

01 Хаотический слой маятника при низких и средних частотах возмущений

© В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2003 г.)

Численно и аналитически исследована зависимость амплитуды сепаратрисного отображения и размера хаотического слоя маятника от параметра адиабатичности при низких и средних частотах возмущений. Установлено хорошее соответствие между теорией и численным экспериментом в низкочастотном пределе. Отмечена высокая эффективность использования резонансных инвариантов сепаратрисного отображения в области средних частот. Вместе с уже известной высокочастотной асимптотикой это позволило получить полную картину хаотического слоя во всем диапазоне частот возмущений.

Введение

Взаимодействие нелинейных резонансов и образование динамического хаоса в гамильтоновых системах остается одной из сложных и все еще далеких от полного решения проблем. Во многих случаях задача может быть сведена к исследованию маятника (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные условия), подверженного действию квазипериодического возмущения

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \cos(x) + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(a_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(a_2 x - \Omega_2 t), \quad (2)$$

где амплитуды гармоник $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ считаются малыми. Заметим, что каждая гармоника также является резонансом и может играть роль основного в „своей“ области фазового пространства.

Система (1), (2) изучалась во многих работах (см., например, [1–3]), причем чаще всего главным объектом рассмотрения оказывалась ситуация в окрестности сепаратрис основного резонанса и возникновения хаотического слоя. Мы планируем исследовать основной хаотический слой во всем диапазоне частот возмущений, и уместно напомнить механизм его образования [1]. Удобно начать с описания невозмущенных сепаратрис.

Прежде всего имеется седло — неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может находиться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На фазовой плоскости в окрестности седла образуется характерный крест с двумя проходящими и двумя уходящими траекториями [1, рис. 2.1]. Важно отметить, что на самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих

траекторий для направлений времени вперед и назад соответственно.

В случае аналитического потенциала (что имеет место в (1)) наличие возмущающих резонансов (хотя бы одного!) всегда расщепляет каждую сепаратрису на две ветви („усы“ по образной терминологии Арнольда), которые уже не возвращаются в седло и не совпадают друг с другом, но пересекаются в так называемых гомоклинических точках.¹ Свободные концы этих ветвей образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют узкую область вблизи невозмущенных сепаратрис. Именно они образуют хаотический слой, в котором необходимо различать три части: верхнюю (фаза x вращается сверху $p > 0$), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза x вращается снизу $p < 0$). Определение фактических размеров этих частей слоя, которые при несимметричном возмущении (2) могут быть существенно различными, является важной для практики задачей [8–10].

Формирование основного хаотического слоя для случая симметричного высокочастотного возмущения

$$V(x, t) = \varepsilon \cos\left(\frac{m}{2}x - \Omega t\right) + \varepsilon \cos\left(\frac{m}{2}x + \Omega t\right), \quad (3)$$

$\Omega \gg \omega_0$ и m — целое число, наиболее полно исследовано Чириковым [1].

Используя свойства стандартного отображения и свой критерий перекрытия резонансов он показал, что в этом высокочастотном пределе все три части слоя имеют одинаковый размер

$$w_{ip} = |w_{md}| = w_{bt} = \lambda W, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\lambda = \Omega/\omega_0$ есть так называемый параметр адиабатичности и $w = H(x, p, t)/\omega_0^2 - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

¹ Для систем с гладким потенциалом такое расщепление происходит не всегда. Поразительные факты сохранения сепаратрис целых и дробных резонансов, несмотря на наличие возмущения и сильного локального хаоса в кусочно-линейных системах, приведены и обсуждаются в работах [4–6].

Входящая в (4) величина W является амплитудой гармоники сепаратрисного отображения системы (1), (3) частоты Ω . Это отображение, впервые введенное в работе [7], приближенно описывает динамику системы вблизи сепаратрисы в моменты прохождения ею состояния устойчивого равновесия (см. также [1]).

Теоретическое значение $W = W_T$ связано соотношением

$$W_T(\lambda) = \varepsilon \lambda A_m(\lambda) \quad (5)$$

с введенными в [1] интегралами Мельникова–Арнольда $A_m(\lambda)$. В настоящей работе эти интегралы также используются и для удобства читателя ниже приводятся взятые из [1] определения

$$A_m(\lambda > 0) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \frac{\exp(\pi\lambda/2)}{\operatorname{sh}(\pi\lambda)} (2\lambda)^{m-1} [1 + f_m(\lambda)], \quad (6)$$

$$A_m(\lambda < 0) = (-1)^m A_m(|\lambda|) \exp(-\pi|\lambda|), \quad (7)$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_{m+1} = f_m - (1 + f_{m-1}) \frac{m(m-1)}{4\lambda^2}, \quad (8)$$

$$m \geq 3.$$

Важно подчеркнуть, что при выводе выражений (6)–(8) в [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений и они оказываются справедливыми при любой величине λ из интервала $0 < \lambda < \infty$.

Картина резко и качественно меняется, когда возмущение, оставаясь высокочастотным, становится несимметричным $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Первые же численные эксперименты [8,9] показали, что в спектре сепаратрисного отображения этой системы помимо явно входящих в возмущение (2) частот Ω_1, Ω_2 присутствуют также комбинационные гармоники $\sim \varepsilon_1 \varepsilon_2$ на их сумме $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$ и разности $\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$. Еще более удивительным оказался тот факт, что при определенных условиях именно эти гармоники полностью определяют размер хаотического слоя. В [9] приведен пример, когда вклад вторичной гармоники $\Delta\Omega_+ = 3$ в амплитуду сепаратрисного отображения в несколько сотен раз превысил вклады от первичных гармоник. Возникающее при этом впечатление о том, что слабые первичные гармоники породили мощную вторичную гармонику и на этом их роль в образовании хаоса закончилась, получило в [9] полное численное подтверждение.

В разделе 2 показано, что для низких частот эта особая роль вторичных гармоник полностью исчезает и их влияние сводится к малым и несущественным поправкам. По этой причине в настоящей работе исследуется основной хаотический слой системы (1) с симметричным возмущением (3) при фиксированных значениях частоты малых колебаний $\omega_0 = 1.0$ и возмущения $\varepsilon = 0.01$ (использование других значений этих величин будет специально оговорено). К уже исследованному случаю высокой частоты добавлены средние и низкие частоты, что позволяет получить представление о характеристиках слоя во всем интервале $0 < \lambda < \infty$.

1. Амплитуда сепаратрисного отображения

Известны два основных численных способа отыскания размеров хаотического слоя. В первом из них при длительном счете фиксируется минимальный период движения в исследуемой части слоя $T_{0,\min}$ (T_0 — время между двумя последовательными пересечениями устойчивой фазы $x = \pi$). Энергетический размер этой части находится затем по формуле [1]

$$w = 32 \exp(-\omega_0 T), \quad (9)$$

где в качестве T используется $T_{0,\min}$.

Второй способ предполагает построение сепаратрисного отображения системы

$$\bar{w} = w + W \sin \psi, \quad \bar{\psi} = \psi + \lambda \ln \left(\frac{32}{|\bar{w}|} \right),$$

$$\psi = \Omega T_0 \bmod (2\pi) \quad (10)$$

и его итерации.

Кратко напомним численный алгоритм построения этого отображения (подробности в [8]). Прежде всего на линии симметрии $x = \pi$ с высокой точностью отыскивается центральная гомоклинная точка p_{fb} как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки в исследуемой части слоя выбирается узкий интервал $x = \pi, p_{fb} + \delta p$, из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не набирается требуемое число периодов N . Для каждого периода по формуле (9) вычисляется средняя энергия w . Определяя изменение $\delta w = \bar{w} - w$ энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени T_0 , можно построить сепаратрисное отображение (10) $(\delta w)_k, T_{0,k}, k = 1, 2, \dots, N-1$. Мы будем для определенности всегда исследовать верхнюю часть слоя, размер которой для симметричного возмущения точно равен размеру нижней части $w_{tp} = w_{bt}$. Именно эти внешние части представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и развитии глобального хаоса. Забегая вперед, заметим, что отображение (10) может содержать не одну, а несколько гармоник (раздел 3).

Численные результаты для амплитуды сепаратрисного отображения W_E следует сравнить с теоретическими величинами W_T , вычисленными через интегралы Мельникова–Арнольда по формуле

$$W_T(\lambda) = \varepsilon \lambda S_m(\lambda), \quad (11)$$

где сумма

$$S_m(\lambda) = A_m(|\lambda|) (1 + (-1)^m \exp(-\pi|\lambda|)) \quad (12)$$

учитывает влияние обеих гармоник симметричного возмущения. Из выражений (6), (8) следует, что при значе-

ниях $m \geq 3$ эти интегралы одновременно с множителем в квадратных скобках проходят через нуль при определенных значениях $\lambda = \lambda_0$. Мы используем в качестве примеров интегралы A_2 и A_4 ; первый из них не имеет нуля, а второй имеет его в точке $\lambda_0 = \sqrt{2}$.

2. Низкочастотная асимптотика

На рис. 1 дано сравнение найденных численно $W_E^* = |W_E|/\varepsilon$ и по формуле (11) $W_T^* = |W_T|/\varepsilon$ нормированных значений амплитуд сепаратрисных отображений верхней части хаотического слоя для симметричного возмущения (3) в зависимости от параметра адиабатичности при двух значениях коэффициента $m = 2$ и $m = 4$. Видно, что теоретическая зависимость W_T^* неплохо описывает не только высокочастотную часть $\lambda \gtrsim 5$, подробно исследованную Чириковым, но и область низких частот $\lambda \lesssim 0.1$, где амплитуда оказывается пропорциональна параметру адиабатичности $W_T \sim \lambda$.

Это согласуется с теорией, поскольку входящая в (12) сумма интегралов в низкочастотном пределе $\lambda \rightarrow 0$ стремится к не зависящей от λ постоянной $S_m(\lambda) \rightarrow s_m = \text{const}$

$$s_1 = 2\pi, \quad s_2 = 8, \quad s_3 = 2\pi, \quad s_4 = 32/3, \quad s_5 = 2\pi, \dots \quad (13)$$

а амплитуда (11) приближается к величине $W_T \rightarrow \varepsilon s_m \lambda$. Отображение (10) принимает вид

$$\bar{w} = w + c\lambda \sin \psi, \quad \bar{\psi} = \psi + \lambda \ln\left(\frac{32}{|\bar{w}|}\right),$$

где $c = \varepsilon s_m = \text{const}$.

При $\lambda \ll 1$ разностные уравнения можно заменить дифференциальными [1]

$$\frac{dw}{dt} = \frac{c\lambda \sin \psi}{T_s}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\lambda \ln(32/|\bar{w}|)}{T_s},$$

где T_s — период отображения.

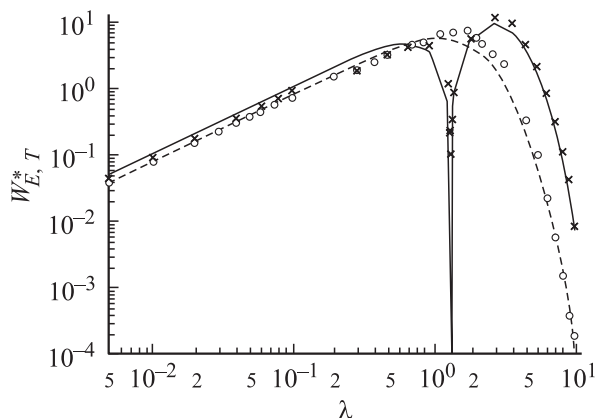


Рис. 1. Симметричная система (1), (3). Зависимости численных W_E^* (значки) и найденных по формуле (11) W_T^* (кривые) нормированных амплитуд сепаратрисных отображений от параметра адиабатичности λ . Кружки и пунктир — $m = 2$, крестики и сплошная кривая — $m = 4$.

Отсюда находим

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{c \sin \psi}{\ln(32/|\bar{w}|)}$$

и убеждаемся, что в зависимости $w(\psi)$ параметр адиабатичности λ отсутствует. Так будет, если принять, что размер слоя w_{ip} и амплитуда сепаратрисного отображения W при низкой частоте возмущения связаны соотношением

$$w_{ip} \approx b \frac{W}{\lambda} \approx 0.22 s_m = \text{const}, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (14)$$

где s_m есть предел (3) и введен эмпирический множитель $b \approx 0.22$.

Зависимость (14) хорошо подтверждается в численном эксперименте (отрезки горизонтальных прямых на рис. 3).

Таким образом, в низкочастотном пределе размер хаотического слоя вообще не зависит от частоты, что кардинально отличается от высокочастотного случая, где эта зависимость (5), (6) экспоненциальная. Выше отмечалась особая роль в образовании хаоса, принадлежащая вторичным гармоникам возмущения, возникающим на комбинациях высоких частот первичных гармоник. В основе этого эффекта лежит именно экспоненциальная зависимость, которая позволяет даже очень слабым, но низкочастотным гармоникам определять формирование слоя. В низкочастотном пределе картина резко меняется, вторичные гармоники становятся малыми поправками порядка $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ и их влияние исчезающе мал.

3. Область средних частот возмущений

Наиболее интересные динамические эффекты имеют место в области средних частот $0.1 \gtrsim \lambda \lesssim 5$, где параметр адиабатичности нельзя считать ни малым, ни большим. Эта область плохо поддается теоретическому описанию. Особенно это заметно в окрестности нуля интеграла $A_4(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 = \sqrt{2}$ (на него указывает вертикальная линия на рис. 1), где $W_T = 0$, в то время как экспериментальная величина $W_e^* \approx 0.103$ оказывается конечной. По этой причине обсуждаемые ниже факты получены в основном численно.

Спектральный анализ показал, что сепаратрисное отображение системы (1), (3) в этой области кроме гармоники основной частоты Ω содержит также гармонику двойной частоты 2Ω . Более того, для случая $m = 4$ амплитуда основной частоты $W(\Omega)$ вообще исчезает при $\lambda = \lambda_1 \approx 1.4175 \dots > \lambda_0$ и затем вновь возникает с другим знаком. При изменении величины возмущения ε изменяется также и величина λ_1 . По мере отхода от значения λ_1 в любую сторону влияние двойной частоты слабеет и спадает практически до нуля на подходах к границам обеих асимптотических областей.

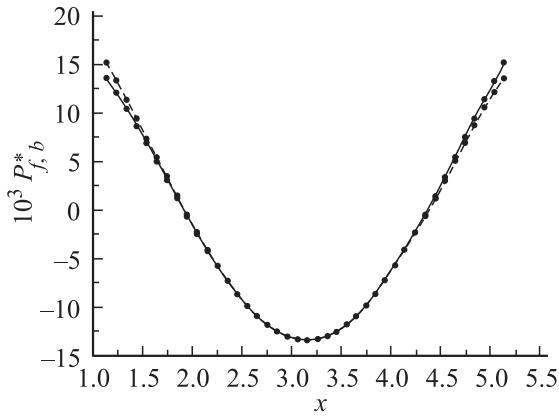


Рис. 2. Система (1), (3) с $m = 4$. Пересечение ветвей сепаратрисы основного резонанса при $\lambda = 1.3986685\dots$; относительные значения импульсов P_f^* — сплошная кривая, P_b^* — пунктир.

Гармоника двойной частоты оказывается вторичной и определяется квадратом величины возмущения $\sim \varepsilon^2$, что подтверждается численным экспериментом. Ее амплитуду можно определить методом, примененным в работе [8] при вычислении вторичных гармоник на комбинациях первичных частот (введение переменных, близких к координате и импульсу на невозмущенной сепаратрисе). Мы не приводим здесь выражение для этой амплитуды из-за его громоздкости, но заметим, что оно содержит интегралы Мельникова–Арнольда вида $A_{m-2}(2\lambda)$ и $A_{m+2}(2\lambda)$.

Как известно, ценную информацию о поведении ветвей сепаратрис целых и дробных резонансов дает измерение угла пересечения этих ветвей в центральной гомоклинической точке (Введение). Этот угол является одним из немногих атрибутов хаоса, который может быть измерен сколь угодно точно (подробности в [10]) и его отличие от нуля является надежным свидетельством расщепления сепаратрис. Ниже будет показано, что обратное утверждение неверно.

В обсуждаемой области средних частот при возмущении (3) с коэффициентом $m = 2$ угол пересечения ветвей сепаратрис сохраняет знак. При $m = 4$ он проходит через нуль в точке $\lambda = \lambda_2 = 1.3986685\dots < \lambda_0$ и затем меняет знак. Изменение величины возмущения ε изменяет также величину λ_2 .

При исследовании гладких кусочно-линейных отображений равенство этого угла нулю на практике всегда означало сохранение сепаратрисы и отсутствие хаотического слоя (см., например, [5]), что подтверждалось численными экспериментами. Однако построение фазового портрета системы (1), (3) при $\lambda = \lambda_2$ показало, что сепаратриса основного резонанса разрушена и ее место занял мощный хаотический слой. Для прояснения ситуации потребовалось изучить характер пересечения ветвей сепаратрис в этом случае более подробно.

Обозначим через $P_f^* = p_f/p_{s,0} - 1$ относительное отклонение ветви сепаратрисы от ее невозмущенного значения $p_{s,0} = 2\omega_0 \sin(x_s/2)$ [1] для направления времени вперед и введем аналогичное обозначение P_b^* для направления времени назад. На рис. 2 приведена картинка пересекающихся ветвей верхней сепаратрисы при $\lambda = \lambda_2 = 1.3986685\dots$ в окрестности центральной гомоклинической точки $x = \pi$, которая оказывается точкой перегиба: угол пересечения ветвей и угол наклона касательной проходят через нуль одновременно, после чего ветви отделяются друг от друга. Этот пример показывает, что обращение угла пересечения ветвей сепаратрисы в центральной (а следовательно, и в любой гомоклинической) точке в нуль не является гарантией сохранения сепаратрисы; это опровергает содержащееся в работе [5] противоположное утверждение (другой пример такого поведения ветвей сепаратрис можно найти в [11]).

Для выявления прочих динамических эффектов необходимо выяснить, как связан с частотой возмущения размер хаотического слоя.

4. Хаотический слой

На рис. 3 показаны найденные численно по минимальному периоду движения (9) нормированные размеры $W_{tp}^* = w_{tp}/\varepsilon$ верхней части основного хаотического слоя (каждая точка просчитывалась на протяжении $5 \cdot 10^6$ периодов движения).

Отрезки прямых горизонтальных линий в левой части рисунка вычислены по формуле (14) и соответствуют асимптотическим значениям для низкочастотного предела $\lambda \rightarrow 0$. Кривые в правой части рисунка, построенные по формулам (4), (5), дают представление о соответствии теории и эксперимента при высокой частоте возмущения. На этом возможности строгой теории кончаются, и для анализа средних частот приходится прибегать к приближенным и численным методам.

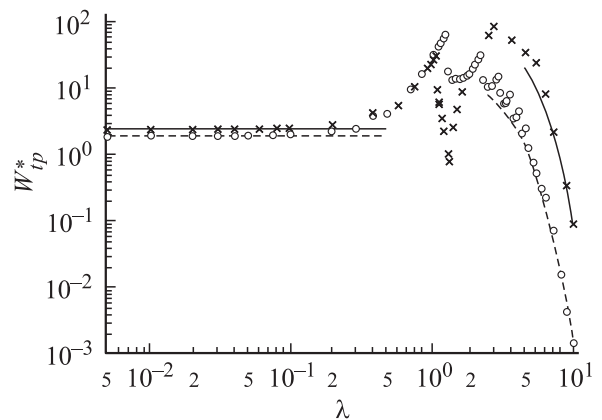


Рис. 3. Симметричная система (1), (3). Построенная численно зависимость нормированного размера хаотического слоя W_{tp}^* от параметра адиабатичности λ ; пунктир и кружки — $m = 2$, сплошные линии и крестики — $m = 4$.

Характерной чертой зависимости размера слоя w_{tr}^* от параметра λ , сильно затрудняющей развитие теории в этой области частот, является ее разрывность (хотя амплитуда сепаратрисного отображения изменяется плавно; рис. 1). Некоторые разрывы хорошо видны на рис. 3 (случай $m = 2$), другие для своего обнаружения требуют увеличения масштаба. Такая структура оказывается вполне естественной и объясняется в рамках современной динамики следующим образом. По мере уменьшения величины параметра λ происходят последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения и образование на их месте так называемых „кантор-торов“ [12]. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом сепаратрисного отображения, то при ее разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает скачком на конечную величину — фазовый объем присоединившегося резонанса. В [1] отмечалось, что максимальная величина скачка возникает при объединении слоя с целым резонансом. Основная трудность здесь связана с необходимостью построения картины взаимного расположения резонансов вблизи края хаотического слоя и определения значения амплитуды сепаратрисного отображения, отвечающего их перекрытию.

Удобным средством решения этой проблемы являются, на наш взгляд, так называемые резонансные инварианты, знание которых позволяет получить такую картину без численного построения траекторий. Для сепаратрисного отображения инварианты первых трех порядков (резонансы 1:1, 1:2 и 1:3 соответственно) предложены недавно в работах [13,14], где в комбинации с известным критерием перекрытия резонансов Чирикова они используются для исследования динамики хаотического слоя и отыскания величин скачков его размеров как раз в области средних частот при $\lambda = 3$.

Как всякий аналитический алгоритм, эти инварианты не в состоянии уловить хаотическую компоненту движения и потому рисуют „чистые“ сепаратрисы резонансов, а не реально существующие на их месте хаотические слои [14, рис. 2, 3 и 4]. Это обстоятельство заметно облегчает оценку взаимного расположения этих резонансов.

В работах [13,14] демонстрируется хорошее соответствие картинок резонансов, построенных по линиям уровня инвариантов и с помощью прямого численного итерирования сепаратрисного отображения, а также обсуждаются некоторые технические детали.

Заключение

Возмущенный маятник является весьма популярной моделью, возникающей при исследовании многих реальных динамических систем, и построение хаотического слоя такой модели во всем диапазоне частот возмущений является, на наш взгляд, необходимым. К уже имеющейся высокочастотной асимптотике добавилась

низкочастотная, однако область средних частот возмущений требует дальнейшего изучения.

Автор благодарен Б.В. Чирикову за обсуждения и советы.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН „Математические методы в нелинейной динамике“.

Список литературы

- [1] *Chirikov B.V.* // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 263.
- [2] *Lichtenberg A., Lieberman M.* Regular and Chaotic Dynamics. Springer, 1992.
- [3] *Заславский Г.М., Сагдеев П.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [4] *Bullett S.* // Commun. Math. Phys. 1986. Vol. 107. P. 241.
- [5] *Вечеславов В.В.* Динамика пилообразного отображения. 1. Новые численные результаты. Препринт ИЯФ 2000-27. Новосибирск, 2000: E-print archive nlin.CD/0005048.
- [6] *Вечеславов В.В., Чириков Б.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. С. 740.
- [7] *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 54. С. 1590.
- [8] *Вечеславов В.В.* // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. С. 2208.
- [9] *Вечеславов В.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. С. 989.
- [10] *Вечеславов В.В., Чириков Б.И.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 114. С. 1516.
- [11] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 9. С. 1–11.
- [12] *MacKay R.S., Meiss J.D., Percival I.C.* // Physica D. 1984. Vol. 13. P.55.
- [13] *Vecheslavov V.V.* // Physica D. 1999. Vol. 131. P. 55.
- [14] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 2. С. 20–27.