагается, что активный слой лазера представляет собой плоскопараллельную пластинку, расположенную в вертикальной плоскости (рис. 1). Излучение распространяется по оси z . Два зеркала, перпендикулярные оси z , имеют координаты $z = 0$ (полностью отражающее зеркало) и $z = L$ (зеркало с коэффициентом отражения Γ по амплитуде). Толщина слоя по оси x равна $2a$, причем a много меньше L . Размер пластины по вертикальной оси y намного превосходит L и a и считается бесконечно большим, т.е. реально рассматривается плоская задача. Диэлектрические проницаемости пластины ϵ_1 и окружающей среды ϵ_2 могут быть комплексными величинами. Магнитную проницаемость μ будем считать равной единице везде. Длина волны излучения в вакууме обозначается λ и при расчете принята равной $1 \mu\text{m}$.

Распределение электромагнитного поля в такой системе (см., например, [7,8]) может быть разделено на два типа волн: TE - и TM -волны. Мы ограничимся случаем TE -волн, так как решения для обоих типов мало отличаются друг от друга. Магнитное поле H в этом случае имеет составляющие, направленные по осям x и z , а электрическое поле E направлено по оси y . Примем

$$H_x(x, z, t) = H_x(x, z) \exp(j\omega t),$$

$$H_z(x, z, t) = H_z(x, z) \exp(j\omega t),$$

$$E_y(x, z, t) = E_y(x, z) \exp(j\omega t).$$

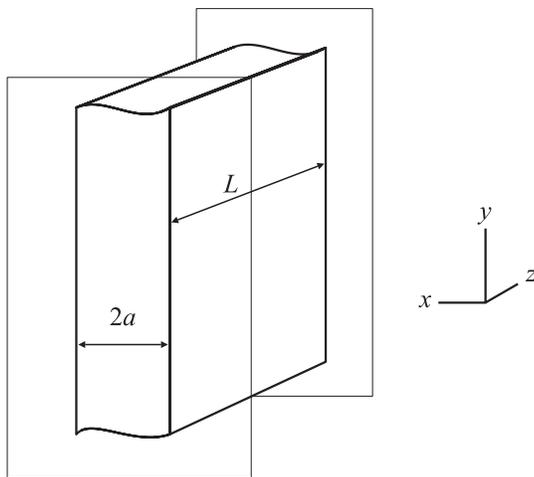


Рис. 1.

Уравнения для компонентов полей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k^2(x) - \gamma^2)E_y &= 0, \\ H_z &= -\left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\right)\frac{\partial E_y}{\partial x}; \\ H_x &= \left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\right)\frac{\partial E_y}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — комплексная постоянная распространения в направлении z , которую надо найти; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Нз/м.

В дальнейшем, следуя процедуре, изложенной в [1–3], мы будем искать решение для электрического поля в виде суммы

$$E_y = \sum b_n E_{yn}$$

по модам, каждая из которых по отдельности удовлетворяет уравнениям (1) и следующим граничным условиям. Касательные составляющие магнитного и электрического полей непрерывны при $x = \pm a$. Вдоль оси z волна распространяется по закону $\exp(-i\gamma z)$ от $z = 0$ до $z = L$, затем отражается от зеркала с коэффициентом отражения по амплитуде $|\Gamma| < 1$ и движется обратно до $z = 0$ по закону $\exp(i\gamma z)$. Электрическое поле $E = 0$ при $z = 0$. На бесконечности поля удовлетворяют условиям ограниченности. Примем в активной среде [1]

$$k(x) = k\sqrt{\varepsilon_n},$$

а вне ее

$$k(x) = k\sqrt{\varepsilon_2},$$

где $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ — волновое число; ε_n — собственные числа, т.е. такие значения ε_1 , для которых выполняются уравнения (1) и граничные условия.

В методе обобщенных собственных функций ε_n считается комплексным собственным числом для данного номера моды n , а частота — вещественной величиной.

С учетом граничных условий решение системы уравнений (1) для электрического поля имеет вид [8]

$$\begin{aligned} E_y(x, z) &= AE_n(x)[\exp(i\gamma z) - \exp(-i\gamma z)], \\ \exp(2i\gamma L) &= -\Gamma, \\ E_n(x) &= \cos(ux/a), \quad -a < x < a, \\ E_n(x) &= \cos(u) \exp[-q(x-a)/a], \quad x > a, \\ E_n(x) &= \cos(u) \exp[q(x+a)/a], \quad x < -a. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины u/a и q/a — постоянные распространения излучения по оси x внутри активной среды и вне ее соответственно. Они находятся из условий непрерывности электрического и магнитного полей при $x = a$ и $x = -a$. Справедливы следующие соотношения [8]:

$$\begin{aligned} q &= utgu, \\ \gamma^2 &= k^2\varepsilon_n - (u/a)^2 = k^2\varepsilon_2 + (q/a)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Если представить γ в виде $\gamma = \beta + i\alpha$, то из граничных условий получим $\beta = \pi n/L$, $\alpha = -\ln|\Gamma|/2L$, ($\Gamma < 0$), где n — номер моды, так что импедансное граничное условие при $z = L$ вместе с номером моды определяют комплексную постоянную распространения γ полностью.

Последующие шаги подробно описаны в [2] и [3], так что мы лишь подытожим результаты. Преобразовав уравнения (3) к виду

$$\begin{aligned} u^2 + q^2 &= k^2 a^2 \varepsilon_n, \\ (u/a)^2 &= k^2 \varepsilon_n - \gamma^2, \\ (q/a)^2 &= \gamma^2 - k^2 \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (4)$$

мы численно решаем систему уравнений (4) и находим комплексные величины u и q , а также комплексные собственные числа

$$\varepsilon_n = \varepsilon'_n + i\varepsilon''_n.$$

В лазерных задачах обычно рассматривается генерация на частоте усиления активной среды ω , так что $\varepsilon'_n \approx \varepsilon_1$. Это условие позволяет найти номер продольной моды n . Уравнения (4) дают собственные числа ε_n как функцию круговой частоты ω , так что (1) и (2) совместно с (4) определяют собственные функции, т.е. конфигурацию моды $E_n(x, z)$, упоминаемую, например, в [7] как $U_n(z)$.

В качестве примеров применения метода обобщенных собственных функций в теории лазеров нами был проведен расчет некоторых лазерных характеристик. На рис. 2,а приведен результат моделирования конфигурации моды активного слоя, близкого к активному слою полупроводникового лазера. Длина слоя по оси z принята равной 1 мм, толщина по оси x равна $20 \mu\text{м}$, величина диэлектрической проницаемости ε_1 внутри активной зоны примерно на 0.02% выше, чем ε_2 окружающей среды ($\varepsilon_2 = 3.6$). Коэффициент отражения по амплитуде 0.6 (36% по интенсивности). По вертикальной оси отложена огибающая распределения электрического поля моды в относительных единицах. На рисунке ясно видно, что излучение занимает область примерно втрое больше активного слоя, т.е. ширина оптического волновода больше ширины активной области, что характерно для полупроводниковых лазеров на гомоструктурах.

Распределение поля по оси x определяется из (2). Что касается изменения поля вдоль продольной оси резонатора z , то на рис. 2,а представлена лишь его огибающая. В действительности интерференция падающей и отраженной от зеркала волн вызывает осцилляции поля с пространственным периодом примерно равным половине длины волны излучения. На рис. 2,б мы попытались изобразить распределение поля вдоль оси z при $x = 0$. В качестве примера рассматривается поле того же лазера, что и на предыдущем рисунке, но для наглядности период осцилляций увеличен в 100 раз, а

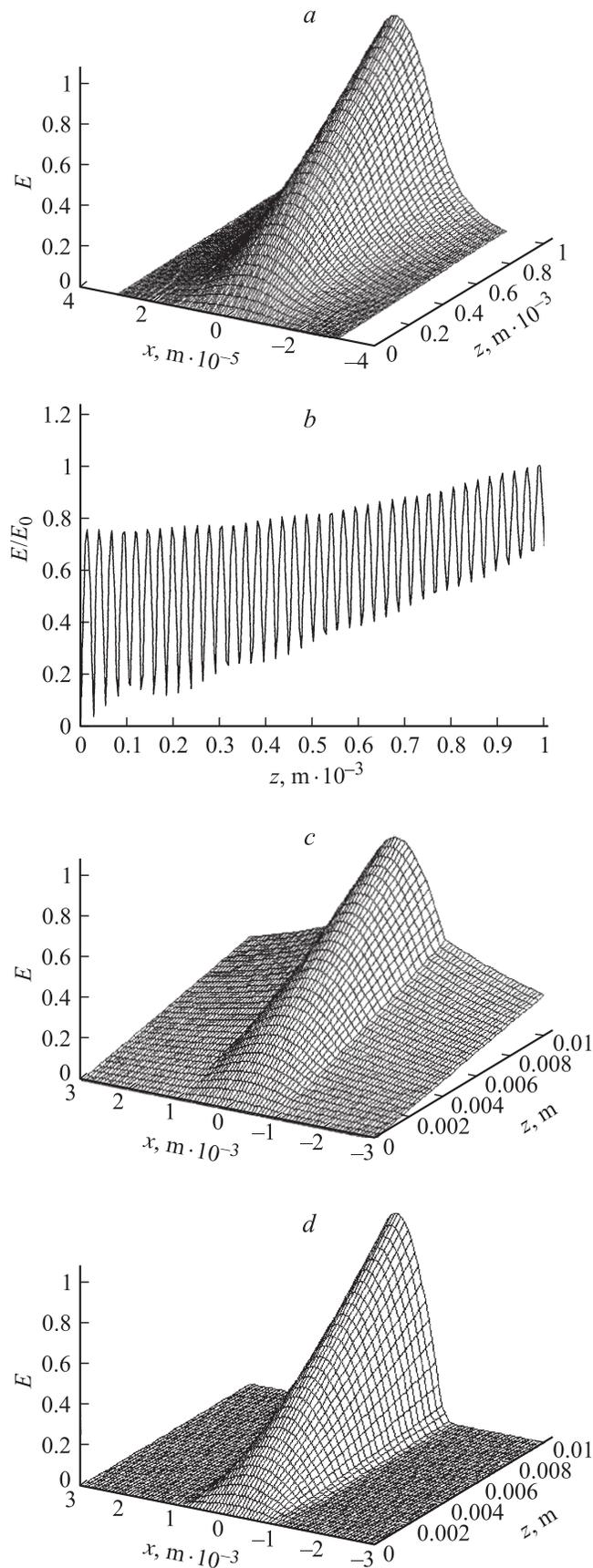


Рис. 2.

коэффициент отражения зеркала уменьшен с 0.6 до 0.2. На рис. 2, *b* видно, что по мере удаления от глухого зеркала ($z = 0$) среднее поле увеличивается, а амплитуда осцилляций уменьшается. Интересным является случай, когда $\epsilon_1 - \epsilon_2 = 0$, т.е. отсутствует ограничение излучения за счет полного отражения. В этом случае в обычном частотном методе моды ввести нельзя. Ограничение поля связано только с усилением. На рис. 2, *c* и *b* показаны два распределения поля в световоде длиной 1 см и толщиной $20 \mu\text{m}$ с $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, но с различным усилением. На рис. 2, *c* представлен случай, соответствующий коэффициенту отражения от зеркала 0.99 (логарифмический инкремент α равен 0.005 1/cm), в то время как на рис. 2, *d* приведен световод с коэффициентом отражения от зеркала 0.2 ($\alpha = 0.8 \text{ 1/cm}$). Видно, что при наличии большого усиления распространение излучения по поперечной оси x сильно ограничивается.

Метод обобщенных собственных функций может применяться в теории лазеров и для решения динамических задач. Обобщение метода на случай узкополосных нестационарных процессов подробно описано в [2,3]. В частности, в [3] с использованием метода медленно меняющихся амплитуд получено дифференциальное уравнение для комплексных амплитуд мод лазерного излучения $B_n(t)$ в форме, близкой к лэмбовским уравнениям теории лазеров [7],

$$\frac{dB_n}{dt} + i(\omega_n - \omega)B_n = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_n(k)} \frac{i(\omega - \omega_n)}{k^2} \times \int_{v^+} E_n(x, z) f dx dz. \quad (5)$$

Смысл уравнения (5) легко объясняется с помощью полуклассической теории лазеров. B_n фактически есть комплексная амплитуда моды $E_n \exp(i\varphi_n)$, угловая частота генерации $\omega = kc$ предполагается близкой к центру спектральной линии активной среды ω_p . Роль f в полуклассической теории играет член $\partial^2 P / \partial t^2$, приближенно равный $-\omega^2 P$, где P — поляризация среды. Объем v^+ есть объем активной среды. Это значит, что интеграл в (5) представляет собой член $P_n(E_n)$ в амплитудных и фазовых уравнениях [7]. В отличие от вещественной круговой частоты ω величины ω_n комплексные. Они определяются через собственные числа ϵ_n соотношением $(\omega_n/c)^2 = k^2 \epsilon_n$.

Разделяя (5) на вещественную и мнимую часть, мы приходим к уравнениям для амплитуд и фаз мод в [7].

В качестве примера расчета динамических процессов численно решена система дифференциальных уравнений вида (5) для случая генерации одной и двух продольных мод в лазере с доплеровским уширением линии усиления. Параметры среды выбраны близкими к параметрам гелий-неонового лазера с длиной волны $0.63 \mu\text{m}$, рассмотренного в [7]. Ширина линии 1.5 GHz , однородное уширение уровней $\gamma_a = \gamma_b = 50 \text{ MHz}$, $\gamma_{ab} = 100 \text{ MHz}$.

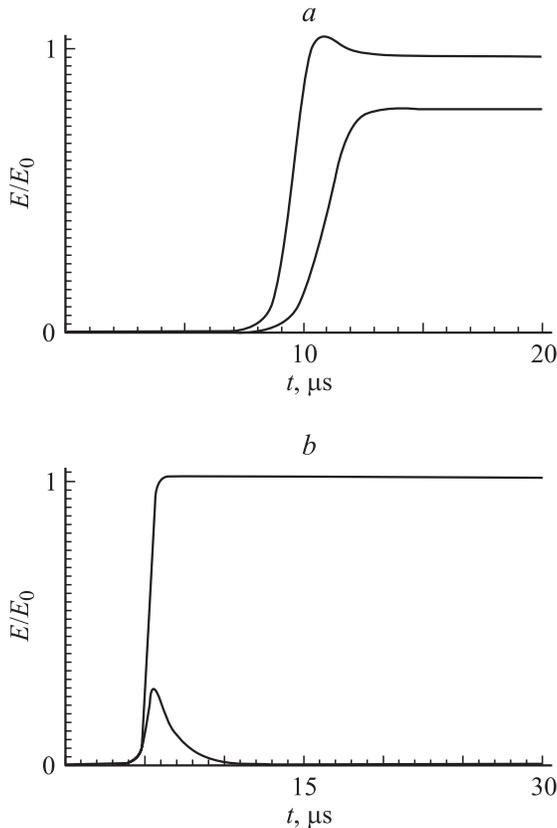


Рис. 3.

Рассматривается плоский лазерный резонатор с длиной $L = 20$ см и шириной $2a = 2$ мм, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$. Коэффициент отражения зеркала $\Gamma = 0.99$. При этих параметрах резонатора частотный интервал между соседними продольными модами равен примерно 750 МГц, что значительно больше величин γ_a , γ_b и γ_{ab} . Последнее обстоятельство позволяет при определении поляризации среды применять приближенные методы полуклассической теории лазеров. Как известно из [7], в этом случае уравнения для амплитуд мод E_1 и E_2 в двухмодовом режиме приводятся к виду

$$\begin{aligned} dE_1/dt &= \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \theta_{12} E_1 E_2^2, \\ dE_2/dt &= \alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2^3 - \theta_{21} E_2 E_1^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При вычислении коэффициентов α , β и θ использовались формулы полуклассической теории из [7]. Следует, однако, подчеркнуть что используемая нами в этих формулах конфигурация моды $E_n(x, z)$, определяемая из уравнения (2), существенно отличается от используемой в [7]. В этом состоит отличие метода обобщенных собственных функций от стандартного частотного метода, где в качестве собственных чисел используются частоты мод.

На рис. 3, *a*, *b* приведены результаты расчета по формулам (5) и (6) динамики нарастания мод в активной среде с усилением, превышающим порог генерации

в 1.3 раза. На рис. 3, *a* приведена картина развития двухмодового режима в случае слабой связи между модами (расстройка центральной моды относительно центра линии усиления равна четверти межмодового интервала)

$$\beta_1 \beta_2 \approx 22 \theta_{21} \theta_{12}.$$

На рис. 3, *b* показан тот же процесс в случае сильной связи

$$\beta_1 \beta_2 = \theta_{21} \theta_{12}.$$

Видно, что при сильной связи одна из мод подавляет другую. Результат этот известен из теории лазеров, но нами был рассмотрен случай равного усиления для обеих мод (симметричное расположение относительно центра линии). Стандартная полуклассическая теория в этом случае не может указать, которая из мод будет подавлена. В нашем же случае различная конфигурация мод в резонаторе обусловила разные потери и мода с большими потерями была подавлена. Для наглядности на рис. 3, *b* вертикальный масштаб для подавляемой моды увеличен в 100 раз.

Таким образом, при анализе динамических процессов в лазерах методом обобщенных собственных функций можно использовать рекомендации теории лазеров, например теории Лэмба [7], но конфигурации мод будут отличаться от классических. Их зависимость от x и z ближе к реальной картине поля в лазерном резонаторе, и они не возрастают неограниченно на бесконечности.

Проведенное исследование и численные расчеты подтвердили возможность применения метода обобщенных собственных функций для анализа как стационарных, так и медленно меняющихся нестационарных процессов в лазерах. По сравнению с прямыми методами исследования динамики лазерного излучения во времени данный метод достаточно прост и не требует применения сложных компьютеров для громоздких расчетов. Использование различных параметров среды в качестве собственных чисел дает возможность варьировать метод в разных задачах, а разложение по модам, ортогональным в активной среде, позволяет избежать громоздкого интегрирования и корректно избавиться от неограниченного нарастания собственных функций на бесконечности.

Список литературы

- [1] *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
- [2] *Lvov B., Petrunkin V.* // Generalized Eigenfunction Method for Radiative Systems. Proc. Intern. Conf. on Electronics, Circuits and Systems. ICECS. Amman (Jordan), 1995. P. 513–516.
- [3] *Петрунькин В.Ю., Львов Б.В.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 6. С. 46–49.
- [4] *Lvov B.V., Suleiman M.M.* // Generalized Eigenfunction Method in Antenna Design. IWTS'97. Malaysia, 1997. P. 52–54.

- [5] *Lvov B., Petrunkin V.* // Dynamic Behavior of Dielectric Resonator Antennas. ICECS 2001. Malta, 2001. P. 341–344.
- [6] *Lvov B., Petrunkin V., Ata O.* // Dynamic Behavior of Cylindrical Dielectric Antennas in High Data Rate Communication Systems. SCI 2002. Orlando (Florida, USA), 2002.
- [7] *Sargent M., Scully M., Lamb W.* // Laser Physics. Readings. New York, 1974. P. 96–114.
- [8] *Kapany N.S., Burke J.J.* Optical Waveguides. New York; London: Academic press, 1972.