

01;03;04

Механизм турбулентных пульсаций в каналах

© Л.Н. Пятницкий

Объединенный институт высоких температур РАН,
127412 Москва, Россия
e-mail: pyat7@mail.ru

(Поступило в Редакцию 18 июля 2003 г.)

На основе волновой модели турбулентности получены соотношения для расчета пространственно-временного поля пульсаций гидродинамических параметров турбулентного течения в канале. Дан анализ условий хаотизации пульсационного поля. Результаты расчетов продольных и поперечных пульсаций сопоставляются с результатами измерений этих величин, выполненных Г. Райхардтом.

Введение

В работах [1,2] дано экспериментальное обоснование формы возмущающего движения турбулентного течения, рассмотрен механизм формирования турбулентных пульсаций. В работе [3] описаны процессы образования турбулентного пограничного слоя и ламинарного подслоя. Пульсации гидродинамических параметров формируются в процессе суперпозиции возмущений, которые образуются в поле сильного градиента скорости течения у стенки и распространяются в потоке в виде волновых пакетов.

Градиент скорости обусловлен трением потока о стенку канала. Толщина пакета соответствует размерам первичного возмущения, гидродинамические параметры в пределах пакета пульсируют с пространственным периодом, равным его толщине. В ядре течения в суперпозиции участвуют волновые пакеты, по форме близкие к сферической. У стенки, в поле сильного градиента скорости течения, волновой фронт пакетов разрушается. Область разрушения фронта интерпретируется как пограничный слой.

В данной работе получены соотношения, описывающие пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров в поле градиента скорости течения, предложен метод определения толщины пограничного слоя, ламинарного подслоя и области вихреобразования. Рассмотрен процесс превращения регулярных возмущений параметров в нерегулярные и свойства хаотического поведения поля пульсаций. Результаты расчетов поля пульсаций скорости течения в плоском канале используются для сопоставления с данными измерений пульсаций, выполненных Г. Райхардтом. Предложена интерпретация экспериментальных зависимостей продольных и поперечных компонент пульсаций от расстояния до стенки.

Пространственно-временное поле пульсаций

Первичное возмущение можно представить [3] областью избыточного давления $\Delta p = p_0 f(r)$, расположенной у стенки и ограниченной полусферой радиуса a ,

$r \leq a$. Возмущение распространяется со скоростью звука c как волновой пакет толщиной $2a$. В пределах пакета гидродинамические параметры пульсируют. Пульсации скорости u , давления p , плотности ρ и других параметров определяются функцией $f(r)$, амплитуда пульсаций обратно пропорциональна пройденному волной пути (см., например, [4])

$$u, p, \rho \sim f\left(\frac{l_0 - ct}{a}\right) \frac{1}{ct} \quad \text{при } |l_0 - ct| \leq a, \\ u, p, \rho = 0 \quad \text{при } |l_0 - ct| > a. \quad (1)$$

Здесь l_0 — путь, пройденный волной до точки наблюдения; t — время. В неограниченной покоящейся среде волна сохраняет сферическую форму. В канале волновой фронт деформируется. Это связано, во-первых, с отражениями волны от стенок и, во-вторых, со сложным профилем скорости в сечении канала. Проследим за пробной точкой волны, распространяющейся в поле скорости потока \mathbf{U} . Направление движения волны в этой точке определит единичный вектор \mathbf{s} (в геометрической акустике — направление звукового луча).

В поле скорости \mathbf{U} направление вектора \mathbf{s} в пробной точке описывает уравнение [4]

$$\frac{d\mathbf{s}}{dl} = \frac{1}{c} [\text{rot } \mathbf{U}, \mathbf{s}], \quad (2)$$

где dl — элемент траектории пробной точки.

Если $\mathbf{U} = \text{const}$, то выбранная точка волны перемещается вдоль прямой и волна сохраняет сферическую симметрию. Если \mathbf{U} меняется в сечении канала, то вектор \mathbf{s} отклоняется от первоначального направления и волна деформируется.

Направим течение вдоль оси x плоского канала высотой $z = d$ и оценим суммарный угол поворота вектора \mathbf{s} в поле скорости $U(z)$. Вводя полярный ϑ и азимутальный φ направляющие углы вектора \mathbf{s} и индекс 0 для их начальных значений, а также заменяя скорость $U(z)$ числом Маха $M(z)$, после интегрирования (2) получаем ($M \ll 1$)

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M(z); \\ \sin \vartheta \sin \varphi = \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0. \quad (3)$$

Решение уравнений (3) определяет направляющие углы $\{\vartheta, \varphi\}$ вектора \mathbf{s} в зависимости от его начальной ориентации $\{\vartheta_0, \varphi_0\}$ и координаты z для заданного распределения скорости $M(z)$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M^2(z)}, \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \vartheta_0 \sin \varphi_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M^2(z)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Зная ориентацию $\{\vartheta, \varphi\}$ единичного вектора \mathbf{s} , можно вычислить траекторию пробной точки волны в канале. Вначале найдем зависимость координат этой пробной точки $\{\xi, \eta, \zeta\}$ от пройденного пути l при движении волны в полупространстве, т.е. без учета верхней стенки. В соответствии с (4) положение точки относительно центра волны определяет система параметрических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dl} &= \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M(z), \\ \frac{d\eta}{dl} &= \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \\ \frac{d\zeta}{dl} &= \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)}, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &> a^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Переходя к распространению волны в канале, примем во внимание, что возмущение может возникать в произвольной точке $\mathbf{rp}\{x_p, y_p, z_p\}$ любой стенки с задержкой tp относительно $t = 0$. Перейдем также к безразмерным переменным, используя в качестве масштабов высоту d для расстояний и отношение c/d для времени. Число n отражений волны от стенок можно выразить через ординату ξ : $n = \text{In}(\xi)$ [3]. Тогда для координат $\{x, y, z\}$ пробной точки в канале с учетом отражений система уравнений (5) примет вид

$$\begin{aligned} x &= x_p + \int_0^{l-tp} (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M(z)) dl, \\ y &= y_p + \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 (l - tp), \\ z &= z_p + \int_0^{l-tp} \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)} \right. \\ &\quad \left. - 2\text{In} \left[\frac{n+1}{2} (-1)^{n+z_p} \right] \right) dl, \\ n &= \text{In} \left[(l - tp) \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)} \right], \\ (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2 &> a^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) определяют положение пробной точки волны в зависимости от пройденного волной пути l с учетом места $\mathbf{rp}\{x_p, y_p, z_p\}$ и времени tp возникновения возмущения радиуса a . Вектор пульсаций параметра в пробной точке находится при совместном решении (6) и (1). При этом в выражении (1) следует учесть, что из-за отражений расстояние l_0 до точки наблюдения меняется на l_n , а амплитуда волны уменьшается в $(1 - \alpha)^n$ раз, т.е. при $|l_n - ct| \leq a$

$$u, p, \rho \sim (1 - \alpha)^n f \left(\frac{l_n - ct}{a} \right) \frac{1}{ct}. \quad (1a)$$

Конфигурацию волнового фронта и поле вектора пульсаций дает вариация направляющих углов в пределах $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ и $\vartheta_0 \in [0, \pi/2]$, а эволюцию поля пульсаций — изменение значения l . При этом пределы для переменных $\{x, y, z\}$ должны отвечать профилю канала.

Когда параметры \mathbf{rp} и tp являются последовательностями, уравнения (6) описывают эволюцию структуры волновых фронтов возмущений в канале, а совместное решение (6) и (1a) дает пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров течения в канале. Современные математические пакеты, такие как Mathematica 4, позволяют вычислить это поле.

Волны в поле сильного градиента скорости течения

Для определенности профиль скорости течения в канале представим формулой

$$M(z) = M_0 [4z(1-z)]^{1/m}, \quad (7)$$

где m — параметр, характеризующий режим течения.

Для ламинарного режима $m = 1$, при турбулентном течении $m \gg 1$ (например, $m = 5$), при постоянной по сечению скорости $m = \infty$. Как следует из (4), в поле $M(z)$ траектория вектора \mathbf{s} отклоняется от прямой линии. Отклонение зависит от расстояния l , которое он проходит в слое сильного градиента скорости толщиной δ .

Выражение для градиента скорости потока дает дифференцирование формулы (7)

$$\frac{d}{dz} M(z) = M_0 \frac{\sqrt[m]{4}}{m} \frac{1-2z}{(z(1-z))^{m-1}}. \quad (8)$$

Согласно (8), при ламинарном течении ($m = 1$) этот градиент мал и соответственно отклонение траектории незначительно. При турбулентном режиме в ядре течения градиент скорости практически отсутствует, но он резко возрастает у стенок в тонком слое толщиной δ . Например, в турбулентном потоке при $m = 5$ и $M_0 \sim 0.15$ на границе этого слоя ($z = 0.03$) градиент увеличивается по сравнению с ламинарным случаем ($m = 1, M_0 \sim 0.005$) в 30 раз.

Чтобы представить результаты в наглядной форме, рассмотрим эволюцию звуковых лучей в сечении $y = 0$, где $\varphi = 0$ и эффект изгиба луча выражен наиболее заметно. В этих условиях соотношения (4) упрощаются и для ориентации вектора \mathbf{s} из (4) и (7) получаем

$$\vartheta = \arcsin(\sin \vartheta_0 + M_0[4z(1-z)]^{1/m}). \quad (9)$$

В направлении больших углов ϑ_0 , у стенки канала, длина траектории в слое δ быстро растет с увеличением угла, $l_0 = \delta / \cos \vartheta_0$. Изгиб траектории резко усиливает этот рост $l \gg l_0$, и для углов, близких к $\pi/2$, существует такое ϑ_0 , при котором траектория удаляется от стенки на расстояние, не превышающее некоторого значения z_* . Из условия $\vartheta = \pi/2$ найдем зависимость z_* от угла ϑ_0 и параметров течения $z_*(m, M_0, \vartheta_0)$ (знак „минус“ перед корнем отвечает нижней стенке канала)

$$z_* = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sin \vartheta_*}{M_0} \right)^m} \right). \quad (10)$$

Как было показано в [3], при ламинарном течении почти для всех углов ϑ_0 траектории вектора \mathbf{s} выглядят как прямые линии, которые для значений $m = 1$ и $m = \infty$ практически совпадают. В случае турбулентного режима наблюдается иная картина. При $\vartheta_0 < \vartheta_*$ величина z_* имеет мнимое значение, траектории остаются прямыми и фронт волны сохраняет сферическую симметрию. Но на границе области $\vartheta_0 \geq \vartheta_*$ величина z_* оказывается действительным числом и траектории меняют свою форму. Поскольку этот случай имеет важное значение, обсудим его подробнее.

Если z_* оказывается действительным числом, то пробная точка волны, двигаясь по восходящей ветви траектории, достигает максимума при $z = z_*$ ($\vartheta = \pi/2$). Пройдя максимум, она возвращается к стенке, описывая дугу. Так как дугообразная кривая симметрична относительно линии $z = z_*$ и абсолютное значение угла падения $|\vartheta - \vartheta_0|$ этого луча равно углу ϑ_0 его отражения, цикл повторяется. Циклическое движение продолжается до полного затухания волны.

Рассмотрим траектории с углами ϑ_0 , достаточно большими, но лежащими вне зоны непосредственной близости к $\pi/2$. Пусть волна распространяется в потоке, соответствующем турбулентному течению с параметрами $M_0 = 0.05$, $m = 5$. Чтобы избежать перегрузки рисунка излишними деталями, но отразить существенные особенности процесса, ограничим слой у стенки высотой $z \in [0, 0.1]$, пройденный волной путь — длиной $l \approx 1.2$, а начальные направления лучей зададим значениями углов $\vartheta_0 = 70, 73, 75, 76$ и 77° . Траектории для указанных углов построены на рис. 1.

Как ясно из предыдущего и из рис. 1, траектория с начальной ориентацией $\vartheta_0 = 70^\circ$ уходит в ядро течения, сохраняя направление практически неизменным. Луч с углом $\vartheta_0 = 73^\circ$ описывает траекторию, цикл которой составляет длину $l \approx 4.5$ и высоту $z_* \approx 0.15$. Ясно,

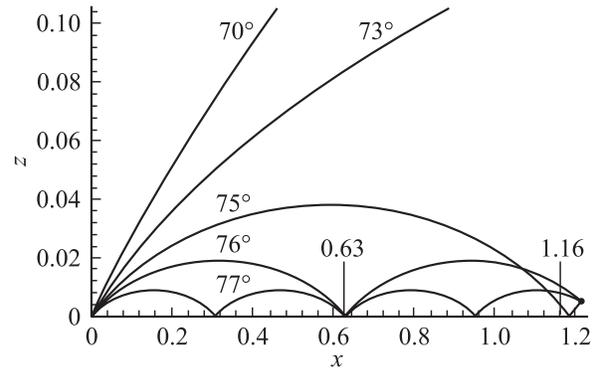


Рис. 1. Распространение звуковых лучей у стенки для углов $\vartheta_0 = 70, 73, 75, 76$ и 77° .

что при такой длине возмущение затухает, не дойдя до конца одного цикла. В выделенном слое остаются траектории с начальными углами $\vartheta_0 = \{75, 76, 77^\circ\}$. Их распространение обнаруживает важные особенности.

Первая особенность состоит в том, что на длине пути $l = 1.2$ траектории в зависимости от угла ϑ_0 образуют от двух до четырех циклов. Соответственно траектории переплетаются. Например, в сечении $x = 1.16$ вместо ожидаемого расположения лучей в порядке $77-76-75^\circ$ наблюдается последовательность $75-77-76^\circ$. В волне, конечно, угол ϑ_0 меняется непрерывно, и при $\vartheta_0 \geq 75^\circ$ в слое высотой $z_*(75^\circ) \approx 0.04$ происходит полное перемешивание лучей.

В области перемешивания, как и в ядре течения, взаимодействие волн формирует свое пространственно-временное поле пульсаций, но характер пульсаций здесь меняется вследствие разрушения фронта волнового пакета, которое проявляется в перемешивании звуковых лучей.

Изменение механизма взаимодействия волн дает основание для выделения этой части из общего пространственно-временного поля пульсаций в отдельную область, которую можно отождествить с пограничным слоем. Его внутреннюю границу, обращенную к основному потоку, определяют траектории, вдоль которых возмущение не затухает по крайней мере в пределах одного цикла. В примере, приведенном на рис. 1, эта граница соответствует $z_*(\vartheta_0 = 75^\circ) \approx 0.04$.

Согласно рис. 1 ($m = 5$, $M_0 = 0.05$), через внутреннюю границу слоя в основное течение уходят траектории с начальным направлением $\vartheta_0 < 75^\circ$. Но в узкой области ϑ_0 при переходе от пограничного слоя к ядру потока траектории хотя в принципе и замыкаются на стенку, длина пути вдоль цикла оказывается столь значительной, что возмущение затухает, не доходя до стенки.

Выберем в качестве критерия затухания уменьшение амплитуды волны в 100 раз. Тогда возмущение с начальным размером, например, $2a = 0.1$ затухает на длине $l = 5$. На рис. 2 приведены решения уравнений (5) для $l = 5$ и углов $\vartheta_0 \in [72, 73^\circ]$ с шагом $\Delta\vartheta_0 = 0.1^\circ$, которые изображают участки траекторий вихреобразной формы.

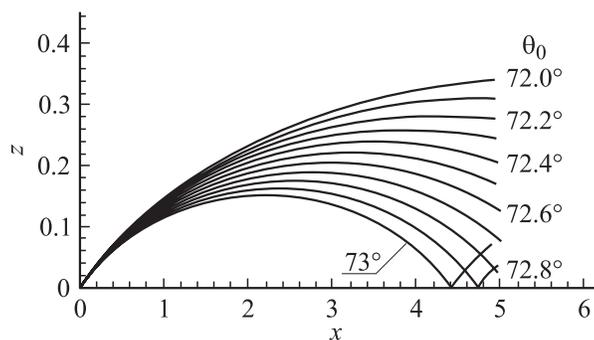


Рис. 2. Вид траекторий в области перехода к пограничному слою.

Но рис. 2 дает лишь упрощенную картину вихреобразования, поскольку на нем приведено только семейство траекторий, лежащих в плоскости $\varphi = 0$. Для лучей вне этой плоскости продольная составляющая скорости волны зависит от $\cos \varphi$ и уменьшается, становясь переменной величиной. При этом возрастает кривизна траекторий и в структуре их семейства появляются траектории с большей кривизной. Заметим, что основным параметром, влияющим на характер вихреподобных траекторий, является число Маха (несмотря на условие $M_0 \ll 1$).

На внешней стороне пограничного слоя, в узкой полоске, непосредственно прилегающей к поверхности стенки, проявляется другое свойство турбулентного течения. С пульсациями скорости в волновом пакете связан, как известно, удельный поток энергии cru^2 . При отражении пакета пульсации скорости на стенке исчезают и их энергия передается колебаниям давления и плотности. Исчезновение пульсаций скорости позволяет идентифицировать эту полоску у стенки как ламинарный подслей турбулентного пограничного слоя. Высота δ_L подслоя зависит от распределения гидродинамических параметров в первичном возмущении, которое было представлено функцией $f(r, t \leq a)$. Как нетрудно убедиться, для разных видов этой функции толщина подслоя может составлять $\delta_L \sim (0.1-0.2)a$.

Отметим еще одно следствие переплетения лучей в пограничном слое, которое связано с совпадением точек (зон) отражения лучей для разных углов ϑ_0 . На рис. 1 одна такая зона находится рядом с координатой $x = 0.63$. При отражении пакета падающая и отраженная волны взаимодействуют. В зоне взаимодействия $z \leq a$ вдвое увеличивается амплитуда пульсаций и одновременно в два раза уменьшается их частота. Те же самые изменения происходят с пульсациями плотности. Но колебания параметров в соседних секторах одной волны когерентны, и при совпадении зон их отражения взаимодействие не сводится к простой суперпозиции. Возникают нелинейные эффекты и пространственная угловая модуляция.

В этих условиях зоны высотой a , в которых одновременно отражаются элементарные волны с разными

углами ϑ_0 , сами становятся источниками новых первичных возмущений. Так как волны взаимодействуют в зоне переплетения лучей, что является основным признаком пограничного слоя, первичному возмущению можно приписать размер $a = z_*(\vartheta_*)$.

Итак, анализ физических процессов в области больших градиентов скорости течения позволил выявить механизмы формирования пограничного слоя, ламинарного подслоя и зоны вихреобразных движений турбулентного течения, а также дать им физические определения. Численные значения параметров зависят от длины пути l волны, которая определяется минимальной величиной пульсаций, необходимой для решения конкретной задачи.

Хаотизация поля пульсаций

Зависимости положения волнового фронта и пульсаций гидродинамических параметров в волне определяет решение, подчеркнем, линейного волнового уравнения. Эти зависимости можно интерпретировать как пространственно-временное поле волновой природы. Очевидно, что при распространении одной волны в пространстве это поле детерминировано и регулярно. В канале это поле включает возмущения, возникающие при отражении волны от стенок.

На кадрах рис. 3 представлено поле векторов пульсаций скорости для разных положений волнового фронта при распространении волны в плоскости $y = 0$ ядра течения плоскости канала.

На рис. 3 канал выглядит как белая полоса, пространство за пределами канала затенено. Пройденный волной путь l указан в правом верхнем углу затененной части каждого кадра. Длина вектора скорости соответствует амплитуде пульсаций. Как видно из диаграмм, по мере распространения волны вектор скорости пульсаций меняет направление согласно (5), а амплитуда постепенно убывает в соответствии с формулой (1a). Но пространственно-временное поле остается детерминированным и вполне регулярным, как и в свободном пространстве.

При распространении в канале многих волн в распределении скорости пульсаций не сразу угадываются правила их происхождения, хотя в действительности следуют определенному порядку и, как ясно из предыдущего, поддаются расчету. Процесс хаотизации пространственно-временного поля пульсаций скорости демонстрирует рис. 4 на примере распространения семи возмущений в сечении канала $y = 0$ при тех же прочих условиях. Состояние поля пульсаций представлено для двух пройденных волной расстояний $l = 0.2$ и 2.2 . Как и прежде, стрелки изображают векторы пульсаций скорости для $a = 0.03$, а их длина — амплитуды пульсаций в соответствующих точках волнового фронта. Сами волновые фронты на рисунке не показаны.

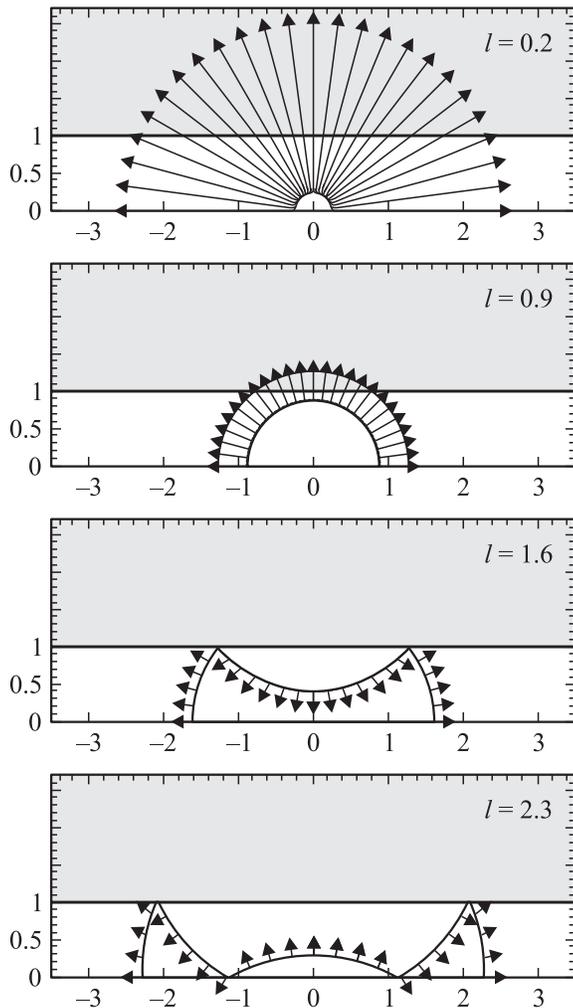


Рис. 3. Волновой фронт и пульсации скорости в плоскости $y = 0$ для разных значений l ($a = 0.03$).

На начальной стадии распространения семи волн (кадр $l = 0.2$) регулярность поля возмущений еще сохраняется. Но при $l = 2.2$ пульсации выглядят как хаотические. Заметим, однако, что поле векторов получено для разброса момента зарождения возмущений $tp \leq 0.2$, т.е. почти при одновременном возникновении волн, что вызвано лишь условиями визуализации векторов. Поэтому процесс хаотизации относится только к направлению пульсаций. В действительности диапазон зарождения возмущений пульсации будут отличаться не только по направлению, но и по амплитуде, что ясно из сопоставления верхнего и нижнего кадров рис. 4.

Для выяснения характера этого процесса проведем объемный анализ пульсаций в ядре течения плоского канала, представляя скорость в волновом пакете (1а) выражением

$$u = (1 - \alpha)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{l_n - t}{a}\right) \frac{l_n - t}{t}, \quad (1b)$$

где $a = 0.1$, $\alpha = 0.1$.

Численный коэффициент в выражении (1b) принят равным единице, поскольку в первую очередь нас интересуют изменения пульсаций скорости.

При распространении в канале многих волн для определения поля пульсаций необходимо учесть вклады возмущений, возникающих в разных местах поверхностей стенок и в разные моменты времени. При этом встает вопрос о стадии развития процесса формирования пульсаций. В дальнейшем мы ограничимся установившимся режимом. Если во время T наблюдения за процессом в потоке возникает k возмущений с временем жизни τ , то в канале в среднем постоянно будет находиться $k n \tau / T$ отраженных волн. Обратная величина означает разрешение β процесса во времени или в пространстве.

Определение времени установления структуры пульсаций аналогично задаче о нахождении уровня воды в сосуде при постоянном в среднем ее поступлении и при скорости истечения, зависящей от высоты этого уровня. Баланс между рождением и затуханием волн определится выражением типа $\exp(-t/\tau)$. Режим можно считать установившимся с момента времени $t_1 = 3\tau$, когда число волн, одновременно находящихся в канале, отличается от полностью равновесного не более чем на 5%.

Для описания свойств пространственно-временного поля пульсаций в эксперименте обычно регистрируют пульсации во времени в фиксированной точке канала или получают мгновенную фотографию распределения возмущений в каком-нибудь направлении. Рассмотрим вначале пульсации в фиксированной точке на примере скорости. В период динамического равновесия пульсаций в выбранной точке интервал времени наблюдения за процессом должен удовлетворять условиям $t \in [t_1, t_2]$, где $t_1 = 3\tau$, и $t_2 \leq T$. Величина исследуемого объема канала тоже должна отвечать условию динамического равновесия пульсаций в месте наблюдения. Для этого достаточно учесть только возмущения, которые удалены от точки наблюдения не дальше расстояния, эквивалентного времени жизни

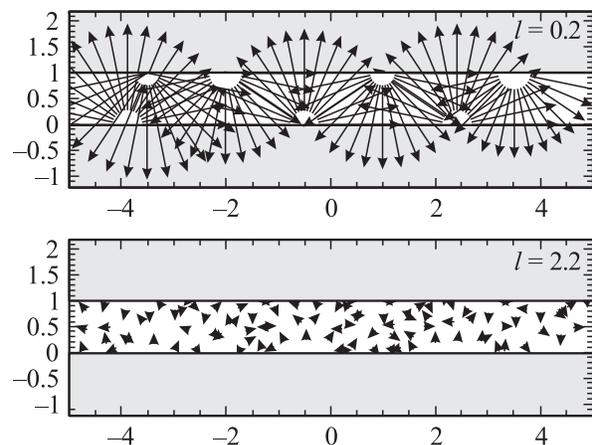


Рис. 4. Семь волн и создаваемые ими пульсации скорости в канале для двух значений l .

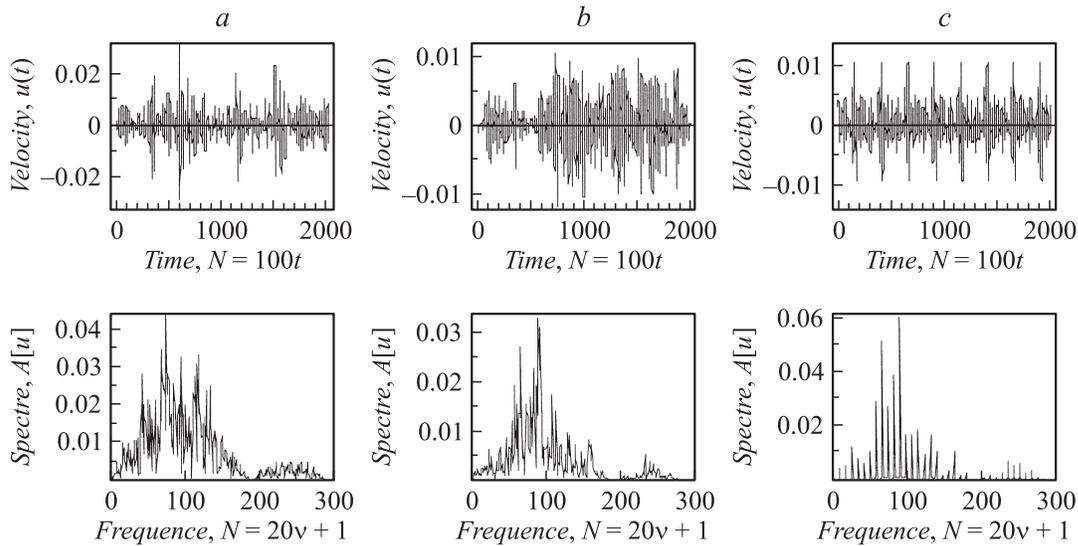


Рис. 5. Пульсации скорости и спектры в точке $x = y = 10, z = 0.7$ на интервале $t \in [30, 50]$: случайные \mathbf{r} и tp (a), 5 заданных \mathbf{r} при случайных tp (b), 5 точек \mathbf{r} с периодом $tp = T/20$ (c).

волны τ . Отсюда при $\tau = 10$ получаем границы объема $\{[x_1, x_2], [y_1, y_2], [z_1, z_2]\} \in \{[0, 20], [0, 20], (0, 1)\}$ с центром в точке $x = y = 10$. Пульсации в точке $\{x, y, z\}$ находим согласно (6), (1b) суммированием по всем k возмущениям и их отражениям от стенок кусочно-гладкой функции: $u(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2, xp, yp, zp, tp, x, y, z, n, k, \tau, T)$.

В примере, который здесь приводится, принято значение $k = 100$. Точка наблюдения задана координатами $\{x, y, z\} = \{10, 10, 0.7\}$, исследуемый период — промежутком $[t_1, t_2] = [30, 50]$ при длительности процесса $T = 50$. При $a = \alpha = 0.1$ и $\tau = 10$ амплитуда пульсаций уменьшается за время жизни примерно в 300 раз. Для наших целей пульсациями меньшей амплитуды можно пренебречь. При численном определении пульсаций полное время T (наблюдение за процессом) разбивалось на $N = 2000$ интервалов. Для расчетов пульсаций необходимо также выбрать вид последовательностей \mathbf{r} и tp . Реальное значение имеют варианты, когда возмущения возникают в случайных или фиксированных точках \mathbf{r} , а моменты времени tp могут быть как случайными, так и периодическими, или квазипериодическими. Пульсации скорости и спектры для трех типов последовательностей \mathbf{r} и tp приведены на рис. 5.

На верхних графиках показаны зависимости скорости от времени $u(t)$, внизу — спектры пульсаций скорости в виде функции частоты $A(\nu)$. Время и частота представлены числом N интервалов согласно $N = 100t$ и $N = 20\nu + 1$. В соответствии с правилами преобразования Фурье число разрешаемых элементов спектра сокращается вдвое. Графики на рис. 5, a получены для случайных значений последовательностей \mathbf{r} и tp . Рис. 5, b представляет вариант, в котором возмущения в каждой из пяти равномерно расположенных точек возникают в случайные моменты времени. Вариант рис. 5, c отлича-

ется от предыдущего тем, что последовательность tp также упорядочена и имеет период $0.05 T$.

Найдем теперь пространственное распределение скорости и пространственный спектр по оси x в тех же условиях, в объеме $\{0-20, 0-20, 0-1\}$ в момент $t = T = 50$. Зависимость пульсаций от координат выбранного отрезка r определяется суммированием кусочно-гладкой функции $u(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2, xp, yp, zp, tp, x, y, z, r, n, k, \tau, T)$ по k волнам для последовательности точек выделенного отрезка. Однако, чтобы обеспечить ту же удельную плотность возмущений на отрезке, необходимо учесть краевой эффект. Для этого увеличим протяженность области зарождения возмущений с каждой стороны на расстояние, соответствующее времени жизни волны, и скорректируем число возмущений. В случае $\tau = r = 10$ это дает $k = 200$ и рабочий объем $\{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\} = \{0-40, 0-20, 0-1\}$. Структуры пульсаций приведены на рис. 6.

Пульсации скорости в зависимости от длины отрезка приведены в интервале $x \in [10, 30]$ с шагом $\delta x = 0.01$ для значений $y = 10, z = 0.7$ и $T = 50$. На верхних графиках приведены распределения скорости $u(x)$, на нижних — их спектры. Длина и пространственная частота выражены числом N разрешаемых элементов согласно соотношениям $N = 100t$ и $N = 20\nu + 1$. Выбранное разрешение β отвечает спектральному диапазону $N = 1000$ (полосе частот $\nu = 50$), но спектры на графиках ограничены наиболее информативной частью, составляющей $\nu \approx 15$. Свойства последовательностей \mathbf{r} и tp соответственно на рис. 6, a-c и 5, a-c идентичны.

Как показывает сопоставление рис. 5 и 6, пространственные характеристики пульсаций похожи на свойства пульсаций во времени. Максимумы огибающих расположены на частоте $\nu = 1/2a$. В спектрах видны отдельные линии. Первая такая линия расположена на частоте

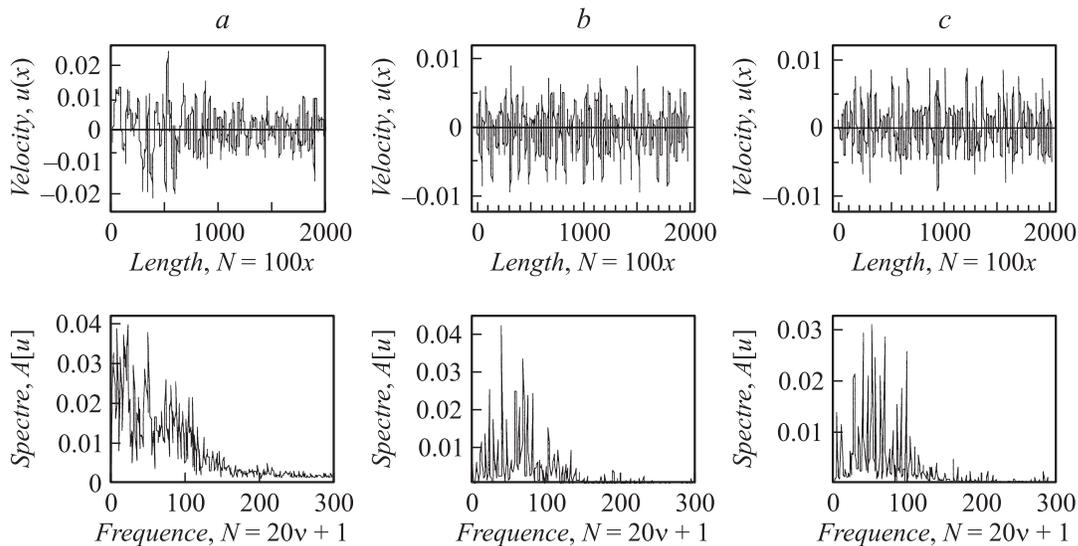


Рис. 6. Структура пульсаций вдоль линии $x \in [10, 30]$, $y = 10$, $z = 0.7$ в момент времени $T = 50$: случайные gp и tp (a), 5 заданных gp при случайных tp (b), 5 точек gp с периодом $tp = T/20$ (c).

$\nu = 2$, что совпадает со средней частотой зарождения возмущений. Но есть и различия. В низкочастотной (длинноволновой) области плотность пространственных спектров значительно превосходит плотность спектров во времени. Это различие вполне объяснимо.

Характерная частота в фиксированной точке связана с толщиной $2a$ волнового пакета. Плотность спектра на других частотах зависит от длины когерентности цуга пульсаций, участвующих в суперпозиции. Но в точке наблюдения возможность увеличения длины цуга свыше $2a$ уменьшается, что и приводит к падению плотности спектра в области низких частот (рис. 5). При пересечении же волной отрезка, на котором изучается пространственный спектр, длина когерентности автоматически возрастает с увеличением радиуса волнового пакета.

Как ясно из рис. 5 и 6, существует другая особенность пульсаций. Она состоит в том, что графики a – c отличаются контрастом спектральных линий, т.е. регулярностью пульсаций. Вообще говоря, нерегулярность поля волновой природы может быть обусловлена разными причинами: нелинейностью волнового уравнения, формой границ канала, граничными значениями поля, т.е. функцией источников возмущений. В нашем случае исследуются решения линейного волнового уравнения. Поэтому причину нерегулярности поля пульсаций следует искать в закономерности последовательностей gp и tp возникновения возмущений и в условиях, когда форма границ канала аналогична бильярду Синая, в котором роль кривых границ играет кривизна фронта волны.

Нерегулярное волновое поле может быть стохастическим или случайным. Внешне стохастический процесс не отличается от реализации случайного. Оба они имеют сплошной спектр Фурье и спадающую автокорреляционную функцию. Однако стохастический процесс в отли-

чие от случайного генерируется системой с конечным числом степеней свободы.

Как отмечалось, на свойства пульсаций влияет характер последовательностей gp и tp . При случайном распределении возмущений в последовательностях gp и tp (графики a на рис. 5 и 6) для пульсаций характерен непрерывный спектр, на фоне которого видны отдельные максимумы. Для упорядоченной последовательности gp при случайном распределении tp (графики b) полуширина спектра сужается и заметно возрастает изоляция максимумов. Для возмущений с полной упорядоченностью последовательностей gp и tp отдельные максимумы становятся в спектре доминирующими, а в случае рис. 5, c спектр фактически состоит из отдельных линий.

В спектре рис. 5, c присутствуют 23 линии со средним частотным сдвигом, составляющим 0.4. Величина сдвига определяется постоянной частотой зарождения группы из 5 возмущений с периодическим распределением в последовательности gp . Этот спектр описывает периодические колебания скорости, которые в точке наблюдения можно считать регулярными. Интересно отметить, что непрерывная часть соответствующего ему пространственного спектра (рис. 6, c) более заметна и распределение пульсаций вдоль оси x является скорее стохастическим.

Таким образом, степень упорядоченности пульсаций зависит от вида последовательностей gp и tp . Существует два крайних состояния пульсаций. При случайном зарождении первичных возмущений пульсации в точках наблюдения несут случайный характер. При полностью упорядоченном зарождении возмущений в точках наблюдения исследуемого объема колебания скорости становятся регулярными. Но быстрые изменения поля пульсаций, обусловленные высокой скоростью звуковой волны и разнообразием конфигураций возмущений,

создают впечатление хаотичности пульсаций, даже если в действительности они регулярны. Отметим, что по заданным параметрам процесса можно построить пространственно-временное поле пульсаций. С другой стороны, сильная зависимость спектров от начальных условий позволяет решить обратную задачу и по имеющимся спектрам определить эти условия.

Перераспределение компонент пульсаций

С распространением волнового пакета в поле градиента скорости течения связано еще одно интересное свойство пульсаций, которое проявляется в изменении отношения их компонент. В ядре течения, где можно пренебречь градиентами скорости и использовать прямолинейность траекторий, система уравнений (6) превращается в систему алгебраических уравнений. Прямолинейность траекторий означает, что прямые и отраженные волны с произвольной начальной локализацией участвуют в суперпозиции в любой точке канала. Единственным критерием для оценки вклада волны в возмущение параметров является ее затухание, т.е. расстояние l до точки наблюдения в направлении соответствующего луча.

Сложный профиль скорости течения в пограничном слое вносит значительные изменения в характер распространения волны. В этом случае суперпозиция волн тоже формирует пространственно-временное поле пульсаций. Но в суперпозиции участвуют волны, траектории которых искривляются, и соответственно их вклад в возмущение параметров в заданной точке начинает сложным образом зависеть от целого ряда факторов. Следующие факторы имеют значение. Выше или ниже по течению расположена точка зарождения возмущения относительно точки наблюдения. Каково расстояние между этими двумя точками и, наконец, каково удаление места наблюдения от стенки? Рассмотрим указанные процессы в сечении $y = 0$ плоского канала.

Через точку $z = z_*$ проходит сколько угодно траекторий с разными начальными значениями x_p , но для каждого z_* существует предельное расстояние x_* , за которым восходящие траектории в эту точку z_* не попадают. Предельная траектория имеет предельный начальный наклон ϑ_* , который зависит от M_0 и m . Но в точку z_* приходят волны не только по восходящей ветви траекторий, но и по нисходящей. Последние тоже участвуют в суперпозиции и формировании пространственно-временного поля пульсаций. Однако длина пути вдоль таких траекторий увеличивается, а их роль в возмущении гидродинамических параметров становится зависящей от положения точки наблюдения относительно стенки. И что существенно, изменение наклона лучей ϑ вызывает перераспределение между вкладом возмущений в компоненты пульсаций.

Поясним сказанное на примере потока с параметрами $M_0 = 0.05$ и $m = 5$, сопоставляя суперпозицию возмущений в точках: $\{x, z\} = \{0, 0.5\}$ и $\{x, z\} = \{0, 0.1\}$.

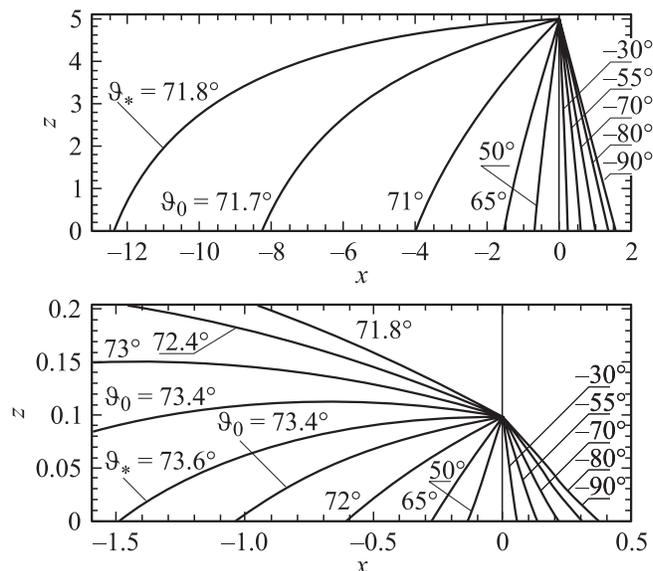


Рис. 7. Траектории лучей к точкам наблюдения $\{x, z\} = \{0, 0.5\}$ и $\{x, z\} = \{0, 0.1\}$.

Траектории лучей в этих точках построены на рис. 7. Для упрощения картины процесса примем во внимание только волны, берущие начало на нижней стенке. Учет отраженных волн не меняет общего хода рассуждений.

Как видно из рис. 7, влияние профиля скорости $M(z)$ проявляется прежде всего в том, что симметрия траекторий относительно точки наблюдения $x = 0$ нарушается. Возмущения, расположенные вниз по течению, справа от линии $x = 0$, имеют начальные координаты $x_p > 0$. Обозначим их через x_p^+ . Аналогично координаты области вверх по течению обозначим как x_p^- . Согласно рис. 7, возмущения из области x_p^+ усиливают компоненту u_z пульсаций по сравнению со случаем симметричных траекторий, а возмущения из области x_p^- усиливают компоненту u_x .

Из области x_p^+ в точку наблюдения попадают элементы волн с начальной ориентацией траекторий во всем диапазоне углов $\vartheta_0 \in [0, -90^\circ]$. Начальная ориентация лучей, приходящих в эту точку из области x_p^- , ограничена значениями ϑ_0 , близкими к ϑ_* , $\vartheta_0 \in [0, \sim \vartheta_*]$. Но по протяженности область x_p^- значительно превышает область x_p^+ . Соответственно учет профиля скорости течения при равномерном распределении \mathbf{r}_p возмущений по поверхности стенки даст преимущественную ориентацию вектора пульсаций \mathbf{u} в направлении потока \mathbf{U} .

Именно эта тенденция обнаружена в опытах Г. Райхардта [5] с каналом и П.С. Клебанова [6] с плоской пластинкой [7, гл. 18, §4]. Г. Райхардт измерял пульсации в воздушном потоке в канале прямоугольного поперечного сечения шириной 1 м и высотой 24.4 см. Число Маха составляло $M_0 = 0.003$ ($U_0 = 100$ см/с), число Рейнольдса превышало 10^4 . Измеренные им распределения квадратичных средних продольных $\sqrt{u^2}$ и поперечных $\sqrt{w^2}$ пульсаций приведены на рис. 8 (слева) как отношение к максимуму продольных пульсаций $(\sqrt{u^2})_{\max}$.

Измерения показывают, что поперечная компонента пульсаций слабо зависит от z , тогда как продольная компонента имеет на расстоянии $\delta \approx 0.03$ от стенки резкий максимум. Этот результат, до сих пор не получивший должного объяснения, естественным образом интерпретируется на основе волнового механизма турбулентности. Более того, в рамках этого механизма имеется возможность количественно описать компоненты пульсаций.

Используя соотношение (1b), запишем компоненты пульсаций скорости в виде

$$\begin{aligned} u &\sim f\left(\frac{l_n - l}{a}\right) \sin(\vartheta)/l, \\ w &\sim f\left(\frac{l_n - l}{a}\right) \cos(\vartheta)/l. \end{aligned} \quad (11)$$

Входящие в (11) переменные означают: l — пройденное волной расстояние, l_n — расстояние до точки наблюдения, ϑ — угол наклона луча в этой точке, $a = \delta$ — характерный размер первичного возмущения. Их значения можно рассчитать, решая приведенные уравнения (6), (1b). Но в целях демонстрации метода получим аналитические выражения для компонент, несколько упростив схему расчета. Для этого исключим из рассмотрения отраженные волны и заменим дуговую траекторию, соединяющую точки $\{xp - x, z = 0\}$ и $\{xp = x, z\}$ прямой линией. Выбор координаты x точки наблюдения произволен, ордината z изменяется в пределах полувисоты канала.

Распределение xp вдоль оси x считаем равномерным, а положение первичного возмущения ограничим пределами $xp \in [-10, 10]$. Вне этого интервала значение пульсаций скорости уменьшается более чем в $(xp/\delta) = 330$ раз, и в наших целях им можно пренебречь. Тогда зависимость среднеквадратичных значений компонент пульсаций от координаты z найдем, выражая входящие в соотношения (11) величины через xp и z ,

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2} &\sim \sqrt{2 \int_0^{10} \left(\frac{(1 + \varepsilon)xp}{xp^2 + (z + a)^2} \right)^2 d(xp)}, \\ \sqrt{w^2} &\sim \sqrt{2 \int_0^{10} \left(\frac{(1 - \varepsilon)xp}{xp^2 + (z + a)^2} \right)^2 d(xp)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь коэффициент ε введен для компенсации искажения вкладов в пульсации за счет изгиба траекторий под действием градиента скорости потока. Параметр a в знаменателе учитывает тот факт, что (1) справедливо вне пограничного слоя и при интегрировании уравнений (6) следует полагать $z > a$. При построении графиков учтено, что в объеме первичного возмущения поле скоростей падает от его наибольшего значения при $z = a$ до нуля при $z = l = 0$. Этот тип распределения

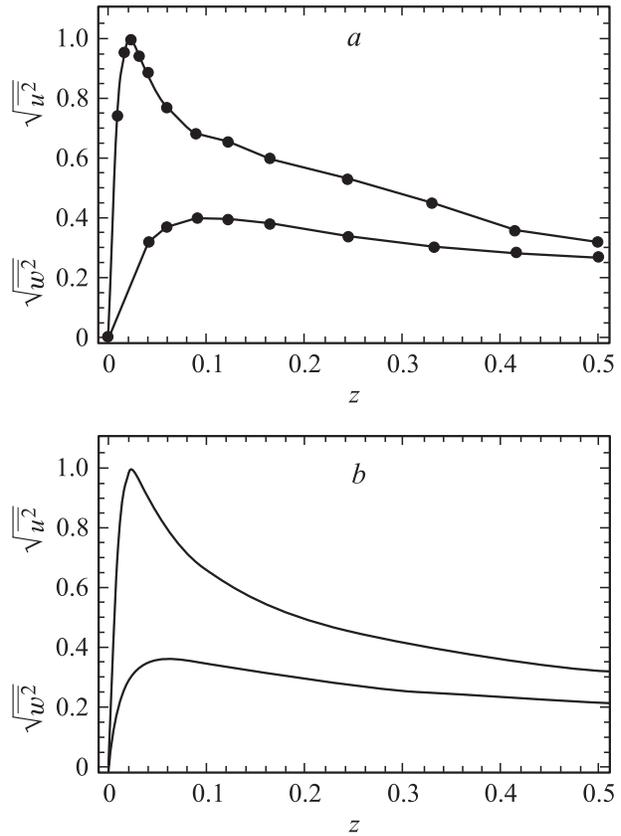


Рис. 8. Изменения продольных $\sqrt{u^2}$ и поперечных $\sqrt{w^2}$ пульсаций скорости в канале. *a* — эксперимент Г. Рейхардта, *b* — расчет пульсаций по упрощенной схеме.

пульсаций сохраняется при суперпозиции серии возмущений, составляющих пограничный слой.

Компоненты пульсаций, найденные по формулам (12), представлены на рис. 8 справа. В расчетах принято значение коэффициента $\varepsilon = 0.2$. Сопоставляя графики на рис. 8, заключаем, что модельные зависимости вполне удовлетворительно описывают результаты измерений. Заметим, значение $\varepsilon = 0.2$ является результатом весьма грубой аппроксимации. Используя величину экспериментального отношения пульсаций разной ориентации, значение ε можно уточнить. Но ε зависит от xp и z , поэтому при необходимости более точного расчета компонент пульсаций пользоваться соотношениями (12) вместо решения системы (1) и (6) нецелесообразно.

Заключение

Чтобы составить представление о реальности процессов, лежащих в основе предлагаемого механизма, оценим параметры звуковой волны, которая способна создать наблюдаемые турбулентные пульсации. Согласно результатам измерений Г. Райхардта, поток воздуха имел скорость $U = 100$ см/с, а пульсации скорости $u \sim 5$ см/с. В звуковой волне пульсации скорости u и давления p связаны между собой соотношением $u/c = p/p_0$ [4],

откуда следует, что $p/p_0 \approx 10^{-4}$. Тогда для воздуха атмосферного давления ($p_0 \sim 10^5$ Па) находим $p \approx 10$ Па, или ~ 0.1 mm Hg. Полученные из эксперимента значения $u \sim 5$ cm/s и $p \approx 10$ Па не являются сколько-нибудь экзотическими. Звуковые волны с пульсациями такого уровня создаются человеческим голосом.

Развиваемая волновая концепция турбулентных пульсаций основана на принципе суперпозиции акустических волн. Так как в ней не используются никакие дополнительные ограничения, она может быть применена для изучения структуры пульсаций в самых разнообразных условиях, например в низкотемпературной плазме, где существуют ионно-звуковые волны.

Список литературы

- [1] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 1. С. 191–203.
- [2] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. Вып. 4. С. 665–684.
- [3] Пятницкий Л.Н. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 9–17.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [5] Reichardt H. Messungen turbulenter Schwankungen Naturwissenschaften 404. 1938.
- [6] Klebanoff P.S. Characteristics of Turbulence in Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. NASA. Rep. 1247. 1955.
- [7] Шлихтинг Г. // Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М.: Наука, 1969.