

01;03

О внутреннем нелинейном резонансе капиллярных осцилляций заряженной капли в диэлектрической среде при многомодовой начальной деформации границы раздела сред

© М.В. Рыбакова, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 июня 2003 г.)

Найдено во втором порядке теории возмущений аналитическое выражение для образующей формы нелинейно осциллирующей заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в идеальной несжимаемой диэлектрической среде при многомодовой начальной деформации, содержащее резонансные (имеющие малые знаменатели) слагаемые. Учет наличия внешней среды проявляется как в изменении количества резонансных ситуаций при варьировании отношения плотностей среды и капли, так и в изменении величины собственного заряда капли, при котором реализуется резонанс. Выяснилось, что нелинейные осцилляции могут иметь резонансный вид даже при зарядах капли, далеких от соответствующих точным положениям резонансных ситуаций, что объясняется относительно слабым влиянием собственного заряда капель (при докритических по Рэлею его значениях) на частоты высоких мод осцилляций.

Задача исследования осцилляций и устойчивости заряженных капель представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, [1] и указанную там литературу). Весьма часто в приложениях приходится иметь дело с осцилляциями капли, взвешенной или движущейся в другой не смешивающейся в ней жидкости [2–9]. Исследования подобных систем в линейном по амплитуде осцилляций приближении проводились в различных постановках неоднократно [10–12]. Нелинейные же осцилляции капли в среде, несмотря на повышенный интерес последнего времени к нелинейным колебаниям капель [13–16], только недавно попали в поле зрения исследователей [17].

1. Будем решать задачу о расчете формы обладающей зарядом Q капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости плотностью ρ_1 , совершающей нелинейные осцилляции в диэлектрической среде плотностью ρ_2 , которую будем принимать идеальной и несжимаемой. Пусть радиус капли в состоянии равновесия есть R , коэффициент межфазного натяжения — σ , диэлектрическая проницаемость среды — ϵ_* . Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре равновесной сферической капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_1 = \sigma = 1$. Примем, что осцилляции капли происходят в результате задания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной многомодовой деформации равновесной сферической формы, определяемой конечным спектром мод с номерами $i \in \mathbb{E}$, каждая из которых описывается соответствующим полиномом Лежандра $P_i(\mu)$, где $\mu \equiv \cos \theta$.

Полагая, что форма поверхности капли в процессе колебаний сохраняет осесимметричность, запишем урав-

нение границы раздела сред в виде

$$r(\theta, t) = -1 + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1; \quad (1)$$

где r, θ — сферические координаты; $\xi(\theta, t)$ — функция, описывающая деформацию межфазной сферической границы раздела, связанную с ее осцилляциями.

Движения жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными с потенциалами полей скоростей $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка поставленной задачи состоит из уравнений Лапласа для гидродинамических и электростатического потенциалов

$$\Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad j = 1, 2; \quad \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad |\text{grad} \Phi(\mathbf{r}, t)| \rightarrow 0; \quad (4)$$

граничных условий на поверхности раздела сред (1)

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \quad (j = 1, 2); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}; \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi_1)^2 + P_0^{(1)} + P_E - P_\sigma = -\rho \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla \psi_2)^2 + P_0^{(2)}; \quad (7)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t). \quad (8)$$

дополнительных условий неизменности заряда и постоянства объема капли

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \varepsilon_* (\mathbf{ngrad} \Phi) r(\theta, t)^2 \sin \theta d\theta d\phi = Q;$$

$$S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t)! \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (10)$$

и начальных условий

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 \cdot P_0(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i \cdot P_i(\mu);$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

В выписанных математических соотношениях $P_0^{(j)}$ — давление в капле ($j = 1$) и в среде ($j = 2$) в состоянии равновесия; $P_E = \varepsilon_* (\mathbf{grad} \Phi)^2 / 8\pi$ — давление электрического поля на границу раздела сред $P_\sigma = \mathbf{div} \mathbf{n}$ — лапласовское давление; \mathbf{n} — единичный вектор положительной нормали к поверхности капли; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электростатического поля собственного заряда капли во внешней среде; $\Phi_s(t)$ — постоянное вдоль поверхности капли значение электростатического потенциала; $\rho = \rho_2 / \rho_1$; ε — амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; h_i — парциальный вклад i -й колебательной моды в форму начального возмущения

$$\sum_{i \in \Xi} h_i = 1;$$

ξ_0 — константа, определяемая из условия неизменности объема капли и с точностью до слагаемых второго порядка малости, равная

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i + 1)} + O(\varepsilon^3).$$

Полная система уравнений, описывающая решаемую задачу, должна содержать условие неподвижности центра масс всей системы. В случае наличия внешней среды это условие записывается в виде

$$\frac{\int_{\Omega} \int_0^{r(\theta,t)} \mathbf{r} \cdot r^2 dr d\Omega + \rho \int_{\Omega} \int_{r(\theta,t)}^L \mathbf{r} \cdot r^2 dr d\Omega}{\int_{\Omega} \int_0^{r(\theta,t)} r^2 dr d\Omega + \rho \int_{\Omega} \int_{r(\theta,t)}^L r^2 dr d\Omega} = 0, \quad (12)$$

где L — характерный линейный размер пространства, занятого внешней средой ($L \gg 1$); $d\Omega$ — элемент телесного угла.

При рассмотрении задачи об осцилляциях поверхности капли в вакууме ($\rho = 0$) условия (10) и (12) накладывали дополнительные ограничения на амплитуды нулевой (объемной) и первой (трансляционной) мод соответственно в разложении уравнения образующей форму поверхности капли в ряд по полиномам Лежандра. Эти ограничения полностью согласовались с системой (2)–(11) (т.е. выражение для амплитуды, например, трансляционной моды, получаемое из условия неподвижности центра масс, совпадало с получаемым из системы граничных условий). Для случая капли, помещенной во внешнюю среду, роль условия (10) сохраняется (и связано это с модельными предположениями о несжимаемости обеих сред). В то же время несложно заметить, что, выбирая достаточно большим линейный размер внешней среды L , равенство (12) можно сделать справедливым со сколь угодно большой степенью точности для произвольной функции $r(\theta, t)$. Таким образом, в задаче об осцилляциях поверхности капли, находящейся во внешней среде достаточно большого, но конечного объема, условие неподвижности центра масс такой системы можно не ставить, так как оно выполняется автоматически. Амплитуда же первой (трансляционной) моды, как и всех колебательных мод ($n > 2$), определяется из граничных условий (5)–(7). Отметим, что возбуждение трансляционной моды имеет компенсационный смысл, т.е. компенсирует смещение центра масс капли, вносимое колебательными поверхностными модами.

2. Анализ задачи (2)–(11) проводился методом многих масштабов аналогично тому, как это делалось для капли в вакууме [13–16], с точностью до второго порядка малости. Все неизвестные функции представлялись в виде разложений по малому параметру ε .

$$\psi_1(r, \theta, t) = \varepsilon \cdot \psi_1^{(1)}(r, \theta, t) + \varepsilon^2 \cdot \psi_1^{(2)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \varepsilon \cdot \psi_2^{(1)}(r, \theta, t) + \varepsilon^2 \cdot \psi_2^{(2)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\theta, t) + O(\varepsilon^3), \quad (13)$$

и предполагалось, что они являются функциями двух временных масштабов: быстрого $T_0 = t$ и медленного $T_1 = \varepsilon \cdot t$. При этом производные по времени вычислялись следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложения (13) в задачу (2)–(11) и собирая слагаемые с одинаковыми степенями параметра ε , несложно получить краевые задачи различных порядков малости. Решение нулевого порядка описывает распределение электростатического поля в окрестности заряженной проводящей сферической капли

$$\Phi^{(0)}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_* r}$$

и баланс давлений на ее поверхности

$$P_0^{(1)} - P_0^{(2)} = 2 - Q^2 / (8\pi\epsilon_* r).$$

Очевидно, что зависимость функций $\psi_i^{(j)}(r, \theta, t)$ и $\Phi^{(j)}(r, \theta, t)$ ($i, j = 1, 2$) от пространственных координат определяется уравнениями Лапласа (2) с соответствующими условиями ограниченности (3) или (4)

$$\begin{aligned} \psi_1^{(j)}(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(j)}(T_0, T_1) r^n P_n(\cos \theta); \\ \psi_2^{(j)}(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(j)}(T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta); \\ \Phi^{(j)}(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(j)}(T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (14)$$

В виде разложения по полиномам Лежандра представим и функции $\xi^{(j)}(\theta, t)$ ($j = 1, 2$), описывающие форму поверхности осциллирующей капли

$$\xi^{(j)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(j)}(T_0, T_1) P_n(\cos \theta). \quad (15)$$

Следует отметить, что рассмотрение задачи с точностью до второго порядка малости позволяет определить зависимость эволюционных коэффициентов 1-го порядка от обоих временных масштабов T_0, T_1 : $D_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $G_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$, а зависимость функций 2-го порядка — только от медленного времени T_0 : $D_n^{(2)}(T_0)$, $G_n^{(2)}(T_0)$, $F_n^{(2)}(T_0)$, $M_n^{(2)}(T_0)$.

Из граничных и дополнительных условий (5)–(10) в первом порядке малости (учитывая решение нулевого порядка) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r}; \quad \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r}; \\ -\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial T_0} + \rho \cdot \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial T_0} & \\ -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{2Q}{\epsilon_*} \xi^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) &= -(2 + \Delta\Omega) \xi^{(1)}; \\ \Phi^{(1)} &= \frac{Q}{\epsilon_*} \xi^{(1)} + \Phi_s^{(1)}; \\ \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \sin \theta d\theta &= 0; \quad \int_0^\pi \xi^{(1)} \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку наибольший интерес представляет эволюция формы поверхности колеблющейся капли, то, подставляя в (16) разложения (14), (15) при $j = 1$, получим дифференциальное уравнение для коэффициентов $M_n^{(1)}$

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(1)} = 0, \quad (17)$$

общее решение которого записывается в виде

$$\begin{aligned} M_n^{(1)}(T_0, T_1) &= A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + (\text{к.с.}) \\ &= a_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0 + b_n^{(1)}(T_1)) + (\text{к.с.}). \end{aligned}$$

Здесь и далее через (к.с.) обозначены слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

Решение (18) содержит одну комплексную $A_n^{(1)}(T_1)$ или две действительные $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ произвольные функции, зависимость которых от временного масштаба T_1 определяется при решении задачи второго порядка малости. Величины ω_n имеют смысл собственных частот колебаний поверхности капли и определяются выражением

$$\omega_n^2 = \kappa_n n(n-1)[(n+2) - W]; \quad \kappa_n \equiv \left(1 + \frac{n\rho}{n+1} \right)^{-1}, \quad (19)$$

где $W \equiv Q^2 / (4\pi\epsilon_*)$ — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

Во втором порядке малости из условий (7)–(10) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} &= \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} & \\ &= \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta}; \\ -\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 & \\ + \rho \left[\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right. & \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\epsilon_*}{8\pi} \left\{ \frac{2Q^2}{\epsilon_*^2} [2\xi^{(2)} - 5(\xi^{(1)})^2] \right. & \\ \left. + \frac{2Q}{\epsilon_*} \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} - \left(2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} \right] - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right. & \\ \left. - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = -(2 + \Delta\Omega) \xi^{(2)} + 2\xi^{(1)}(1 + \Delta\Omega) \xi^{(1)}; & \\ \Phi^{(2)} = \frac{Q}{\epsilon_*} \xi^{(2)} - \frac{Q}{\epsilon_*} (\xi^{(1)})^2 - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \Phi_s^{(2)}; & \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} \right. & \\ \left. - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right] \sin \theta d\theta = 0; & \\ \int_0^\pi (\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2) \sin \theta d\theta = 0. & \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20), используя разложения (14), (15) и решение (18), можно вывести следующее неоднородное дифференциальное уравнение для эволюционных коэффициентов 2-го порядка $M_n^{(2)}$:

$$\frac{\partial^2 M_n^{(2)}}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)} = -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial T_1} \exp(i\omega_n T_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [\gamma_{kmn} + \omega_k \omega_m \eta_{kmn}] A_k^{(1)} A_m^{(1)} \exp(i(\omega_k + \omega_m) T_0) + [\gamma_{kmn} - \omega_k \omega_m \eta_{kmn}] A_k^{(1)} \overline{A_m^{(1)}} \exp(i(\omega_k - \omega_m) T_0) \right\}; \quad (21)$$

где

$$\gamma_{kmn} = \kappa_n \left\{ K_{kmn} \left[\omega_k^2 \left(n - k + 1 - \rho \frac{n(n-k-1)}{(n+1)} \right) + 2n(m^2 + m - 1) + W \frac{n}{2} (m(k+1) - k(2k-2n+7) + 3) \right] + \alpha_{kmn} \left[\frac{\omega_k^2}{k} \left(1 - \rho \frac{k \cdot n}{(k+1)(n+1)} \right) + W \frac{n}{2} \right] \right\};$$

$$\eta_{kmn} = \kappa_n \left\{ K_{kmn} \frac{1}{2} \left[n - 2k + 2 - \rho \frac{n(n-2k-3)}{(n+1)} \right] + \alpha_{kmn} \left[\frac{(n+2m)}{2 \cdot k \cdot m} - \rho \frac{n(n+2m+3)}{2(n+1)(k+1)(m+1)} \right] \right\};$$

$$K_{kmn} = (c_{k0m0}^{n0})^2;$$

$$\alpha_{kmn} = -\sqrt{k(k+1)m(m+1)} c_{k0m0}^{n0} c_{k(-1)m1}^{n0},$$

c_{k0m0}^{n0} и $c_{k(-1)m1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [18], которые отличны от нуля при условии, что их индексы удовлетворяют соотношениям

$$|k - m| \leq n \leq (k + m);$$

$$k + m + n = 2g \quad (g \text{ — целое число}).$$

Условие исключения из решения уравнения (21) секулярных (т.е. линейно растущих со временем) слагаемых позволяет определить зависимость функций $A_n^{(1)}$, $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ от временного масштаба T_1

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial T_1} = 0; \quad \frac{\partial b_n^{(1)}}{\partial T_1} = 0.$$

Таким образом, в рамках рассмотрения задачи с точностью до 2-го порядка малости $A_n^{(1)}$, $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ являются константами, равными своим начальным значениям.

Используя общее решение уравнения (21) и решение (18), после удовлетворения полученным из (11) начальным условиям 1-го и 2-го порядков

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0;$$

$$\xi^{(2)} = - \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)}; \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0,$$

запишем окончательные выражения для эволюционных коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$ и $M_n^{(2)}(t)$, определяющих форму

осциллирующей капли (см. (13), (15))

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{n,i} h_i \cos(\omega_i t) \quad (i \in \Xi);$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_i t);$$

$$M_n^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} [\cos((\omega_i + \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] + \lambda_{ijn}^{(-)} [\cos((\omega_i - \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] \right\}; \quad (n > 0); \quad (22)$$

где

$$\lambda_{ijn}^{(\pm)} \equiv \frac{[\gamma_{ijn} \pm \omega_i \omega_j \eta_{ijn}]}{[\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2]};$$

$\delta_{n,i}$ — дельта-символ Кронекера.

3. На рис. 1, *a-d* приведены рассчитанные по (22) при различных значениях отношения плотностей среды и капли ρ временные зависимости амплитуд всех мод (кроме нулевой), возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением четвертой ($n = 4$) моды. На каждом из приведенных рисунков показаны временные зависимости одной из мод, возбуждающихся во втором порядке малости, рассчитанные при различных значениях отношения плотностей. Из рис. 1 видно, что с увеличением отношения плотностей ρ растет амплитуда восьмой моды, а амплитуды всех остальных мод, кроме нулевой (которая остается неизменной), убывают. Такая тенденция сохраняется и для других номеров мод, определяющих начальную деформацию капли. То, что амплитуда нулевой моды капли при изменении ρ остается постоянной, связано с тем, что во втором порядке малости нулевая мода в нелинейном взаимодействии не участвует, а зависимость ее амплитуды от времени, приводящая в случае сжимаемой внешней среды к появлению монополярного акустического излучения [19], выводится из условия постоянства объема капли и определяется квадратом амплитуды моды, задающей начальную деформацию. Зависимость амплитуды нулевой моды от ρ появится лишь при расчетах следующего третьего порядка малости.

Кривые, приведенные на рис. 1, демонстрируют также и известный [10–12] линейный эффект снижения с ростом ρ частот всех мод осцилляций, реализующихся в рассматриваемой системе.

Расчеты по (22), проиллюстрированные рис. 1, выполнены при значении параметра Рэлея $W = 1$, т.е. при W далеко от критического значения $W_c = 4$, так и от резонансного $W_r = 2.67$, при котором реализуется вырожденное трехмодовое взаимодействие четвертой и шестой мод [13,15,20,21]. Тем не менее из рис. 1, *c* видно, что в рассмотренной при расчетах ситуации резонанс четвертой и шестой мод имеет место: амплитуда шестой моды существенно (в несколько раз) превышает амплитуды всех мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, и нарастает резонансным образом

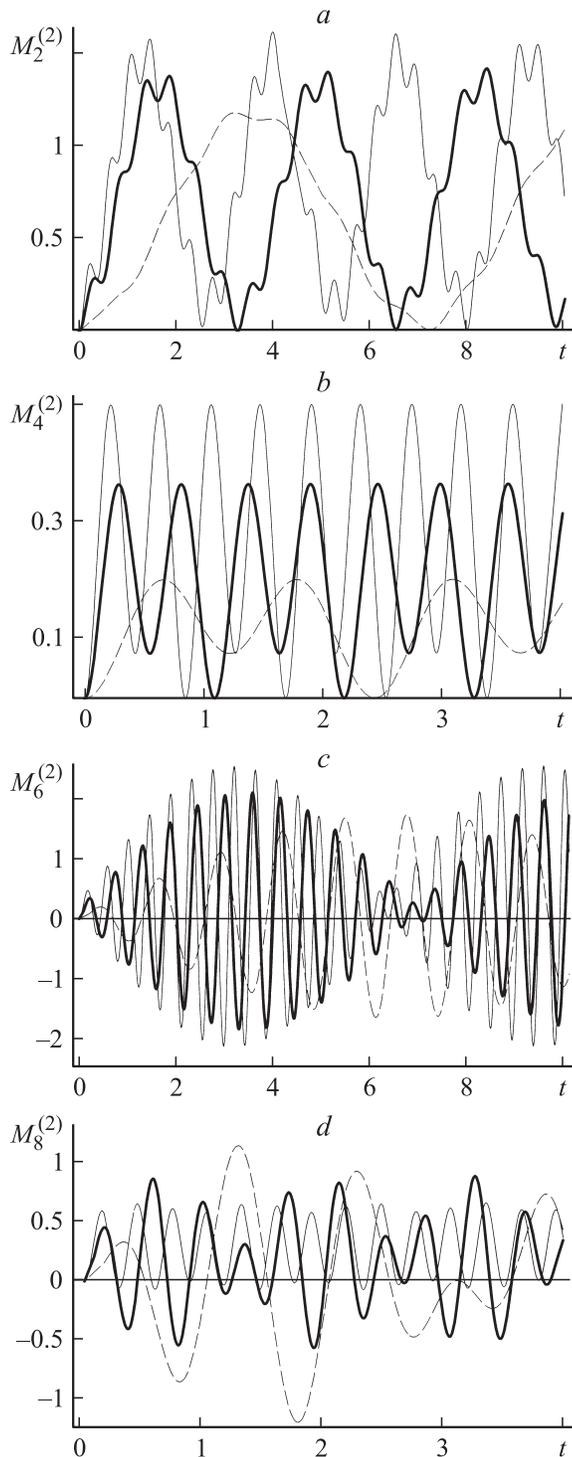


Рис. 1. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд мод $M_n^{(2)}(t)$, возбуждающихся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся четвертой модой, при $W = 1$. Тонкая кривая — $\rho = 0.1$; жирная — $\rho = 1$; штриховая — $\rho = 1$; *a* — вторая мода, $n = 2$; *b* — четвертая мода, $n = 4$; *c* — шестая мода, $n = 6$; *d* — восьмая мода, $n = 8$.

(линейно со временем), хотя, казалось бы, при $W = 1$ резонансная перекачка энергии из четвертой моды в шестую не должна реализовываться. Причем, согласно

рис. 1, *c*, резонансная раскачка шестой моды за счет ее взаимодействия с четвертой имеет место при любых значениях ρ из использованных в расчетах.

Отметим, что возможные в рассматриваемой системе резонансные ситуации связаны с появлением в выражении (22) малых знаменателей: когда при определенных соотношениях между частотами нелинейно взаимодействующих мод (при $\omega_n^2 = (\omega_i \pm \omega_j)^2$) один из знаменателей в коэффициентах $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$, через которые выражаются амплитуды поправок второго порядка малости, обращается в нуль. Стандартная процедура устранения подобной ситуации связана с введением малого отклонения частоты одной из мод от резонансной с последующим разложением по степеням такого малого отклонения и исключением секулярных членов [21]. Условие проявления вырожденного резонанса между четвертой и шестой модами имеет вид $\omega_6^2 = 4\omega_4^2$ и реализуется при $\rho = 0$, когда $W_r = 2.67$. Если $W = 1$, то при $\rho = 0.1$ несложно найти $\omega_6^2 \approx 193.4$, $\omega_4^2 \approx 55.6$, $\omega_6^2 - 4\omega_4^2 \approx 28.8$, что примерно в восемь раз меньше ω_6^2 . Следовательно, отношение разности $\omega_6^2 - 4\omega_4^2$ к ω_6^2 может служить малым параметром, а отклонение $\omega_6^2 - 4\omega_4^2$ от нуля может считаться малым. Иными словами, при $W = 1$ соотношение частот шестой и четвертой мод достаточно близко к резонансному, чтобы в расчетах проявилась резонансная раскачка шестой моды за счет отбора энергии у изначально возбужденной четвертой. Указанное обстоятельство интересно тем, что резонанс наблюдается при большом отклонении параметра W от W_r , и позволяет предположить, что наличие значительного заряда на капле совсем не обязательно для получения резонансной раскачки одной из мод.

На рис. 2 приведены кривые, аналогичные приведенным на рис. 1, *c*, иллюстрирующие резонансную раскачку шестой моды изначально возбужденной четвертой при нулевом заряде капли ($W = 0$). В этом случае при $\rho = 0.1$ имеем $\omega_6^2 \approx 221$, $\omega_4^2 \approx 66.7$, а $\omega_6^2 - 4\omega_4^2 \approx 45.7$, т.е. система находится еще дальше от точного положения резонанса, чем в разобранный выше случае $W = 1$. Это проявляется и в том, что отношение амплитуды резонансно раскачиваемой шестой моды к амплитудам остальных нелинейно возбуждаемых мод несколько

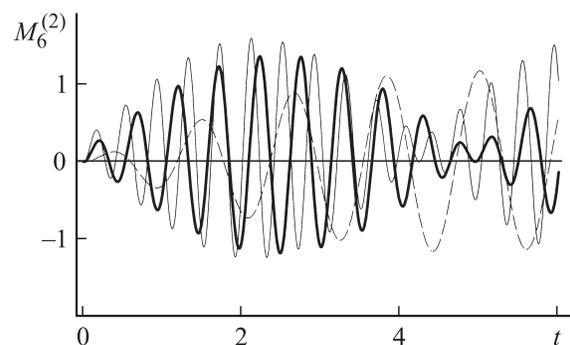


Рис. 2. Зависимости $M_6^{(2)}(t)$, аналогичные приведенным на рис. 1, иллюстрирующие нелинейную раскачку шестой моды, изначально возбужденной четвертой при $W = 0$.

меньше, чем при $W = 1$, в ситуации, проиллюстрированной кривыми на рис. 1.

Учтем, что, согласно [21–23], количество резонансных ситуаций, в которых в резонансное взаимодействие наряду с высокими модами включены и низкие, весьма велико (измеряется сотнями при $n, i, j \leq 100$). Принимая во внимание обнаруженную слабую зависимость условий реализации нелинейного резонансного обмена энергией между модами от величины собственного заряда капли (параметра W), можно ожидать, что в естественных условиях, например в грозном облаке, в свободно падающих каплях будут реализовываться все резонансные ситуации, допустимые при заданном наборе начально возбужденных мод, даже если заряд капли далек от резонансного. Это обстоятельство представляется важным в связи с необходимостью моделирования до сих пор непонятного механизма зарождения разряда молнии в грозном облаке, который, согласно существующим представлениям, может начаться с коронного разряда в окрестности крупной свободно падающей градины. Поскольку электрические заряды, обнаруживаемые при натурных измерениях на облачных каплях, не превышают одной трети от критического по Рэлею, а внутриоблачные электрические поля много меньше необходимых для начала коронного разряда [24], то наиболее вероятной причиной начала коронного разряда в окрестности обводненной градины или капли является неустойчивость ее заряженной поверхности, сопровождающаяся эмиссией большого количества высокодисперсных сильно заряженных капель, у поверхности которых уже может зажечься коронный разряд [1,25]. Резонансная раскачка амплитуды осцилляций основной ($n = 2$) моды, что соответствует вытягиванию капли в фигуру, близкую к вытянутому сфероиду, слабо (в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду) заряженной облачной капли может привести к реализации неустойчивости ее поверхности в окрестности вершин сфероида вследствие увеличения там поверхностной плотности собственного и поляризационного заряда за счет его перераспределения по поверхности капли при ее удлинении [1,26,27]. Проблема заключается в том, что в расчетах второго порядка малости для нелинейно осциллирующей в вакууме капли идеальной жидкости строгий резонанс, в котором бы участвовала основная мода, отсутствует. Такие резонансы появляются, если учесть реальную вязкость жидкости [23]. Однако такой учет пока можно провести лишь на качественном уровне, поскольку задача о нелинейных осцилляциях капли вязкой жидкости еще не решена ввиду ее сложности. Резонансы с участием второй моды появляются и для капли идеальной жидкости при расчетах в третьем порядке малости (при четырехмодовом взаимодействии). Однако амплитуда резонансно раскачиваемой основной моды при четырехмодовом взаимодействии оказывается малой, сравнимой с величинами второго порядка малости, тогда как при трехмодовом резонансном взаимодействии эффект имеет первый порядок малости [21,28]. В связи со сказанным представляется интересным исследовать

Изменение положения вырожденных резонансов при варьировании величины параметров W

W	n	m	ρ
0	8	5	0
	16	10	0
	24	15	0.28
	32	20	0.945
0.5	8	5	0.6352
	16	10	0.766
	24	15	1.965
	32	20	13.74
1	8	5	3.6
	16	10	6.68
2	30	19	0.3012
	30	19	85.241
2.7	6	4	0.093
	14	9	0.608
	22	14	2.1675
	30	19	85.241

вопрос о влиянии наличия внешней диэлектрической среды с отличной от нуля плотностью на изменение количества реализующихся во втором порядке малости трехмодовых резонансов.

4. Как отмечалось выше, резонансные ситуации характеризуются соотношениями между частотами взаимодействующих мод капиллярных осцилляций типа $\omega_n^2 = (\omega_i \pm \omega_j)^2$. Согласно (22), в анализируемой задаче исследования осцилляций заряженной капли во внешней среде величина частоты ω_n кроме номера моды n определяется безразмерным параметром W и безразмерной плотностью ρ . Сказанное означает, что положение резонансов в пространстве номеров мод будет зависеть от величин параметров W и ρ , тогда как для осцилляций капли в вакууме оно зависело только от W . Несложные расчеты показывают, что появление еще одной степени свободы, связанной с изменением ρ , приводит и к изменению положений (в смысле изменения величины W), ранее известных для капли в вакууме (при $\rho = 0$). Общее количество резонансов при $i, j \leq 100$ и $W < 4$ измеряется тысячами, а потому перечислять их не имеет смысла. Иллюстрацией сказанному может служить расчет вырожденных ($i = j$) резонансных ситуаций, которые могут иметь место при одномодовой начальной деформации, при нескольких фиксированных значениях W , результаты которого приведены в таблице.

5. Результаты расчетов по (22), приведенные на рис. 1 и 2, получены для трех различных значений отношения плотностей среды и капли ρ : $\rho = 0.1$, $\rho = 1$, $\rho = 10$. Такие значения ρ выбраны для иллюстрационных расчетов из тех соображений, что при $\rho < 0.1$ и $\rho > 10$ изменения ρ весьма мало сказываются на величине частот капиллярных осцилляций рассматриваемой системы. Малые значения ρ в пределе $\rho \rightarrow 0$ соответствуют ситуации осцилляций капли жидкости в газовой

среде, большие значения ρ в пределе $\rho \rightarrow \infty$ соответствуют осцилляциям газового пузыря в жидкой среде. Как отмечалось выше, в приложениях достаточно часто приходится иметь дело с осцилляциями заряженных капель, взвешенных или движущихся в другой несмешивающейся с ней диэлектрической жидкости [2–9]. В этом случае в экспериментах приходится иметь дело с ситуацией $\rho \approx 1$, $\rho_* \approx 2$, а величина коэффициента межфазного натяжения изменяется в широких пределах от $\sigma \approx 2.5$ дуп/см (граница раздела парафинового масла и воды [5]) до $\sigma \approx 50$ дуп/см (граница раздела *n*-гептана и воды [9] или силикона и воды [4]). Осцилляции заряженных капель в газовой среде характеризуются величинами $\rho \approx 10^{-3}$, $\epsilon_* \approx 1$, $\sigma \approx 50$ дуп/см [1]. Заряженные пузыри в диэлектрической жидкости также встречаются в большом количестве приложений [29–31]: от исследования устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия [29] и электрических разрядов в жидкостях [30] до термоядерного синтеза [31]. Для пузырей характерные значения параметров следующие [29–31]: $1 < \epsilon_* < 80$, $\rho \sim 1000$, $0.354 < \sigma < 70$ дуп/см.

На рис. 3 приведены результаты расчетов амплитуды основной моды, возбуждающейся во втором порядке малости при фиксированном ρ и различных докритических значениях параметра W , в котором собраны важные для обсуждаемого феномена физические величины: коэффициент межфазного натяжения, диэлектрическая проницаемость среды, заряд капли и ее радиус. В размерной форме параметр W имеет вид $W = Q^2/4\pi\sigma R^3\epsilon_*$. Отметим, что величина коэффициента межфазного натяжения σ связана с коэффициентами поверхностного натяжения чистых фаз σ_1 и σ_2 известным правилом Антонова [32] $\sigma \approx |\sigma_1 - \sigma_2|$, где σ_1 и σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения фаз, контактирующих с общим газом. Как правило, величина σ существенно меньше коэффициентов поверхностного натяжения чистых фаз, что позволяет в некоторых случаях [5–7] наблюдать неустойчивость границы раздела по отношению к собственному заряду. Из рис. 3 видно, что с увеличением W (с приближением к критическому

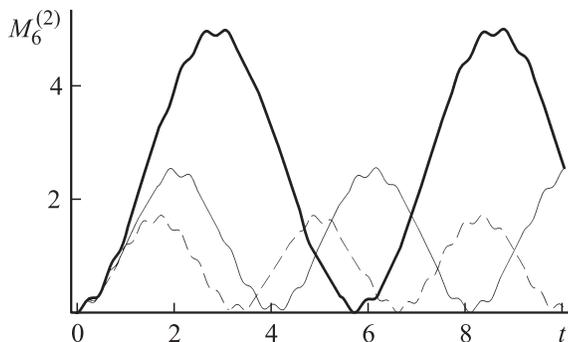


Рис. 3. Зависимости от безразмерного времени безразмерной амплитуды основной моды $M_2^{(2)}(t)$, возбуждающейся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся пятой модой, при $\rho = 1$. Штриховая кривая — $W = 1$; тонкая — $W = 2$; жирная — $W = 3$.

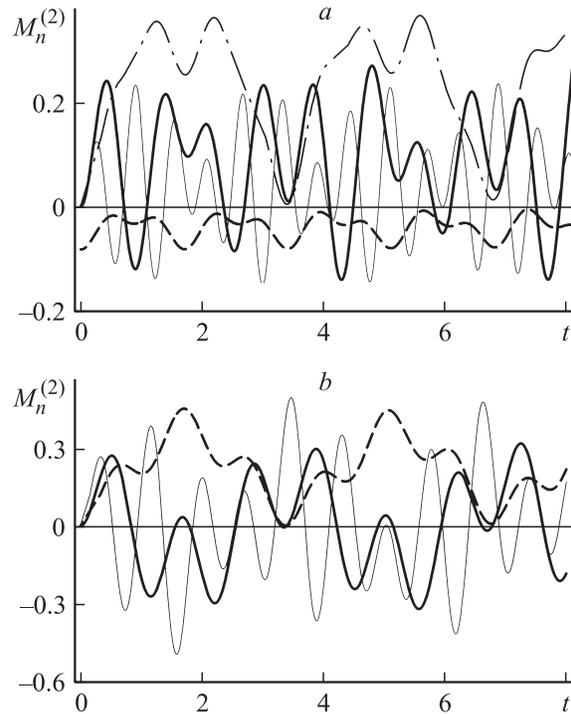


Рис. 4. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд мод $M_n^{(2)}(t)$, возбуждающихся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся суперпозицией второй и третьей мод, при $\rho = 1$ и $W = 1$. *a* — четные моды: штриховая кривая — нулевая мода, штрихпунктир — вторая, жирная — четвертая, тонкая — шестая; *b* — нечетные моды: штриховая кривая — первая мода, жирная — третья, тонкая — пятая.

для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значению $W_{cr} = 4$ [1]) амплитуда основной моды заметно растет.

На рис. 4 приведены результаты расчетов для нерезонансной ситуации, когда начальная деформация определена суперпозицией второй и третьей мод при $h_2 = h_3 = 1/2$. Видно, что спектр мод, возбуждающихся во втором порядке малости, содержит как четные, так и нечетные моды с амплитудными коэффициентами для всех мод, кроме нулевой, сравнимыми по величине.

Заключение

При нелинейных осцилляциях капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в диэлектрической идеальной несжимаемой среде с ростом отношения плотностей среды и капли максимум энергии в спектре нелинейно возбужденных мод смещается к наиболее высокой моде независимо от того, какой из мод задается начальная деформация капли. Учет наличия внешней среды проявляется как в изменении при варьировании отношения плотностей среды и капли количества резонансных ситуаций, так и в изменении величины собственного заряда капли, при котором реализуется резонанс. Выяснилось, что нелинейные осцилляции могут

иметь резонансный вид даже при зарядах капли, далеких от соответствующих точным положениям резонансных ситуаций, что объясняется относительно слабым влиянием собственного заряда капель (при докритических по Рэлею его значениях) на частоты высоких мод осцилляций. Именно это обстоятельство обеспечивает получающиеся в расчетах высокие значения амплитуды нелинейно возбуждающейся основной моды капли при задании начальной деформации модами, более высокими, чем основная.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 03-01-00760).

- [25] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [26] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шукин С.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 7. С. 33–36.
- [27] *Шукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 49–54.
- [28] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [29] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 3. С. 624–636.
- [30] *Жаров А.Н., Ширяева С.О.* // ЭОМ. 1999. № 6. С. 9–21.
- [31] *Диденкулов И.Н., Селивановский Д.А., Семенов В.Е., Соколов И.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 2. С. 183–197.
- [32] *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 702 с.

Список литературы

- [1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] *Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О.* // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
- [3] *O'Konski Ch.T., Harris F.E.* // J. Phys. Chem. 1957. Vol. 61. N 9. P. 1172–1174.
- [4] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Trans. Far. Soc. 1964. Vol. 60. P. 211–226.
- [5] *Ryce S.A., Wymant R.R.* // Canad. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185–2194.
- [6] *Ryce S.A., Patriarche D.A.* // Canad. J. Phys. 1965. Vol. 43. P. 2192–2199.
- [7] *Бейтуганов М.Н.* // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 42–49.
- [8] *Scott N.C., Basaran O.I., Byers C.H.* // Ind. Eng. Chem. Res. 1990. Vol. 2. P. 901–909.
- [9] *Mochizuki T., Mory Y.H., Kaji N.* // AIChE Journal. 1990. Vol. 36. N 7. P. 1039–1045.
- [10] *Стаханов И.П.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 7. С. 1373–1379.
- [11] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 1–8.
- [12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 34–42.
- [13] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [14] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [15] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [16] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [17] *Гаибов А.Р., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 13–20.
- [18] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [19] *Гаибов А.Р., Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 4. С. 22–27.
- [20] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
- [21] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [22] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
- [23] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
- [24] *Облака и облачная атмосфера. Справочник / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов.* Л.: Гидрометеиздат, 1987. 647 с.