

01;09

Собственные колебания анизотропного диэлектрического шара

© Ю.В. Прокопенко, Т.А. Смирнова, Ю.Ф. Филиппов

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
61085 Харьков, Украина
e-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 11 августа 2003 г.)

Изучены квазиТЕ- и квазиТМ-колебания в анизотропном шаре, погруженном в изотропную среду. Исследование системы уравнений Максвелла внутри шара приведено к рассмотрению двух связанных дифференциальных уравнений. Теоретический анализ проведен для малого параметра анизотропии. Найдено приближенное решение этой системы. При удовлетворении граничным условиям на поверхности шара получено дисперсионное уравнение, определяющее частоты резонансных колебаний. Исследовано влияние анизотропии на их спектральные характеристики.

Введение

Диэлектрические резонаторы в настоящее время широко используются при изучении физических явлений, возникающих в различных областях науки и техники. В однородном изотропном шаре существуют независимые ТЕ- ($E_r = 0$) и ТМ-типы ($H_r = 0$) резонансных колебаний [1,2]. Диэлектрикам же, используемым при изготовлении высокочастотных резонаторов, свойственна анизотропия параметров. Учет ее влияния на спектральные характеристики резонансных колебаний необходим при создании интегральных схем миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн. Наиболее широко применяются одноосные монокристаллы рубина, сапфира, кварца, обладающие малыми диэлектрическими потерями. Электрические параметры их описываются тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon} = \epsilon_{ik}\delta_{i,k}$, в котором $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}$ и $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}$ — компоненты тензора в перпендикулярном и параллельном направлениях к оси анизотропии соответственно; $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера. В шаре, изготовленном из одноосного диэлектрика, ранее были исследованы резонансные колебания, поля которых не зависят от азимутальной координаты [3,4]. Большой интерес представляет обобщение теории на случай полей, зависящих от азимутальной координаты. Авторами работы [5] рассматривались азимутально-неоднородные колебания в резонаторе, заполненном анизотропной диэлектрической средой и ограниченным идеально проводящей сферической поверхностью. Исследование системы уравнений Максвелла проводилось ими разложением по векторным сферическим функциям. Численное решение полученных двух бесконечномерных алгебраических систем позволило рассчитать лишь частоты низших типов колебаний. Однако этот метод не позволяет изучать эффекты, возникающие в шаре под влиянием анизотропии.

Объект исследования

Рассмотрим шар, погруженный в изотропную среду, которая характеризуется диэлектрической ϵ_b и магнитной μ_b проницаемостями (рис. 1). Шар заполнен из

одноосного диэлектрика с магнитной проницаемостью μ_d и обладает анизотропными свойствами, которые описываются указанным выше тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. В сферической системе координат (r, Θ, φ) компоненты этого тензора принимают вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & -\epsilon_{r\Theta} & 0 \\ -\epsilon_{r\Theta} & \epsilon_{\Theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\epsilon_{rr} = \epsilon_{+} + \epsilon_{-} \cos 2\Theta$, $\epsilon_{\Theta\Theta} = \epsilon_{+} - \epsilon_{-} \cos 2\Theta$, $\epsilon_{r\Theta} = \epsilon_{\Theta r} = \epsilon_{-} \sin 2\Theta$, где $2\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\parallel} \pm \epsilon_{\perp}$. Зависимость компонент тензора от полярной координаты существенно затрудняет решение задачи о собственных колебаниях сферического диэлектрического резонатора.

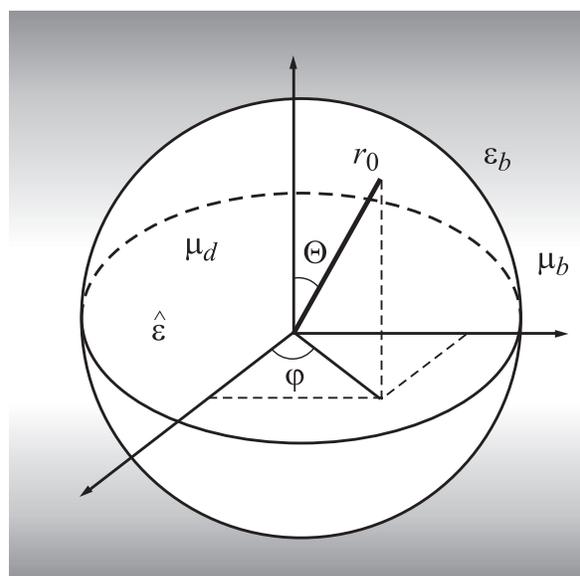


Рис. 1. Диэлектрический сферический резонатор.

Теория

Для электромагнитных колебаний, зависящих от времени пропорционально $\exp(-i\omega t)$, введем функции U^H и U^E соотношениями

$$H_r = l_x l_\Theta U^H; \quad E_r = l_x l_\Theta U^E,$$

в которых $l_x = \varepsilon_\perp k^2 + \partial^2/\partial r^2$, $l_\Theta = \varepsilon_{\Theta\Theta} k^2 + \partial^2/\partial r^2$, $k = \omega/c$, ω — собственная комплексная частота, c — скорость света.

Легко показать, что для произвольной функции Ψ справедливы тождества

$$\begin{aligned} l_\Theta \left(\varepsilon_{r\Theta} \mu k^2 r + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} \right) \Psi &= \left(\varepsilon_{r\Theta} \mu k^2 r + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} \right) l_\Theta \Psi, \\ l_\Theta \left[\varepsilon_{\Theta\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \varepsilon_{r\Theta} \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \Psi &= \left[\varepsilon_{\Theta\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} - \varepsilon_{r\Theta} \frac{\partial}{\partial r} r \right] l_\Theta \Psi. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, исследование системы уравнений Максвелла внутри шара приводим к рассмотрению двух связанных дифференциальных уравнений для функций U^H и U^E

$$\hat{L}_H U^H = 2i\varepsilon_- k \hat{\Lambda} \frac{\partial U^E}{\partial \varphi}, \quad \hat{L}_E U^E = 2i\varepsilon_- \mu_d k \hat{\Lambda} \frac{\partial U^H}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

где

$$\hat{L}_H (\Delta_\perp + r^2 l_x) l_\Theta - 2\varepsilon_- \mu_d k^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \hat{L}_E = \hat{\Omega}_0 + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \hat{\Omega} l_x,$$

$$\Delta_\perp = \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\hat{\Lambda} = \left(r l_x - 2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \cos \Theta - \sin \Theta \frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial r},$$

$$\hat{\Omega}_0 = \left[\Delta_\perp + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \varepsilon_+ \left(1 - \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} \right) \mu_d k^2 r^2 \right] l_x$$

$$+ 2\varepsilon_- \left(1 - \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \right) \mu_d k^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\hat{\Omega} = \cos 2\Theta \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta_\perp + 3 \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]$$

$$+ \left(3 - 2r \frac{\partial}{\partial r} \right) \sin 2\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + 1 - r \frac{\partial}{\partial r} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Тангенциальные компоненты полей выражаются через функции U^E и U^H

$$r E_\varphi = \frac{l_\Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial^2 U^E}{\partial r \partial \varphi} - ik \mu_d \frac{\partial}{\partial \Theta} (l_\Theta U^H),$$

$$r E_\Theta = \frac{ik \mu_d}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (l_x U^H) + \left(\varepsilon_{r\Theta} \mu_d k^2 r + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} \right) l_x U^E,$$

$$r H_\Theta = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} (l_\Theta U^H) - \frac{ik \varepsilon_{xx}}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (l_\Theta U^E),$$

$$\begin{aligned} r H_\varphi &= \frac{l_x}{\sin \Theta} \frac{\partial^2 U^H}{\partial r \partial \varphi} \\ &+ ik \left[\varepsilon_{\Theta\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \varepsilon_{r\Theta} \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] l_x U^E. \end{aligned} \quad (2)$$

Для азимутально-однородных колебаний система (1) распадается на два независимых колебания. Зависимость же полей от азимутальной координаты приводит к исследованию связанных уравнений относительно U^H и U^E . Решение (1) представим в виде разложений

$$U^S(r, \Theta, \varphi) = \sum_p U_p^S(r, \Theta, \varphi) = \sum_p R_p^S(r) Y_{n,m}(\Theta, \varphi). \quad (3)$$

Здесь S обозначает E или H ; трехмерный индекс p содержит параметры n , m и s . Функции $Y_{n,m}(\Theta, \varphi) = P_n^m(\cos \Theta) \exp(im\varphi)$ являются собственными функциями оператора Δ_\perp , где $P_n^m(\cos \Theta)$ — присоединенные функции Лежандра, отличные от нуля при азимутальных индексах $m \leq n$ и имеющие $n - m$ нулей по полярной координате [6]. Полярный индекс n определяет число вариаций поля по полярной координате Θ для азимутально-однородных колебаний ($m = 0$). Азимутальный индекс m в свою очередь характеризует число вариаций поля для азимутальных колебаний по φ , существующих при $m = n$. Радиальный индекс s определяет число вариаций поля по радиальной координате r .

Произведения угловых функций удовлетворяют функциональным соотношениям [7]

$$\begin{aligned} \sin \Theta \frac{\partial Y_{n,m}(\Theta, \varphi)}{\partial \Theta} &= f_n [n(n-m+1) Y_{n+1,m}(\Theta, \varphi) \\ &- (n+1)(n+m) Y_{n-1,m}(\Theta, \varphi)], \\ \cos \Theta Y_{n,m}(\Theta, \varphi) &= f_n [(n-m+1) Y_{n+1,m}(\Theta, \varphi) \\ &+ (n+m) Y_{n-1,m}(\Theta, \varphi)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_n = 1/(2n+1)$.

Также можно показать, что

$$\begin{aligned} \sin 2\Theta \frac{\partial Y_{n,m}(\Theta, \varphi)}{\partial \Theta} &= 2f_n [n(n-m+1)(n-m+2) f_{n+1} Y_{n+2,m}(\Theta, \varphi) \\ &- (n+1)(n+m)(n+m-1) f_{n-1} Y_{n-2,m}(\Theta, \varphi)] \\ &- 2 [n(n+1) - 3m^2] f_{n+1} f_{n-1} Y_{n,m}(\Theta, \varphi), \\ \cos 2\Theta Y_{n,m}(\Theta, \varphi) &= f_n [(n-m+1)(n-m+2) f_{n+1} Y_{n+2,m}(\Theta, \varphi) \\ &+ (n+m)(n+m-1) f_{n-1} Y_{n-2,m}(\Theta, \varphi)] \\ &+ [2n(n+1) - 2m^2 - 1] f_{n+1} f_{n-1} Y_{n,m}(\Theta, \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Зависимость от полярного угла коэффициентов в системе (1) приводит к изменению только полярных индексов. Поэтому в дальнейшем для краткости записи индексы m и s опускаем.

Подставляя в (1) разложения (3), используя соотношения (4), (5) и приравнявая множители перед угловыми функциями $Y_{n,m}(\Theta, \varphi)$, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций $R_n^E(r)$ и $R_n^H(r)$:

$$\begin{aligned} & a_{1,n}^H R_n^H - a_{2,n-2}^H R_{n-2}^H - a_{3,n+2}^H R_{n+2}^H \\ & = -2\varepsilon_- mk [b_{1,n-1} R_{n-1}^E - b_{2,n+1} R_{n+1}^E], \\ & a_{1,n}^E R_n^E - \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} (a_{2,n-2}^E R_{n-2}^E + a_{3,n+2}^E R_{n+2}^E) \\ & = -2\varepsilon_- \mu_d mk [b_{1,n-1} R_{n-1}^H - b_{2,n+1} R_{n+1}^H] / \varepsilon_+, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{1,n}^H &= T_n [l_+ - (1 - 4m^2)g - f_{n-1}f_{n+1}] + 2g - m^2, \\ T_n &= r^2 l_x - n(n+1), \\ a_{2,n}^H &= 2g_-(n-m+1)(n-m+2)f_n f_{n+1} T_n, \\ b_{1,n} &= (n-m+1)f_n \left[r l_x - (n+2) \frac{d}{dr} \right], \\ a_{3,n}^H &= 2g_-(n+m)(n+m-1)f_n f_{n-1} T_n, \\ b_{2,n} &= (n+m)f_n \left[r l_x + (n-1) \frac{d}{dr} \right], \\ a_{1,n}^E &= \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} - n(n+1) \right\} \\ & \times \left[1 + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} (1 - 4m^2)f_{n-1}f_{n+1} \right] \\ & + \left(1 - \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} \right) g_+ r^2 \left\{ l_x - 2m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \right) g_- \right\}, \\ a_{2,n}^E &= 2f_n f_{n+1} (n-m+1)(n-m+2) \\ & \times \left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} - (2n+3)r \frac{d}{dr} + n(n+1) \right], \\ a_{3,n}^E &= 2f_n f_{n-1} (n+m)(n+m-1) \\ & \times \left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2n-1)r \frac{d}{dr} + (n+1)(n-3) \right], \\ g_{\pm} &= \varepsilon_{\pm} \mu_d k^2. \end{aligned}$$

Зависимость компонент тензора $\hat{\varepsilon}$ от полярной координаты приводит к появлению связи между парциальными колебаниями с различными полярными индексами. При не равном нулю азимутальном индексе m и произвольных значениях полярного индекса n решить систему (6) строго не удается. Для широко применяемых в технике монокристаллов рубина, сапфира, кварца

отношение $\varepsilon_-/\varepsilon_+$, порядка 0.1. Решение системы (6) проведем разложением по этому малому параметру.

Нулевое приближение. Пренебрегая величинами пропорциональными $\varepsilon_-/\varepsilon_+$, приходим к двум независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$[l_+ - n(n+1)/r^2] l_+ R_n^S = 0, \quad (7)$$

где оператор

$$l_+ = \frac{d^2}{dr^2} + g_+.$$

Решениями уравнений (7) внутри шара являются функции $j_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2} J_\nu(x)$, а вне — $h_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_\nu^{(1)}(x)$. Здесь $\nu = n + 1/2$; $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно. Функции $j_\nu(x)$ и $h_\nu^{(1)}(x)$ удовлетворяют функциональному соотношению

$$z'_\nu(x) = z_{\nu-1}(x) - \frac{n}{x} z_\nu(x) = \frac{n+1}{x} z_\nu(x) - z_{\nu+1}(x)$$

(штрих здесь и ниже обозначает дифференцирование функции по аргументу).

На поверхности $r = r_0$ тангенциальные компоненты полей E_φ , H_φ , E_Θ и H_Θ являются непрерывными. Это условие выполняется при непрерывности на поверхности шара следующих функций

$$\varepsilon_j l_+ R_{n,j}^E; \quad \mu_j l_+ R_{n,j}^H; \quad \frac{dl_+ R_{n,j}^E}{dr}; \quad \frac{dl_+ R_{n,j}^H}{dr}. \quad (8)$$

Здесь j принимает значения d и b . Исходная система (1) при этом разбивается на две независимые подсистемы, определяющие резонансные характеристики TE - и TM -типов колебаний. Удовлетворяя условиям непрерывностей функций (8), получаем

$$\begin{aligned} l_+ R_n^E(r) &= \begin{cases} j_\nu(x_d r/r_0), & r \leq r_0, \\ \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_d} \frac{j_\nu(x_d)}{h_\nu^{(1)}(x_b)} h_\nu^{(1)}(x_b r/r_0), & r \geq r_0, \end{cases} \\ l_+ R_n^H(r) &= \begin{cases} j_\nu(x_d r/r_0), & r \leq r_0, \\ \frac{\mu_b}{\mu_d} \frac{j_\nu(x_d)}{h_\nu^{(1)}(x_b)} h_\nu^{(1)}(x_b r/r_0), & r \geq r_0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $x_d = \sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} k r_0$ и $x_b = \sqrt{\varepsilon_b \mu_b} k r_0$.

Компоненты полей TE -колебаний описываются соотношениями

$$E_r^H = 0, \quad r E_\Theta^H = \frac{ik\mu_j}{\sin \Theta} \frac{\partial l_+ U^H}{\partial \varphi}, \quad r E_\varphi^H = -ik\mu_j \frac{\partial l_+ U^H}{\partial \Theta},$$

$$H_r^H = \frac{n(n+1)}{r^2} l_+ U^H, \quad r H_\Theta^H = -\frac{\partial^2 l_+ U^H}{\partial \Theta \partial r},$$

$$r H_\varphi^H = \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial^2 l_+ U^H}{\partial \varphi \partial r}.$$

Собственные частоты шара для этих колебаний определяются решениями дисперсионного уравнения

$$\sqrt{\varepsilon_d/\mu_d} \frac{j'_v(x_d)}{j_v(x_d)} = \sqrt{\varepsilon_b/\mu_b} \frac{h_v^{(1)}(x_b)}{h_v^{(1)}(x_b)}. \quad (9)$$

Для полей TM -колебаний имеем

$$H_r^E = 0, \quad rH_\Theta^E = -\frac{ik\varepsilon_j}{\sin\Theta} \frac{\partial l_+ U^E}{\partial \varphi}, \quad rH_\varphi^E = ik\varepsilon_j \frac{\partial l_+ U^E}{\partial \Theta},$$

$$E_r^E = \frac{n(n+1)}{r^2} l_+ U^E, \quad rE_\Theta^E = -\frac{\partial^2 l_+ U^E}{\partial \Theta \partial r},$$

$$rE_\varphi^E = \frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial^2 l_+ U^E}{\partial \varphi \partial r}.$$

Их частоты находятся из уравнения

$$\sqrt{\mu_d/\varepsilon_d} \frac{j'_v(x_d)}{j_v(x_d)} = \sqrt{\mu_b/\varepsilon_b} \frac{h_v^{(1)'}(x_b)}{h_v^{(1)}(x_b)}. \quad (10)$$

Полученные решения в первом приближении описывают спектральные характеристики колебаний в изотропном шаре с диэлектрической проницаемостью ε_+ . Каждому полярному индексу n соответствуют $2n+1$ угловых функций $Y_{n,m}(\Theta, \varphi)$. Но в дисперсионных уравнениях (9) и (10) азимутальный индекс m отсутствует. Это приводит к тому, что на одной и той же частоте при заданном значении полярного индекса n в изотропном шаре могут возбуждаться $2n+1$ резонансных колебаний с различной зависимостью от угловых координат. Наблюдается $2n+1$ кратное частотное вырождение. Заметим, что при фиксированном полярном индексе азимутальная неоднородность полей приводит к зависимости распределения полей по полярной координате Θ от азимутального индекса m . Остановимся на этом подробнее.

Присоединенная функция Лежандра определяет распределение поля по полярному углу Θ и имеет $n-m$ нулей внутри интервала $0 < \Theta < \pi$ [6]. Для наших целей удобнее рассчитывать функцию Лежандра $P_n^m(\cos\Theta)$ с помощью ряда [7]

$$P_n^m(\cos\Theta) = \frac{(n+m)! \sin^m \Theta}{2^m m! (n-m)!} \left\{ 1 - \frac{(n-m)(n+m+1)}{1!(m+1)} \right.$$

$$\times \frac{1 - \cos\Theta}{2} + \frac{(n-m)(n-m-1) \times (n+m+1)(n+m+2)}{2!(m+1)(m+2)}$$

$$\left. \times \left(\frac{1 - \cos\Theta}{2} \right)^2 - \dots \right\}. \quad (11)$$

На рис. 2 приведена зависимость параметра

$$\chi \equiv \frac{P_3^m(\cos\Theta)}{P_3^3(\Theta = \pi/2)}$$

от полярного угла Θ при полярном индексе $n=3$. Так как при азимутальном индексе $m > 3$ функция $P_3^m(\cos\Theta)$

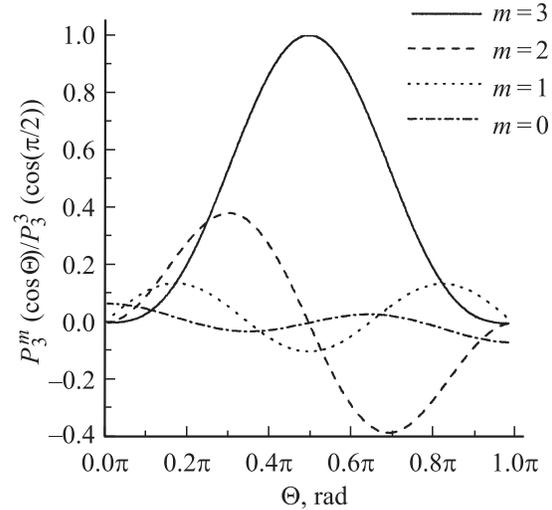


Рис. 2. Нормируемые зависимости функций Лежандра для азимутальных индексов $m \leq n$ при полярном индексе $n=3$.

равна нулю, то в рассматриваемом случае в изотропном шаре могут возбуждаться следующие колебания.

Азимутально-однородное колебание ($n=3, m=0$). Зависимость поля этого колебания от полярной координаты определяется полиномом Лежандра $P_n(\cos\Theta) \equiv P_n^0(\cos\Theta)$, который имеет n нулей внутри интервала углов $0 < \Theta < \pi$.

Азимутальное колебание ($m=n=3$). Поле этого колебания зависит от азимутальной координаты пропорционально $\exp(in\varphi)$ и симметрично относительно $\Theta = \pi/2$, принимая при этом полярном угле максимальное значение. Внутри интервала углов $0 < \Theta < \pi$ поле колебания нигде не обращается в нуль и имеет максимальную амплитуду по сравнению с колебаниями $m \neq n$. При произвольных полярных индексах из (11) получаем, что $P_n^n(\cos\Theta) = (2n-1)!! \sin^n \Theta$. Это колебание наблюдалось экспериментально [8,9].

Несимметричное колебание ($m=n-1=2$). Поле этого колебания зависит от азимутальной координаты пропорционально $\exp[i(n-1)\varphi]$ и несимметрично относительно полярного угла $\Theta = \pi/2$, принимая при этом угле нулевое значение. При произвольных n имеем $P_m^{n-1}(\cos\Theta) = (2n-1)!! \sin^{n-1} \Theta \cos \Theta$.

Симметричное колебание ($m=n-2=1$). Поле этого колебания зависит от азимутальной координаты пропорционально $\exp[i(n-2)\varphi]$ и симметрично относительно полярного угла $\Theta = \pi/2$, принимая при этом угле минимальное значение. При $\Theta = \pi/4$ поле этого колебания максимально. При произвольных n справедливо соотношение $P_n^{n-2}(\cos\Theta) = (2n-1)!! \sin^{n-2} \Theta \times [\cos^2 \Theta - 1/(2n-1)]$.

Аналогичный анализ распределения полей собственных колебаний по полярной координате при различных значениях азимутального индекса может быть проведен при произвольных значениях полярного индекса. Заметим только, что с увеличением полярного индекса

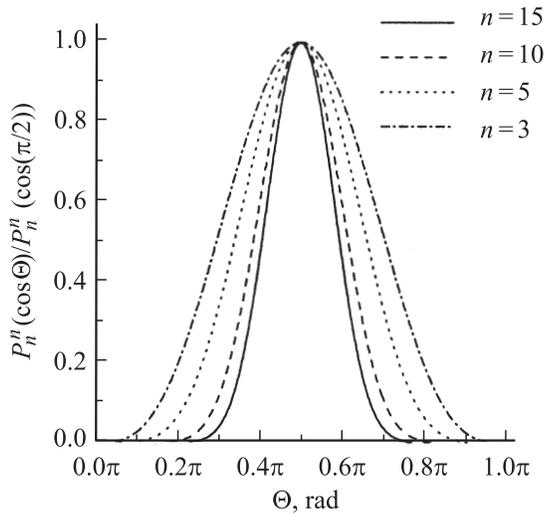


Рис. 3. Нормированные зависимости функций Лежандра при $m = n$.

поля парциальных колебаний по радиусу прижимаются к поверхности шара. Вблизи полярного угла $\Theta = \pi/2$ поле максимально при равных полярных и азимутальных индексах. С увеличением полярного индекса поле увеличивается по величине и все больше сосредоточивается вблизи этого угла (рис. 3). При больших значениях n возникают азимутальные высокочастотные колебания типа „шепчущей галереи“.

Полученные выше результаты справедливы и для полусферического резонатора, ограниченного при $\Theta = \pi/2$ идеально проводящей плоскостью. В этом случае наблюдается $n = 1$ частотное вырождение. Частичное снятие вырождения связано с тем, что пропадают колебания, у которых сумма значений m и n четна для TE -типа и нечетна для TM -типа.

Первое приближение. Пренебрегая в соотношении (6) величинами, пропорциональными $(\varepsilon_-/\varepsilon_+)^2$, имеем

$$\alpha_n^H l_+ R_n^H = -2\varepsilon_- \mu_d m k r [\beta_{1,n} l_+ R_{n-1}^E + \beta_{2,n} l_+ R_{n+1}^E],$$

$$\alpha_n^E l_+ R_n^E = -2\varepsilon_- m k r [\beta_{1,n} l_+ R_{n-1}^H + \beta_{2,n} l_+ R_{n+1}^H] / \varepsilon_+, \quad (12)$$

где

$$\alpha_n^H = \left[r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \gamma_H^2 \right) - n(n+1) \right],$$

$$\alpha_n^E = \left[r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \gamma_E^2 \right) - n(n+1) \right]; \quad l_+ = \frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon_+ k^2,$$

$$\beta_{1,n} = (n-m) f_{n-1} \left[r - \frac{n+1}{n(n-1)} \frac{d}{dr} r^2 \right],$$

$$\beta_{2,n} = (n+m-1) f_{n+1} \left[r - \frac{n}{(n+1)(n+2)} \frac{d}{dr} r^2 \right],$$

$$\gamma_E^2 = 1 - \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \left[(1-4m^2) f_{n-1} f_{n+1} + \frac{2m^2}{n(n+1)} \right],$$

$$\gamma_H^2 = 1 - \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \left(1 - \frac{2m^2}{n(n+1)} \right).$$

Под влиянием анизотропии возникает зависимость коэффициентов γ_E и γ_H от азимутального индекса m . Появляются парциальные колебания противоположного типа со смежными полярными индексами, т.е. у TE (TM)-колебаний появляются компоненты поля с решениями $R_{n\pm 1}^{E(H)}(r)$. Вклады их в радиальные функции $R_n^{H(E)}(r)$ пропорциональны $(\varepsilon_-/\varepsilon_+)^2$. В рассматриваемом приближении ими можно пренебречь. Решения же однородной части системы могут быть представлены в виде $R_n^S(r) = A_n^S j_n(\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_S k r)$.

Удовлетворяя условиям непрерывности тангенциальных компонент напряженности электромагнитных полей на поверхности шара $r = r_0$, получаем следующие дисперсионные уравнения: для квази TM -колебаний:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_E j_n'(\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_E k r_0)}{\varepsilon_\perp j_n(\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_E k r_0)} = \sqrt{\frac{\mu_b}{\varepsilon_b}} \frac{h_n^{(1)' }(\sqrt{\varepsilon_b \mu_b} k r_0)}{h_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_b \mu_b} k r_0)} \quad (13)$$

и для квази TE -колебаний

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_+} \gamma_H j_n'(\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_H k r_0)}{\sqrt{\mu_d} j_n(\sqrt{\varepsilon_+ \mu_d} \gamma_H k r_0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\mu_b}} \frac{h_n^{(1)' }(\sqrt{\varepsilon_b \mu_b} k r_0)}{h_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_b \mu_b} k r_0)}. \quad (14)$$

Решения этих уравнений определяют резонансные частоты шара из одноосного кристалла, погруженного в изотропную среду с параметрами ε_b и μ_b .

Проведенное выше исследование несправедливо при больших значениях $n \gg m$ и $n \ll 1$. В этом случае операторы в левой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12) совпадают. Возникает необходимость учета следующих приближений в разложениях по параметру $\varepsilon_-/\varepsilon_+$. Для азимутально-однородных колебаний влияние анизотропии сказывается только для TM -типа. В работе [3] показано, что азимутально-однородные моды этого типа при больших значениях полярного индекса расщепляются на обыкновенные и необыкновенные колебания, которые имеют различные значения резонансных частот и радиальных компонент волнового вектора.

Численный эксперимент

Решения (13) и (14) определяют собственные частоты колебаний шара из одноосного кристалла, поля которых зависят от азимутальной координаты.

В миллиметровом диапазоне длин волн были проведены численные эксперименты с анизотропным и изотропным диэлектрическими шарами, помещенными в вакуум.

На рис. 4 для лейкосапфирового шара радиуса $r_0 = 0.66$ см ($\varepsilon_\perp = 11.6$ с тангенсом угла потерь $\text{tg } \delta = 5 \cdot 10^{-7}$ при температуре 77 К [10]) представлены зависимости собственных частот f (1) и добротностей Q (2) для квази TE - и квази TM -колебаний при $n = m$. При значениях полярного индекса $n > 10$ для квази TE - и $n \geq 15$ для квази TM -колебаний добротности

резонатора для всех типов колебаний с различными частотами выходят на максимальный уровень. Это позволяет использовать диэлектрический шар в качестве широкополосного и многомодового элемента в устройствах СВЧ техники.

Влияние анизотропии шара на его собственные частоты представлено на рис. 5. Использование анизотропного материала шара приводит к сдвигу собственных частот резонатора по сравнению с изотропным шаром, который имеет значения диэлектрической проницаемости в пределах значений примененного материала. Для квази TE -колебаний собственная частота резонатора повышается, а для квази TM -колебаний понижается по сравнению с собственными частотами резонатора, изго-

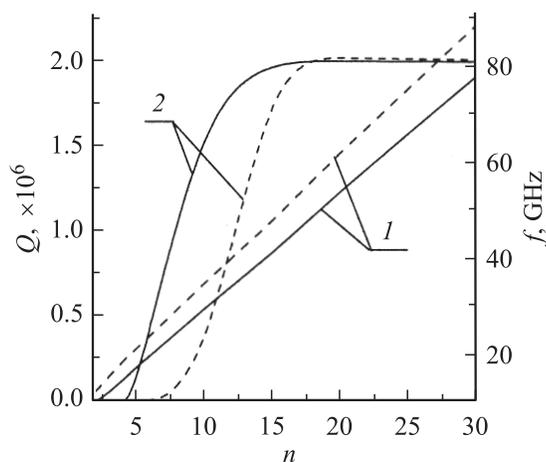


Рис. 4. Собственные частоты (1) и добротности (2) лейкосапфирового шара с радиусом 0.66 см для квази TE_{m1} (сплошные кривые) и квази TM_{m1} -колебаний (пунктир).

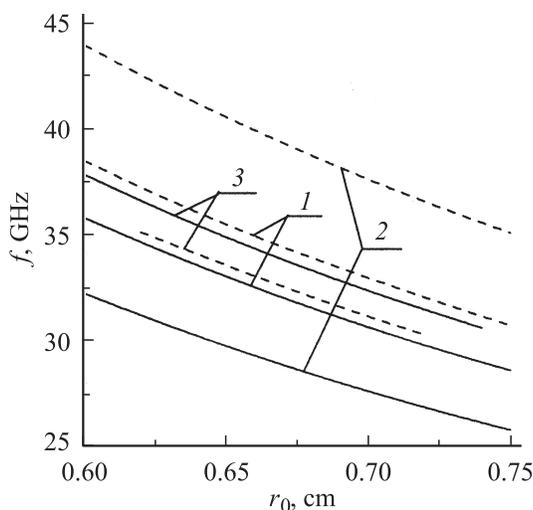


Рис. 5. Зависимость собственных частот диэлектрического шара от его радиуса для квази TE_{1011} - (сплошные кривые) и квази TM_{1011} -колебаний (пунктир). 1 — резонатор из изотропного материала с $\epsilon_d = 9.4$; 2 — $\epsilon_d = 11.6$; 3 — резонатор из анизотропного материала с $\epsilon_{\perp} = 9.4$ и $\epsilon_{\parallel} = 11.6$.

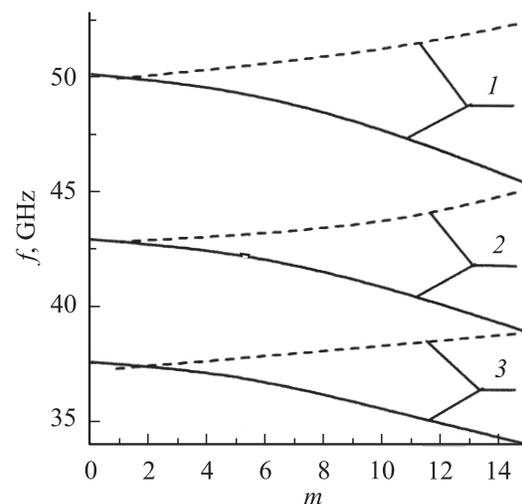


Рис. 6. Собственные частоты лейкосапфирового шара для квази TE_{15m1} (сплошные кривые) и квази TM_{15m1} -колебаний (пунктир). r_0 , см: 1 — 0.6, 2 — 0.7, 3 — 0.8.

товленного из изотропного материала. С уменьшением размера резонатора ($r_0 < 0.4$ см) собственные частоты резонатора резко увеличиваются, переходя в субмиллиметровый диапазон.

Анизотропия шара приводит к расщеплению собственных колебаний по азимутальному индексу m . На рис. 6 представлены зависимости собственных частот квази TE - и квази TM -колебаний резонатора с различными азимутальными индексами m при заданных полярных ($n = 15$) и радиальных ($s = 1$) индексах. С увеличением азимутального индекса собственная частота резонатора увеличивается для квази TM -колебаний и уменьшается для квази TE -колебаний. Добротность резонатора остается высокой и слабо зависит от радиуса шара и азимутального индекса.

Заключение

Развита теория открытых сферических резонаторов из одноосных кристаллов (рубин, лейкосапфир, кварц). В сферической системе координат анизотропия этих кристаллов приводит к зависимости компонент тензора диэлектрической проницаемости от полярной координаты. Впервые исследованы собственные азимутально-неоднородные колебания анизотропного шара. Показано, что под влиянием анизотропии возникает снятие частотного вырождения резонансных колебаний, которое присуще изотропному шару. В анизотропном шаре происходит трансформация TE - и TM -колебаний в квази TE - и квази TM -колебания.

Работа выполнена при поддержке НТЦУ (проекты № 1916 и 2051).

Список литературы

- [1] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948. 554 с.
- [2] *Gastine M., Courties L., Dormann J.* // IEEE Trans. on Microwave Theory Tech. 1967. Vol. 15. N 12. P. 694–700.
- [3] *Филиппов Ю.Ф., Еременко З.Е.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 8–11.
- [4] *Eremenko Z.E., Filipov Yu.F.* // Int. J. Inf. & MMW. 2001. Vol. 22. N 7. P. 1065–1074.
- [5] *Makinejad B., Ford G.W.* // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44. N 16. P. 8536–8546.
- [6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.; Л., 1951. 560 с.
- [7] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
- [8] *Kharkovsky S., Filipov Yu., Eremenko Z.* // Micr. Opt. Techn. Lett. 1999. Vol. 21. N 4. P. 252–257.
- [9] *Ораевский А.Н.* // Квантовая электрон. 2003. Т. 32. № 5. С. 377–397.
- [10] *Егоров В.Н., Воловиков А.С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44. № 11. С. 960–966.