

01;07

Локализация световой энергии последовательности фемтосекундных импульсов в одномерном нелинейном фотонном кристалле

© В.А. Трофимов, Е.Б. Терешин, М.В. Федотов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119899 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 5 марта 2003 г. В окончательной редакции 27 октября 2003 г.)

На основе компьютерного моделирования продемонстрирована возможность накачки одномерного нелинейного фотонного кристалла (слоистой одномерной периодической структуры) световой энергией (ее локализации внутри фотонного) кристалла при воздействии последовательности фемтосекундных импульсов. Моделирование проводится на основе предложенного авторами подхода к рассматриваемому классу задач. Данный эффект может быть использован для хранения и записи информации в трехмерных оптических устройствах памяти.

Введение

Как известно, взаимодействие фемтосекундных импульсов с фотонными кристаллами представляет большой практический интерес, в частности, для задач передачи информации в волоконно-оптических системах связи. В литературе (см., например, [1,2]) известны различные нелинейно-оптические эффекты (например, формирование солитонов, оптические переключатели и т.д.), предложенные на основе фотонных кристаллов, которые перспективны для создания оптических процессоров и хранения информации в трехмерных оптических устройствах памяти. В связи с последней проблемой представляет практический интерес возможность накачки нелинейного фотонного кристалла (ФК) световой энергией, т.е. ее локализации внутри кристалла. Именно это явление для одномерного фотонного кристалла проанализировано в настоящей работе на основе компьютерного моделирования, которое проведено с использованием предложенного в [3,4] подхода к математическому моделированию данного класса задач. Выполненные в [4] расчеты показали, что этот подход, основанный на отказе от выделения направления распространения световой волны, при компьютерном моделировании дает качественно и количественно более точный результат по сравнению с аналогичными результатами, полученными на основе традиционного подхода. Следует также подчеркнуть, что подобная проблема рассматривалась в недавно выполненной работе [5] применительно к дискретной решетке, т.е. анализ выполнен на основе дискретной модели.

1. Постановка задачи

Распространение светового импульса в одномерном фотонном кристалле с кубической нелинейностью описывается следующим волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{n^2(z)}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{nl}}{\partial t^2},$$

$$P_{nl} = \varepsilon_{nl} |E|^2 E, \quad 0 < t < L_t, \quad 0 < z < L_z. \quad (1)$$

Здесь $E(z, t)$ — напряженность электрического поля; z — координата, вдоль которой распространяется световой импульс; L_z — длина среды; $n(z)$ — ее показатель преломления; t — время; L_t — рассматриваемый промежуток времени, на котором анализируется распространение светового импульса; c — скорость света; ε_{nl} — нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости.

Для записи уравнения относительно медленно меняющейся во времени комплексной амплитуды $A(z, t)$ представим напряженность электрического поля и добавку к диэлектрической проницаемости в виде

$$E(z, t) = 0.5(A(z, t)e^{-i\omega t} + \text{к.с.}),$$

$$P_{nl} = 0.5\varepsilon_{nl}|A|^2(A(z, t)e^{-i\omega t} + \text{к.с.}),$$

где к.с. означает комплексно-сопряженное слагаемое.

Предполагая линейную связь между волновым числом k и частотой света ω , как это принято в литературе [2] для данного класса задач, и сохранив для удобства прежние обозначения координат, из волнового уравнения для описания процесса распространения фемтосекундного импульса в периодической нелинейной среде получим следующее уравнение Шредингера [3], записанное ниже в безразмерных переменных:

$$\varepsilon(z) \frac{\partial A}{\partial t} + iD \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + i\beta(\varepsilon(z) + \alpha(z)|A|^2)A = 0. \quad (2)$$

В (2) введены следующие параметры:

$$D = -\frac{1}{4\pi\Omega}, \quad \beta = -\pi\Omega, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{str}}}, \quad L = \frac{L_z}{\lambda_0}, \quad (3)$$

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq L_0, \\ \varepsilon_1, & L_0 + (d_1 + d_2)(j-1) \leq z \leq L_0 + d_1 \\ & + (d_1 + d_2)(j-1), \quad 1 < j < N_{\text{str}} + 1, \\ \varepsilon_2, & L_0 + d_1 + (d_1 + d_2)(j-1) \leq z \leq L_0 \\ & + (d_1 + d_2)j, \quad 1 < j < N_{\text{str}}, \\ \varepsilon_3, & L_0 + (d_1 + d_2)N_{\text{str}} + d_1 \leq z \leq L, \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq L_0, \\ \alpha_1, & L_0 + (d_1 + d_2)(j - 1) \leq z \leq L_0 + d_1 \\ & + (d_1 + d_2)(j - 1), \quad 1 < j < N_{\text{str}} + 1, \\ \alpha_2, & L_0 + d_1 + (d_1 + d_2)(j - 1) \leq z \leq L_0 \\ & + (d_1 + d_2)j, \quad 1 < j < N_{\text{str}}, \\ 0, & L_0 + (d_1 + d_2)N_{\text{str}} + d_1 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, фотонный кристалл начинается со слоя с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и им же заканчивается. После него идет подложка с диэлектрической проницаемостью ϵ_3 . Необходимо подчеркнуть, что единичное значение диэлектрической проницаемости соответствует одной из двух ситуаций: либо в качестве слоя (подложки) используется воздух, либо остальные диэлектрические проницаемости измеряются в единицах диэлектрической проницаемости данного слоя. Выше ω_{str} — частота периодической структуры, определяемая как $\omega_{\text{str}} = 2\pi c/\lambda_0$, $\lambda_0 = d_1\sqrt{\epsilon_1} + d_2\sqrt{\epsilon_2}$. Параметры d_1, d_2 и ϵ_1, ϵ_2 — соответственно толщины и диэлектрические проницаемости слоев; N_{str} — их число. Параметр ϵ_3 обозначает диэлектрическую проницаемость подложки, которая располагается за слоистой структурой; L_0 — безразмерное расстояние от источника оптического излучения до ФК; L — нормированная длина рассматриваемой области, включающей расстояние до ФК, длину слоистой структуры и длину подложки. Параметры α_1 и α_2 характеризуют кубичную нелинейность слоев структуры.

В работе рассматривается отрезок времени, в течение которого световой импульс не успевает дойти до границ области по пространственной координате z . Поэтому начальные и граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$A|_{z=0} = A_0(z)e^{i2\pi\Omega z}, \quad A|_{z=0,L} = 0. \quad (6)$$

При воздействии гауссова импульса распределение комплексной амплитуды $A_0(z)$ в области до ФК имеет следующий вид:

$$A_0(z) = \exp\left(-\frac{(z - L_c)^2}{a^2}\right), \quad (7)$$

где L_c — положение центра отдельного импульса, a — пространственный размер пучка, который в данном случае равен длительности импульса.

Задача (2), (6) обладает инвариантами [3], которые использовались для построения консервативных разностных схем, сохраняющих разностные аналоги этих инвариантов в процессе расчетов. Данный подход гарантирует отсутствие погрешности в вычислениях, связанных с неудачно выбранной схемой. Однако учитывая сложный характер взаимодействия светового импульса с ФК, для контроля получаемых результатов необходимо проводить вычисления на последовательности сеток с уменьшающимися шагами. При отсутствии зависимости формы импульса от шагов сетки обеспечивается верное спектральное распределение сеточного решения.

В заключение этого раздела отметим, что приведенные ниже результаты выполнены для следующих безразмерных длин слоев:

$$d_1 = 0.2, \quad d_2 = 0.6. \quad (8)$$

Выбор именно этих значений обусловлен их примерным соответствием физическим значениям, приведенным в [2,6], для длины волны оптического излучения 780 nm. Заметим, что фиксирование значений d_1, d_2 не ограничивает общности полученных результатов, так как при их изменении описанные в последующих разделах явления будут иметь место для других значений соответствующих параметров, что подтверждалось проведенным численным моделированием. Параметр L_0 выбирался таким образом, чтобы световой импульс полностью располагался до ФК и в начальный момент не достигал его первого слоя.

2. Влияние нелинейности ФК и длительности импульса на области отражения и пропускания ФК

Поскольку физическая основа локализации световой энергии в ФК может быть обусловлена рядом причин (в частности, самофокусировкой светового импульса в отдельном слое, сдвигом частотной области прозрачности ФК и т.д.) в настоящем разделе представлены иллюстрации зависимости области пропускания и отражения световой энергии, падающей на ФК, от длительности импульса и параметра нелинейности. С этой целью на рис. 1 сплошной кривой показана R — доля отраженной от линейного ФК энергии падающего импульса ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) при его длительности $a = 20$. Как видно, для частот $1.85 \leq \Omega \leq 1.91$ происходит полное

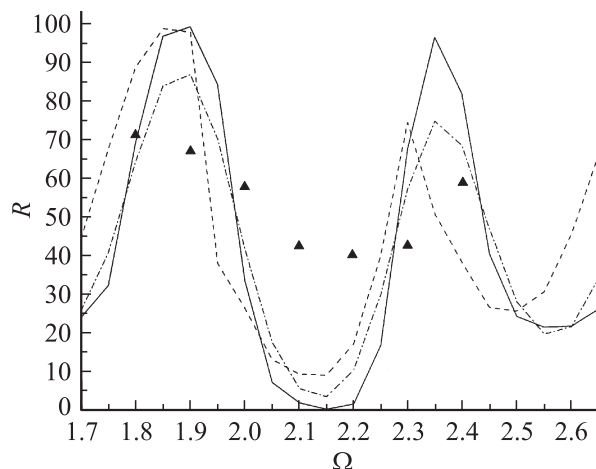


Рис. 1. Доля отраженной энергии от линейного ФК при падении на него импульса длительностью $a = 20$ (сплошная кривая), 10 (штриховая) и от слабонелинейного ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.25$) (штрихпунктир), сильнонелинейного ФК ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$) (треугольники) при падении на него импульса длительностью $a = 20$ в зависимости от параметра Ω .

отражение световой энергии при воздействии длинного светового импульса, а при $2.11 \leq \Omega \leq 2.16$ имеет место прозрачность кристалла. Следующие параметры оставались неизменными $\varepsilon_1 = (2.3)^2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, $N_{\text{str}} = 10$. Значения ε_1 являются, в частности, диэлектрической проницаемостью ZnS [6]. Необходимо заметить, что проведенное компьютерное моделирование эксперимента [6] показало полное совпадение подобной кривой с экспериментальной, что говорит о высокой точности расчета.

Пунктиром представлена аналогичная зависимость энергии для более короткого падающего на него импульса ($a = 10$). Хорошо видно, что в этом случае для частот $1.85 \leq \Omega \leq 1.91$ доля отраженной энергии достигает лишь значения 86.9%, а при $2.11 \leq \Omega \leq 2.16$ не опускается ниже 3.8%. Таким образом, для короткого импульса уже не существует зон полного отражения и полного пропускания. Это связано с тем, что ФК перестает восприниматься импульсом как единая структура и импульс начинает взаимодействовать с каждым слоем ФК отдельно.

Штрихпунктир соответствует падению длинного светового импульса ($a = 20$) на слабо нелинейный ФК ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0.25$). Заметим, что минимальное значение доли отраженной от ФК энергии в этом случае еще выше и достигает 9%. Это связано с тем, что при самофокусировке импульса он разбивается на короткие субимпульсы, для которых в свою очередь доля прошедшей энергии в области прозрачности длинного импульса уменьшается. Подчеркнем, что в этом случае эффект локализации отсутствует.

При увеличении интенсивности падающего оптического импульса, например при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$ (на рис. 1 этому режиму соответствуют треугольники), построение подобного графика затруднительно, так как проявляется эффект локализации световой энергии в ФК. В силу его зависимости также и от частоты оптического излучения доля локализованной энергии различна для разных Ω . Кроме этого, локализованный световой импульс по-разному влияет на доли отраженной и прошедшей энергии для разных Ω . Тем не менее можно видеть, что доля отраженной энергии существенно снижается по сравнению со случаем падения длинного импульса на ФК.

3. Локализация световой энергии одиночного импульса

С целью регистрации описанного в данной работе эффекта исследовалось влияние длительности импульса при его постоянной либо входной интенсивности, либо энергии на локализацию части световой энергии падающего на ФК импульса. Проведенное компьютерное моделирование показало, что при постоянной энергии падающего импульса локализация происходит тем эффективнее, чем меньше длительность импульса (соответственно больше интенсивность). В качестве подтверждения этого в табл. 1 приведены пиковые интенсивно-

Таблица 1. Зависимость интенсивности локализованного импульса от длительности падающего на ФК импульса при его постоянном значении энергии для параметров $\varepsilon_1 = (2.3)^2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = (1.3)^2$, $N_{\text{str}} = 7$, $\Omega = 2.14$, $\beta = -6.73$, $D = -0.037$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 5$

Характеристики падающего на ФК импульса		Интенсивность локализованного субимпульса (номер слоя ФК)
a	$\max A(z, 0) ^2$	
25	1	1.4 (6-й) и 1 (8-й)
39	0.54	0.7 (8-й)
100	0.25	Локализации нет

сти локализованных в ФК субимпульсов в зависимости от его входных параметров. При коротком импульсе ($a = 25$) локализация импульсов наблюдается в 6-м и 8-м слоях ФК с их максимальными интенсивностями 1.4 и 1 соответственно. При длительности $a = 39$ (вторая строка в табл. 1) локализация наблюдается лишь в 8-м слое ФК с пиковой интенсивностью 0.7. А уже при импульсе длительностью $a = 100$ (третья строка в табл. 1) эффект локализации отсутствует.

Таким образом, количество локализованной энергии в слоях ФК тем больше, чем больше интенсивность падающего импульса. Из табл. 1 также можно сделать вывод, что существует критическое значение энергии в отдельном нелинейном слое, начиная с которого в нем возможна локализация световой энергии. Если же световой энергии, содержащейся в нелинейном слое недостаточно, то ее локализации не происходит (этому случаю соответствует расчет с интенсивностью 0.25).

В табл. 2 приведены результаты расчетов влияния длительности падающего на кристалл импульса на локализацию части световой энергии в ФК. Они подтверждают вывод о том, что эффект локализации зависит от количества энергии, поступившей в нелинейный слой ФК. Так, при длительности начального импульса, равной 4 (третья строка в табл. 2), поступившей в слой энергии недостаточно для образования локализованного субимпульса, несмотря на то, что интенсивность световой волны возрастает до значения 1.5 в этом слое.

Таблица 2. Зависимость интенсивности локализованного импульса от длительности падающего на ФК начального импульса при его постоянной максимальной входной интенсивности $\max |A(z, 0)|^2 = 1$ для параметров $\varepsilon_1 = (2.3)^2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = (1.3)^2$, $N_{\text{str}} = 7$, $\Omega = 2.14$, $\beta = -6.73$, $D = -0.037$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 5$

Длительность падающего на ФК импульса a	Интенсивность локализованного субимпульса (номер слоя; доля полной энергии начального импульса)
10	3 (8-й слой; 20%)
6	1.5 (8-й слой; 22%)
4	Локализации нет

Важно подчеркнуть, что эффект локализации имеет место даже в области прозрачности линейного ФК при воздействии длинного импульса. Так, проведенное компьютерное моделирование при $\Omega = 2.14$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 5$ показало наличие эффекта локализации во 2-, 4-м и 6-м слоях ФК. При этом доля локализованной в нелинейных слоях световой энергии составила 16, 11 и 4% соответственно от энергии начального импульса, которая определяется как отношение световой энергии в данный момент времени к полной входной световой энергии падающего на ФК импульса

$$\theta_j(t) = \frac{\int_{L_0+(d_1+d_2)j-d_2}^{L_0+(d_1+d_2)j} \varepsilon(z)|A|^2 dz}{I_1(0)},$$

$$I_1(t) = \int_0^{L_0} \varepsilon(z)|A|^2 dz, \quad (9)$$

где j — номер четного слоя; $I_1(0)$ — энергия отдельного светового импульса, который задается в области перед ФК.

Заметим также, что в нелинейной задаче 25% энергии падающего на ФК импульса отражается от кристалла из-за возможного сдвига зоны прозрачности. Также следует подчеркнуть, что и в области полной непрозрачности линейного ФК в нелинейном случае возможна локализация световой энергии в первых слоях ФК.

4. Локализация световой энергии последовательности импульсов

Компьютерное моделирование проводилось для широкого набора безразмерных параметров, в частности для следующих значений параметров: $\varepsilon_1 = (2.3)^2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = (1.3)^2$, $N_{\text{str}} = 7$, $\Omega = 1.88$, $\beta = -5.92$, $D = -0.042$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 5$. Импульсы задаются через промежуток времени Δt (в нашем случае $\Delta t = 20$), такой чтобы отраженная от кристалла и прошедшая через него части светового импульса уже находились вдали от него и не оказывали влияние на процессы, проходящие в ФК. В этот момент времени обнуляются значения комплексной амплитуды в области перед ФК и за ним и задается новый импульс по формулам (6), (7). Для наглядности на вставке к рис. 2 представлено начальное распределение интенсивности светового импульса в области до ФК, которое задавалось в моменты времени $t = p\Delta t$, где p — целое и $0 \leq p \leq 3$.

В качестве иллюстрации обнаруженного эффекта на рис. 2 представлена динамика доли локализованной световой энергии в слоях ФК (в нашем случае во 2-, 4-, 6-м и 8-м слоях) в зависимости от момента времени t . Нетрудно видеть, что часть энергии первого импульса (в процентном соотношении к его полной энергии 19 и 9% соответственно) локализуется во 2-м и 4-м слоях ФК. В слоях с нечетными номерами (слои с дефокусирующей нелинейностью) локализации световой энергии

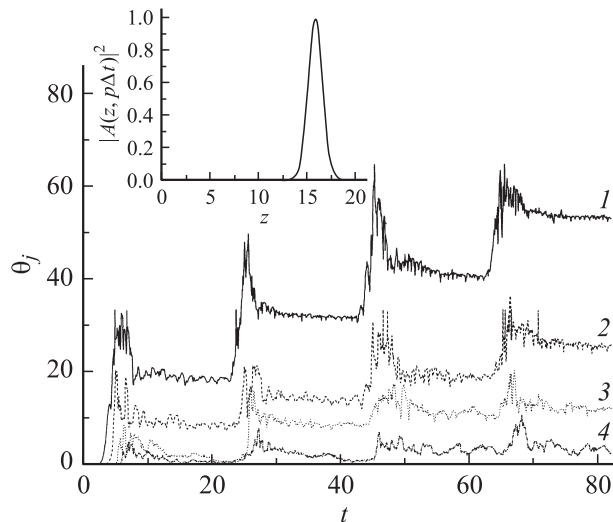


Рис. 2. Эволюция доли локализованной оптической энергии во 2- (1), 4- (2), 6- (3) и 8-м (4) слоях ФК. На вставке — начальное распределение интенсивности одного из повторяющихся через Δt безразмерных единиц последовательности четырех импульсов.

не происходит, и со временем оптическое излучение уходит из них. Заметим, что локализация световой энергии первоначально характеризуется возникновением в слое высокоинтенсивного (с максимальной интенсивностью, большей 1) импульса, который движется в этом слое, отражаясь от соседних слоев. Сделанный выше вывод о существовании порогового значения энергии импульса, начиная с которого возможно появление такого субимпульса, а следовательно, и эффекта локализации, подтверждает также рис. 2. На нем видно, что в 4-м и 6-м слоях локализация начинается с 9% начальной энергии и сопровождается появлением одного субимпульса внутри этих слоев. Во 2-м же слое 19% локализованной энергии 1-го импульса сопровождается возникновением двух субимпульсов внутри него, причем они различаются в 5 раз по пиковой интенсивности (3 и 0.6 соответственно).

Второй импульс, который падает на ФК спустя промежуток времени Δt , приводит к локализации 13% его энергии во 2-, 5% в 4-м и 9% в 6-м слоях. Вообще говоря, последующие импульсы, падающие на ФК, могут приводить либо к увеличению количества субимпульсов внутри слоев, которые, как правило, различаются не только по пиковой интенсивности, но и по скорости их распространения внутри слоя, либо к увеличению интенсивности уже существующих субимпульсов. Так, в результате воздействия второго импульса на ФК во 2-м слое остаются два импульса, но по интенсивности они становятся практически одинаковы ($\max |A|^2 \approx 4.5$). В 4-м же слое появляется 2-й субимпульс, меньший более чем в два раза по интенсивности (их максимальные значения соответственно равны 1.8 и 0.8), а в 6-м слое формируется первый субимпульс, локализуемый 9% первоначальной энергии 2-го воздействующего на ФК импульса.

Взаимодействие 3-го импульса с ФК приводит к дополнительному увеличению максимальной интенсивности субимпульсов внутри 2-го (до 10 и 5 соответственно) и 4-го слоев (обоих субимпульсов до 2). А результатом воздействия 4-го импульса является появление во 2-м слое еще одного субимпульса. В результате этого интенсивности трех субимпульсов в этом слое становятся равными 11, 5 и 2.5 соответственно. В 4-м же слое увеличивается интенсивность существующих субимпульсов (до 3.5 и 2 соответственно), так же как и в 6-м слое до 2.5. Заметим, что при соответствующем выборе начальной интенсивности импульса увеличение его интенсивности в нелинейном слое ФК более чем на порядок приводит к „пробое“ (разрушению) кристалла. Такие режимы могут быть получены в эксперименте.

При дальнейшем распространении субимпульсов в некоторых слоях (в нашем случае во 2-м слое ФК), локализуя световую энергию, наблюдается слияние двух импульсов с практически одинаковыми скоростями распространения в один, образуя больший по интенсивности и пропорционально ей меньший по скорости распространения импульс. Этот эффект имеет место, когда импульсы подходят к одной границе с соседним слоем практически одновременно.

Следует подчеркнуть, что локализация в более дальних слоях (в нашем случае в 4-, 6-, 8-м и т.д.) зависит не только от поступающей в слой световой энергии воздействующего импульса, но и от самого момента воздействия падающего на ФК импульса. Энергия воздействующего импульса проходит в последующие слои, если он попадает на левую границу (например, 2-го слоя) в момент времени, когда любой локализованный в этом слое субимпульс или находится у этой же границы, или только отразился от нее. При этом взаимодействие с падающим излучением происходит до того, как этот субимпульс достигнет правой границы слоя. Следовательно, они должны распространяться в одном направлении. Если же падающий импульс взаимодействует с движущимся ему навстречу субимпульсом и его энергия в этом слое превосходит пороговое значение, то он будет „захвачен“ субимпульсом, т.е. эта энергия либо частично перейдет в уже существующие субимпульсы, либо появится новый субимпульс.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе описан эффект локализации части энергии последовательности фемтосекундных импульсов в одномерном нелинейном фотонном кристалле и исследованы условия, при которых он происходит. Показано, что локализация носит сложный характер и зависит от момента воздействия очередного импульса на данный слой ФК. Она может сопровождаться как появлением новых субимпульсов в слоях ФК, так и увеличением интенсивности уже локализованных здесь субимпульсов.

Следует также подчеркнуть, что описанные эффекты предъявляют высокие требования к разностным схемам.

Для достижения консервативности в расчетах требуются достаточно мелкая сетка не только по пространственной координате z , что связано с корректным описанием коротких высокоинтенсивных субимпульсов внутри слоев ФК, но и по временной координате t . Также необходимы более жесткие требования для итерационного процесса, что также связано с высокими значениями интенсивности.

Экспериментально эффект локализации может быть зарегистрирован несколькими способами. Измеряя долю прошедшей и отраженной от ФК энергии при изменении длительности или интенсивности падающего на ФК импульса. Такие зависимости позволят обнаружить локализованную часть энергии. Также возможна регистрация разрушения ФК при последовательном воздействии на него несколькими импульсами с интенсивностью каждого, на порядок меньшей, чем соответствующая интенсивность пробоя ФК. Как выше показано, интенсивность локализованных субимпульсов может возрастать в 10 и более раз.

На наш взгляд, обнаруженный в работе эффект локализации световой энергии в отдельном слое (или слоях) нелинейного фотонного кристалла позволяет реализовать трехмерную оптическую память, работающую на данном принципе. В качестве одной из возможных конструкций трехмерного оптического диска можно предложить слоистый диск, у которого в направлении распространения светового импульса чередуются слои с заданными оптическими свойствами (например, линейные и нелинейные слои). В поперечном же направлении в активной части диска чередуются нелинейные (активные) слои и слои, совпадающие по своим оптическим свойствам с неактивным предыдущим и последующим слоями. В этом случае трехмерный оптический диск будет состоять из „колонн“ слоистой периодической структуры (одномерного фотонного кристалла). Как показывают результаты этой работы, можно добиться требуемого уровня локализованной энергии в заданном слое при помощи последовательности воздействия нескольких импульсов, чтобы инициировать, например, химические процессы. Однако этот вопрос требует дополнительного детального исследования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-727).

Список литературы

- [1] *Kivshar Yu.S., Pelinovsky D.E.* // *Phy. Rep.* 2000. Vol. 331. P. 117–169.
- [2] *Scalora M., Dawling F.P., Bowden G.M., Blomer M.J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. N 10. P. 1368–1371.
- [3] *Трофимов В.А.* // *ЖВМиМФ.* 2001. Т. 41. № 9. С. 1458–1462.
- [4] *Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В.* // *ЖВМиМФ.* 2003. Т. 43. № 10. С. 1550–1555.
- [5] *Kivshar Yu.S., Kevrekidis P.G., Takeno S.* // *Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 307. N 5–6. P. 281–286.
- [6] *Balakin A.V., Bushuev B.V., Mantzovoy B.I., et al.* // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 046609.