

Второе уравнение Пенлеве в теории электрического зонда. Численные решения в случае неполного поглощения заряженных частиц поверхностью

© А.В. Кашеваров

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ),
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail: kash@dept.aerocentr.msk.su

(Поступило в Редакцию 31 января 2000 г. В окончательной редакции 30 мая 2002 г.)

Продолжено исследование второго уравнения Пенлеве в рамках теории электрического зонда. Найдены условия для интегрирования уравнения в случае неполного поглощения заряженных частиц поверхностью зонда. Это позволило численно построить семейства решений с асимптотикой $y \sim \nu/x$ при $x \rightarrow +\infty$ в широком диапазоне изменения свободного параметра ν , а также связанные с указанными другие решения для полувещных и целых значений ν , в том числе решения с асимптотическим представлением при $x \rightarrow +\infty$ через функцию Эйри $y \sim c\text{Ai}(x)$ в пределе $\nu \rightarrow 0$. Полученные результаты обсуждаются с позиций метода изомонодромных деформаций.

Введение

Второе уравнение Пенлеве (сокращенно P2) вида

$$d^2y/dx^2 = 2y^3 + xy - \nu, \quad (1)$$

являющееся нелинейным аналогом уравнения Эйри, возникло в процессе развития аналитической теории дифференциальных уравнений и долгое время оставалось предметом чисто математического интереса [1]. Внимание было сосредоточено, в частности, на исследовании асимптотического поведения при больших значениях аргумента порождаемой уравнением P2-функции и при определении связи между параметрами асимптотик одного и того же частного решения на $\pm\infty$. Эта проблема была решена с помощью открытого не так давно метода изомонодромных деформаций [2–5], аналога метода интегральных преобразований Лапласа для уравнений Пенлеве.

Примерно в это же время обнаружилось, что уравнение P2 встречается в ряде конкретных задач современной теоретической и математической физики. В результате сложилось убеждение, что уравнение P2 вместе с еще пятью уравнениями Пенлеве должны играть ту же роль в нелинейной теоретической физике, что и классические специальные функции в линейных задачах [4,5]. Поэтому становится актуальной проблема получения значений этой нелинейной спецфункции, которую часто называют функцией Пенлеве второго рода.

Она выражается через рациональные и известные специальные функции (Эйри) лишь в двух частных случаях при значениях свободного параметра $\nu = 0$ и $1/2$. В общем случае не существует какого-либо математического описания этой функции, например, в виде ряда или интегрального представления, которое позволило бы вычислять ее значения. Единственным способом является численное интегрирование.

При интегрировании уравнения P2 возникает вопрос о выборе начальных условий, обеспечивающих построение частных решений с заданной асимптотикой. Тем более, что общее решение уравнения P2, как известно, представляет собой разрывную функцию с подвижными особенностями в виде полюсов первого порядка, т.е. расположение разрывов зависит от начальных данных. До сих пор были известны лишь две успешные попытки численного интегрирования уравнения P2 при значении $\nu = 0$ [6,7], приведшие к построению решений с асимптотикой $y \sim c\text{Ai}(x)$, $x \rightarrow +\infty$, где c — параметр, $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри.

Практически неизвестным оставалось приложение уравнения P2 в задаче об электрическом зонде [8]. В [9] было показано, как в рамках теории электрического зонда проявляют себя многие свойства уравнения P2 и его решений. В частности, было показано, что известная связь [1] между решениями P2 при $\nu = 0$ и $1/2$ осуществляется посредством уравнения

$$u_{xx} = -u_x^2 - x/2 + e^{2u}/2. \quad (2)$$

Производная u_x удовлетворяет (1) с $\nu = 1/2$, а функция $\eta(\xi) = 2^{-2/3}e^{u(x)}$, $\xi = -2^{-1/3}x$ есть решение P2 при $\nu = 0$. С помощью (2) удалось уточнить вид при $\nu = 1/2$ матрицы монодромии [2] в методе изомонодромных деформаций.

В рамках теории зонда возникают регулярные на $+\infty$ решения уравнения P2 с асимптотикой $y \sim \nu/x$, $x \rightarrow +\infty$, их полное асимптотическое описание в виде ряда дано в [1]. В [9] были представлены условия, которым должны удовлетворять эти решения и выполнено численное их построение. Полученные начальные условия явились результатом анализа сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений, описывающей работу зонда, в случае полного поглощения заряженных частиц его поверхностью. Это приводит к построению для любого значения $\nu < 1/2$ лишь одного

решения с указанной выше асимптотикой. Однако известно [1], что для любого ν существует семейство таких решений. В предлагаемой работе исследован оправданный с физической точки зрения случай неполного поглощения заряженных частиц, что позволяет осуществить численное интегрирование и построить решения этого семейства.

Условия интегрирования и численная процедура

Работа сферического зонда в столкновительной плазме может быть описана уравнениями [9]

$$\begin{aligned} dn_+/d\xi + n_+E &= -I_+, & dn_-/d\xi - n_-E &= -I_-, \\ \alpha^2\xi^4 dE/d\xi &= n_- - n_+, & E &= -d\psi/d\xi, \\ \xi \in [0, 1], & \psi(0) = 0, & n_{\pm}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n_+ и n_- — безразмерные числовые концентрации соответственно положительно и отрицательно заряженных частиц; I_+ и I_- — их токи на зонд; E — электрическое поле; ψ — безразмерный электрический потенциал; $\xi = 1/r$, где r — радиальная координата сферической системы координат; α — отношение дебаевского радиуса к радиусу зонда.

Асимптотический анализ сингулярно возмущенной при $\alpha \ll 1$ системы (3) подробно изложен в [9]. Уравнение P2 в канонической форме (1) может быть получено из системы (3) сведением ее к одному уравнению для поля E и применением к получившемуся уравнению преобразований [9]

$$\begin{aligned} x &= 2^{1/3}\alpha^{-2/3}\xi_s^{-5/3}(\xi_s - \xi), \\ E(\xi) &= 2^{4/3}\alpha^{-2/3}\xi_s^{-5/3}y(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\xi_s = 2/(I_+ + I_-)$ — точка сингулярности внешнего решения системы (3). Параметр ν в (1) связан с зондовыми токами как $\nu = (I_- - I_+)/(I_- + I_+)/2$. Так как при отсутствии эмиссии частиц с поверхности зонда безразмерные токи I_+ и I_- всегда положительны, то свободный параметр ν в (1) в рамках теории зонда может изменяться лишь в пределах $|\nu| \leq 1/2$. Однако известно [1], что решения P2 для всех ν из указанной полосы, за исключением $\nu = -1/2$, определяют с помощью рекуррентных формул решения при произвольных значениях ν . Поэтому в [9] удалось построить решения P2 в широком диапазоне значений параметра ν .

Условия интегрирования P2 при $\nu < 1/2$ получены в [9] при следующих граничных условиях на поверхности зонда для системы (3): электрический потенциал задан $\psi(1) = \psi_0$, а концентрации как положительно, так и отрицательно заряженных частиц $n_+(1) = n_-(1) = 0$. Найдем условия интегрирования в общем случае, когда на поверхности зонда $n_+(1) = n_{0+} > 0$ и/или $n_-(1) = n_{0-} > 0$.

Из системы (3) в качестве промежуточного результата выкладок имеем

$$n_- = \frac{\alpha^2(\xi^4 E')' + \alpha^2\xi^4 EE' + I_- - I_+}{2E}, \quad (5)$$

где штрих обозначает производную по ξ .

Применим преобразования (4) к (5) и, кроме того, положим

$$n_- = 2^{-1/3}\alpha^{2/3}\xi_s^{2/3}\eta_-. \quad (6)$$

Получим, что на поверхности зонда в точке x_0 , которая заранее неизвестна, справедливо выражение

$$y_0'' = 2y_0y_0' + y_0\eta_{0-} - \nu. \quad (7)$$

Здесь индекс 0 означает, что соответствующая величина определяется при $x = x_0$, штрихом обозначена производная по x . Применим преобразования (5), (6) к третьему уравнению системы (2). При $\alpha \rightarrow 0$ найдем

$$y_0' = (\eta_{0+} - \eta_{0-})/4. \quad (8)$$

Здесь между η_{0+} и η_{0-} имеется та же связь (6), что и для η_{0-} и n_{0-} . Подставляя (8) в (7), с учетом (1) получим

$$y_0 = \pm \sqrt{-x_0/2 + (\eta_{0+} + \eta_{0-})/4}. \quad (9)$$

Выполнение условий (8), (9) при численном интегрировании (1) при $|\nu| < 1/2$ обеспечивает построение решений P2 с асимптотикой $y \sim \nu/x$ при $x \rightarrow +\infty$. В случае полного поглощения заряженных частиц, когда $\eta_{0+} = \eta_{0-} = 0$, условия (8), (9) совпадают с найденными в [9], причем из физических соображений в [9] выбирался знак „плюс“ перед корнем.

В случае $\nu = 1/2$, который соответствует большому отрицательному потенциалу зонда $\psi_0 \ll -1$, когда можно считать $I_+ = 0$, для получения численных решений уравнения P2 удобно использовать уравнение (2). Для разрешимости краевой задачи для системы (3) необходимо, чтобы $n_+(1) = n_{0+} = \exp(\psi_0) > 0$ [9]. При $\nu = 1/2$ в [9] было найдено семейство регулярных решений P2 с одной и той же асимптотикой при $x \rightarrow +\infty$, причем для отрицательно заряженных частиц ставилось условие полного поглощения $n_-(1) = n_{0-} = 0$.

Для уравнения (2) в случае неполного поглощения отрицательно заряженных частиц можно получить следующие условия интегрирования:

$$u_0' = \pm \sqrt{-x_0/2 + (\eta_{0+} + \eta_{0-})/4}, \quad u(x_0) = u_0, \quad (10)$$

причем $\eta_{0+} = \exp(2u_0)$ и не может в отличие от η_{0-} быть произвольным при заданном u_0 .

Вычислительная процедура подробно изложена в [9]. Укажем только, что после перехода к эквивалентным системам дифференциальных уравнений первого порядка для интегрирования уравнений (1) или (2) использовалась разностная схема из [10], а именно, например, для (1)

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(az_{i+1}/b + z_i/b), \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{h}{12} [bf(x_{i+1}, y_{i+1})]/a + bf(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Здесь $a = 5 - \sqrt{24}$, $b = 6 - \sqrt{24}$, $z = y'$, а $f(x, y)$ обозначает правую часть уравнения (1). Сходимость разностной схемы была проверена в [9] дроблением шага h , который в итоге был выбран $h = 10^{-4}$. Основную вычислительную трудность представляет подбор точки начала интегрирования x_0 .

Численные результаты

На рис. 1 приведены результаты численного интегрирования P2 при $\nu = 0.1$ и 0.4 для различных значений параметров η_{0+} и η_{0-} . Для сравнения штрихпунктиром показаны решения при $\eta_{0+} = \eta_{0-} = 0$, полученные в [9].

На рис. 1, *a* кривые 1–9 рассчитаны при значениях $\eta_{0+} = \eta_{0-} = 1, 2.5, 2.87, 2.870990, 2.870991, 2.88, 3, 4, 5$ соответственно. Кривые 10–15 получены при $\eta_{0+} = 0$ и $\eta_{0-} = 0.5, 1.049210, 1.049211, 1.1, 2, 6$ соответственно. Кривая 16 соответствует $\eta_{0+} = 1, \eta_{0-} = 6$. Из рис. 1, *a* видно, что существует семейство регулярных при $x \rightarrow +\infty$ решений с одной и той же асимптотикой $y \sim \nu/x$, но с различными асимптотиками на $-\infty$. Среди них колебательные решения 1–3 и 11, 12 и сингулярные решения 4–10, 13–17. Кривые этих разных типов разделены двумя сепаратрисными решениями, неустойчивыми к малому возмущению начальных данных с асимптотиками

$$y \sim \pm \sqrt{-x/2}. \tag{11}$$

Отметим, что решения P2 с асимптотикой $y \sim -\sqrt{-x/2}$ при $x \rightarrow -\infty$ были известны ранее, но только для $\nu < 0$ [1].

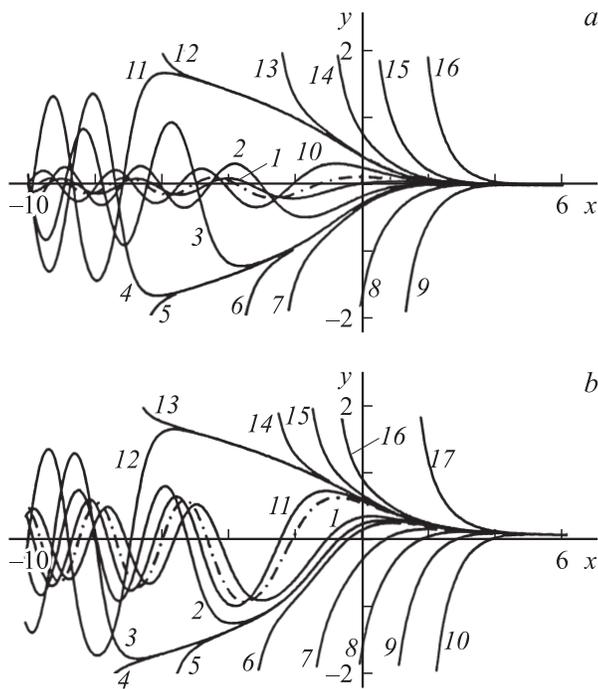


Рис. 1.

№ кривой	Рис. 1, <i>a</i>		Рис. 1, <i>b</i>		Рис. 2, <i>a</i>		Рис. 3	
	x_0	n	x_0	n	x_0	n	x_0	n
1	0.99256	4	0.26350	4	0.20631	14	1.2181	4
2	2.4978	5	0.60967	4	0.35894	15	2.1211	4
3	2.8682	6	0.62133	4	0.36154	16	2.0078	9
4	2.8692	6	0.62133	4	0.36154	16	1.1042	4
5	2.8692	6	0.62173	4	1.1196	17	1.0370	4
6	2.8782	6	0.87861	4	2.5531	20	1.0353	4
7	2.9984	6	1.9507	4			1.0353	4
8	3.9980	9	2.9737	5				
9	4.9993	12	3.9838	8				
10	0.11835	5	4.9891	11				
11	0.24812	6	-0.72004	4				
12	0.24812	6	-0.67894	4				
13	0.25879	6	-0.67894	4				
14	0.42248	6	-0.67210	4				
15	0.87682	9	-0.60981	4				
16	2.46000	10	-0.41046	5				
17			2.1342	9				

Аналогичные результаты получены при $\nu = 0.4$ (рис. 1, *b*). Кривые 1–10 соответствуют следующим значениям параметров $\eta_{0+} = \eta_{0-}$: 1 — 0.5, 2 — 0.77, 3 — 0.779663, 4 — 0.779664, 5 — 0.78, 6 — 1, 7 — 2, 8 — 3, 9 — 4, 10 — 5. Кривые 11–16 рассчитаны при $\eta_{0+} = 0$ и следующих η_{0-} : 11 — 0.5, 12 — 1.009605, 13 — 1.009606, 14 — 1.1, 15 — 2, 16 — 6, кривая 17 — при $\eta_{0+} = 1, \eta_{0-} = 6$.

Результаты вычислений точки начала интегрирования x_0 для различных значений $\nu, \eta_{0+}, \eta_{0-}$ представлены в таблице. Там же приведено учитываемое в каждом из расчетов количество членов n асимптотического ряда [1], описывающего асимптотику регулярных при $x \rightarrow +\infty$ решений P2. В [9] учитывалось четыре члена этого ряда, что, как правило, недостаточно для получения точности определения x_0 в рассматриваемом здесь случае неполного поглощения заряженных частиц.

Вызывает интерес поведение решений P2 при предельно малых $\nu \rightarrow 0$. Для этого случая в [1] было выяснено, что при полном поглощении заряженных частиц координата x_0 и вместе с ней $y_0 \rightarrow 0$ и решение P2 стремится к тривиальному $y = 0$. Для рассматриваемого здесь неполного поглощения частиц x_0 и y_0 стремятся к некоторым предельным значениям, не равным нулю.

Результаты расчетов при $\nu = 10^{-11}$ представлены на рис. 2, *a* сплошными кривыми, а также в таблице. Кривые 1–5 получены при $\eta_{0+} = 0$ и $\eta_{0-} = 0.5, 1, 1.009623, 1.009624, 6$ соответственно, кривая 6 — при $\eta_{0+} = 1, \eta_{0-} = 6$. Решениями будут также симметричные относительно оси x кривые. Они возникают при замене η_{0+}, η_{0-} на η_{0-}, η_{0+} .

На рис. 2, *b* сплошными кривыми показано решение P2 при $\nu = 0.5$, которое основано на решении 1 (рис. 2, *a*) с помощью известной формулы, связывающей решения при $\nu = 0.5$ и 0 (см. Введение). Видно, что непрерывное при $\nu = 0$ решение 1 порождает сингулярное решение

при $\nu = 0.5$, причем оно оказалось близко к решению однопараметрического семейства [2]

$$y = -2^{-1/3}(\text{Ai}'(\xi) + C \text{Bi}'(\xi))/(\text{Ai}(\xi) + C \text{Bi}(\xi)),$$

$$\xi = -2^{-1/3}x \quad (12)$$

при $C = 0$. Решения этого семейства, как известно, не связаны с решениями уравнения P2 при $\nu = 0$. Для сравнения на рис. 2, *b* штриховыми кривыми приведено еще одно решение этого семейства в другом предельном случае $C \rightarrow \infty$, т.е. $y = -2^{-1/3} \text{Bi}'(\xi)/\text{Bi}(\xi)$.

На рис. 3 сплошными кривыми показаны решения уравнения P2 при $\nu = 0.5$, полученные, как и в [9], численным интегрированием вспомогательного уравнения (2) (см. также таблицу). Прежде всего были дополнены результаты [9] при $\eta_{0-} = 0$, $\eta_{0+} > 0$. В [9] не удалось получить решения уравнения (2) и соответственно P2, если $u_0 > 0.203$, т.е. $\eta_{0+} > e^{0.406}$. Как выяснилось, это связано с тем, что при таких значениях η_{0+} необходимо брать отрицательное значение корня

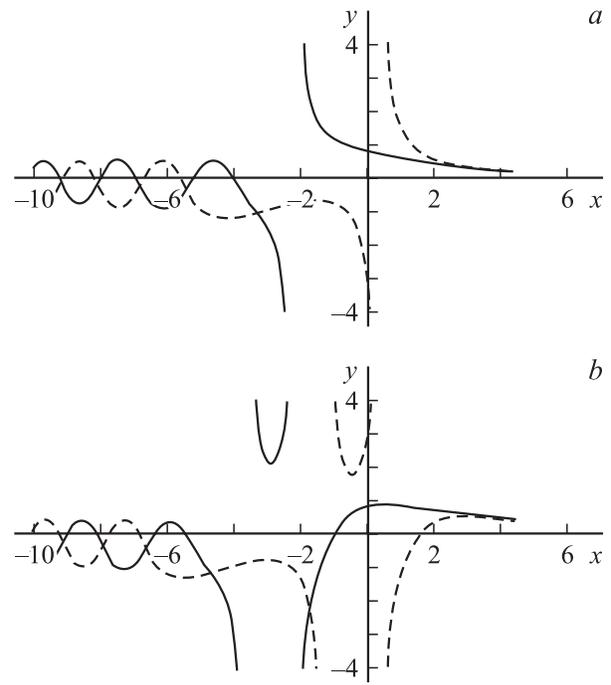


Рис. 4.

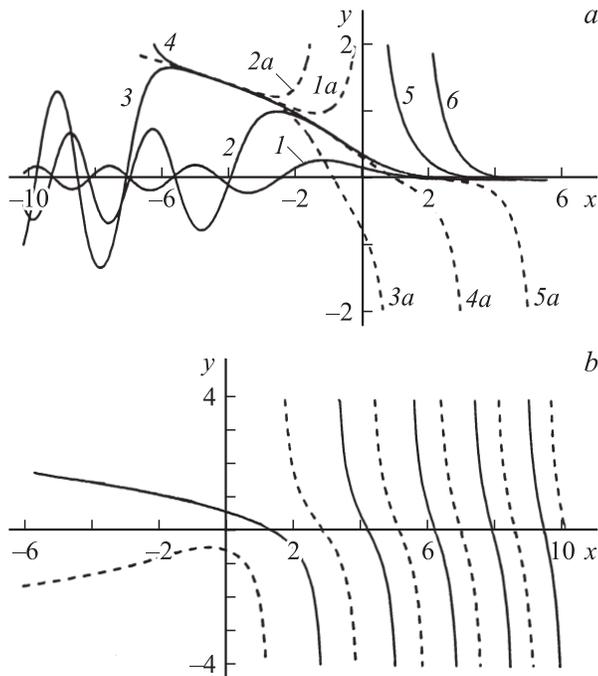


Рис. 2.

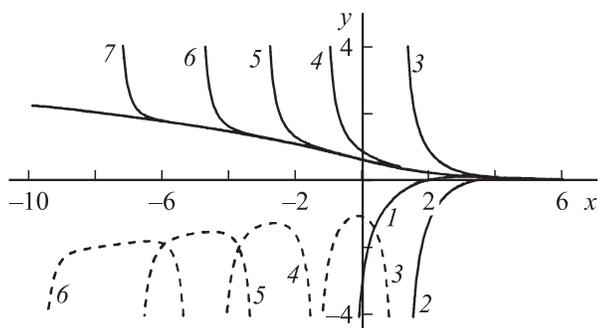


Рис. 3.

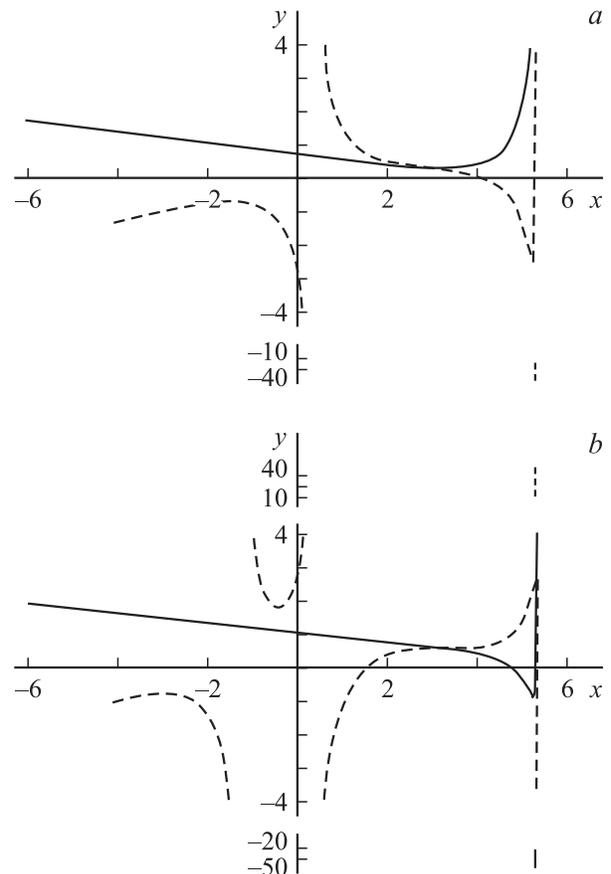


Рис. 5.

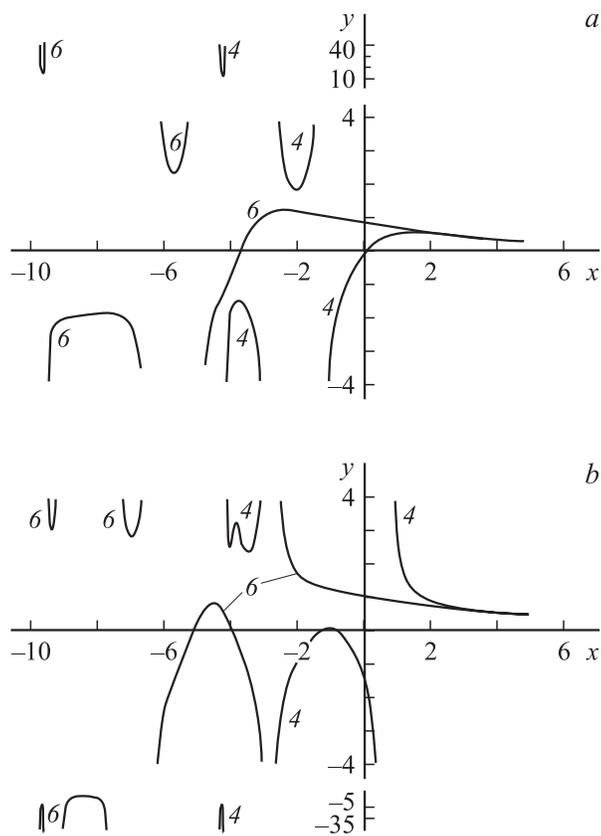


Рис. 6.

в условии (10). Таким способом были найдены решения уравнения (2) и P2 для $u_0 = 0.5$ и 1 (кривые 1 и 2). Кривые 3–7, принадлежащие к другому, чем кривые 1 и 2, семейству решений получены при условии неполного поглощения как положительно, так и отрицательно заряженных частиц, а именно при $\eta_{0+} = 1$ и $\eta_{0-} = 6, 2, 1.76, 1.7542, 1.75417557$ соответственно.

Соответствующие некоторым из этих кривых, интегральные кривые уравнения P2 при $v = 0$ изображены на рис. 2, *a* штриховыми линиями и обозначены цифрами с буквой *a*. Части кривых 3*a*–5*a* при $y < 0$ были получены непосредственно путем интегрирования уравнения (1) с $v = 0$. На основе известной связи между решениями затем были построены решения P2 при $v = 0.5$ cm (штриховые кривые на рис. 3).

На рис. 4, *a, b* сплошными кривыми приведены решения уравнения P2 $y(x, v)$ при $v = 1$ и 2, построенные с помощью рекуррентной формулы [1] по решению 1 (рис. 2, *a*), штриховыми кривыми — аналогичные решения, полученные из симметричного решения $-y(x, 0)$.

Аналогично на рис. 5, *a, b* представлен типичный вид других решений $y(x, 1), y(x, 2)$, построенных по решению 5*a* (рис. 2, *a*). Обращает на себя внимание появление полюсов функций вблизи правого конца отрезка интегрирования, показанных с помощью разрывов оси y .

На рис. 6, *a, b* даны графики решений $y(x, 1.5)$ и $y(x, 2.5)$, построенные по соответствующим решениям $y(x, 0.5)$ (рис. 3, *a*). Обращает на себя внимание различное число полюсов у решения 5 при $v = 2.5$.

Наконец, на рис. 7, *a, b* приведены графики функций $y(x, 1.5)$ и $y(x, 2.5)$, построенные по соответствующим решениям $y(x, 0.5)$ на рис. 2, *b*. Здесь следует отметить смещение нулей и полюсов функции $y(x, 2.5)$ относительно нулей и полюсов $y(x, 0.5)$ и $y(x, 1.5)$ в правой части графиков.

Обсуждение. Описание решений с позиций метода изомонодромных деформаций

Обсудим полученные результаты с позиций метода изомонодромных деформаций [2], в рамках которого в [3] было описано асимптотическое поведение вещественных решений уравнения P2 при $v = 0$, а в [5] исследован случай произвольного v . Асимптотики представляются в терминах множителей Стокса, т.е. нетривиальных компонент матриц Стокса ассоциированной с (1) системы линейных дифференциальных уравнений

$$\Psi_{1\xi} = -i(4\xi^2 + x + 2y^2)\Psi_1(4\xi y + v/\xi + 2iy_x)\Psi_2,$$

$$\Psi_{2\xi} = (4\xi y + v/\xi - 2iy_x)\Psi_1 + i(4\xi^2 + x + 2y^2)\Psi_2. \quad (13)$$

Здесь Ψ_1, Ψ_2 — функции комплексной переменной ξ . Матрицы Стокса связывают формальные асимптотические разложения при $\xi \rightarrow \infty$ двух линейно независимых решений системы (13) в смежных секторах комплексной плоскости. Известно, что если матрицы Стокса

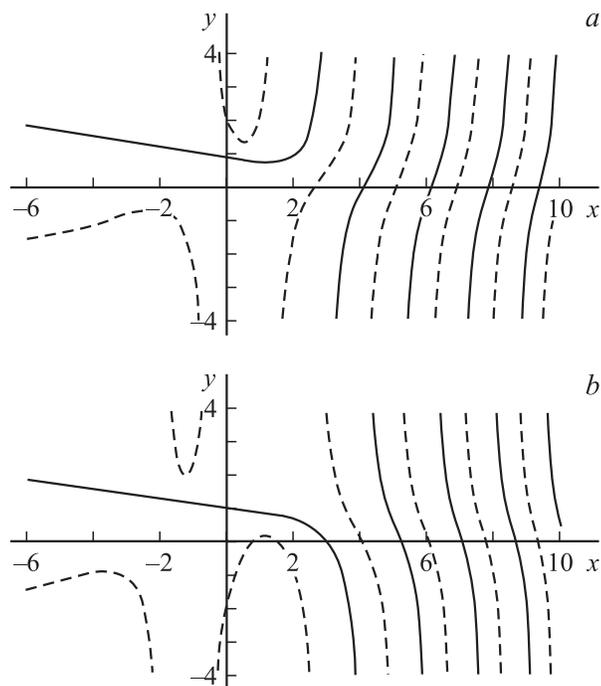


Рис. 7.

не зависят от параметра деформации x , то y в (13) удовлетворяет (1), и наоборот. Для множителей Стокса s_1, s_2, s_3 имеет место соотношение

$$s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = -2 \sin \pi v. \quad (14)$$

В случае действительных x, y , кроме того, $s_1 = s_3^*$, $s_2 = s_2^*$.

В [5] не удалось получить полное описание численно исследованных здесь решений $y \sim v/x$, $x \rightarrow +\infty$, однако указано, что для них $s_2 = 0$. Тогда, если обозначить $s_1 = \beta + i\gamma$, из (14) следует, что этим решениям отвечает

$$\beta = -\sin \pi v. \quad (15)$$

В [5] установлено, что произвольное решение P2 при $x \rightarrow -\infty$ имеет одну из трех асимптотик. Решение может носить характер затухающих колебаний, оно может быть сингулярным типа косеканса, либо возрастающим или убывающим с асимптотикой (11). Приведенные выше графические материалы свидетельствуют о том, что для решений P2, отвечающих случаю $s_2 = 0$, при произвольном v , за исключением полужелого, реализуется любая из указанных асимптотик. Ее тип определяется значением мнимой части γ множителя Стокса s_1 .

Одна из формул [5] после преобразований дает для вещественных решений P2 при $x \rightarrow -\infty$

$$y \sim |-x|^{-1/4} \rho \sin(2|x|^{3/2}/3 - (3\rho^2/4) \ln |x| + \varphi),$$

$$\rho^2 = -\pi^{-1} \ln(1 - |s_1|^2),$$

$$\varphi = -(3\rho^2 \ln 2)/2 - \pi/4 + \arg [i s_3 \Gamma(i\rho^2/2)]. \quad (16)$$

Вычисления показывают, что асимптотики решений P2, представленных на рис. 1, *a*, с учетом (15) удовлетворяют (16) при следующих значениях γ : штрихпунктир — $\gamma \approx 0$, кривая 1 — $\gamma \approx 0.15$, кривая 2 — 0.6, кривая 3 — 0.95, кривая 4 — 0.951056, кривая 10 отвечает $\gamma \approx -0.5$, кривая 11 — 0.951056. Асимптотики решений P2 на рис. 1, *b* описываются (16) при γ : штрихпунктир — $\gamma \approx -0.2$, кривая 1 — $\gamma \approx 0.15$, кривая 2 — 0.3, кривая 3 — 0.3090155, кривая 11 — $\gamma \approx -0.26$, кривая 12 — -0.3090167 .

Формула (16) непригодна при $|s_1|^2 > 1$, т.е. при $\gamma^2 > 1 - \sin^2 \pi v$. В этом случае для определения асимптотического поведения решений P2 на $-\infty$ должна применяться формула [5]

$$y \sim |x|^{-1/2} \operatorname{cosec}(2|x|^{3/2}/3 - (3\rho^2/4) \ln |x| + \theta),$$

$$\rho^2 = \pi^{-1} \ln(|s_1|^2 - 1),$$

$$\theta = (3\rho^2/2) \ln 2 - \arg [s_1 \Gamma(1/2 + i\rho^2/2)].$$

Следовательно, для удовлетворяющих этой асимптотике решений 5–9, 12–16 на рис. 1, *a* и 4–10, 13–17 на рис. 1, *b* имеем $|\gamma| > 0.951056$ и $|\gamma| > 0.309017$, соответственно.

Сепаратрисные решения (11) отвечают условию $1 - s_1 s_3 = 0$ [5], и в случае $s_2 = 0$ получим

$\gamma = \pm(1 - \sin^2 \pi v)^{1/2}$. При $v = 1/2$ следует $\gamma = \pm 1$, $\beta = 0$ и $|s_1| = 1$. Это означает, что регулярные на $+\infty$ решения P2 не могут в этом случае иметь колебательную асимптотику (16), что подтверждают результаты численного интегрирования (рис. 3).

Если $v = 0$, то $\beta = 0$ и множитель Стокса s_1 чисто мнимый. Известно [3], что в этом случае поведение решений P2 на $+\infty$ описывается функцией Эйри

$$y \sim c \operatorname{Ai}(x) \sim 2^{-1} \pi^{-1/2} c x^{-1/4} \exp(-2x^{3/2}/3). \quad (17)$$

При $x \rightarrow -\infty$ и $c < 1$ асимптотика этих решений выражается формулой (16), которая при $v = 0$ сводится к соответствующей формуле [3]. Вычисления показывают, что асимптотика решения 1 (рис. 2, *a*) удовлетворяет (16) при $\gamma = -0.5$, 2 — при $\gamma = -0.99$, 3 — -0.999999 , т.е., выполняя численное построение решений уравнения P2 при малых $v \rightarrow 0$ с асимптотикой $y \rightarrow v/x$ при $x \rightarrow +\infty$, в результате получили решения с асимптотикой (17), которые были построены ранее в [6,7]. В [3] утверждалось, что при $v = 0$ постоянная $c = \gamma$ в (16). Необходимо внести поправку: как следует из представленных результатов, $c = -\gamma$.

Заметим, что формула (17) может быть получена в результате линеаризации P2 при $v = 0$. Если $v \neq 0$, то линеаризация уравнения (1) приводит к неоднородному уравнению Эйри, поэтому асимптотику решений P2 $y \rightarrow v/x$ при $x \rightarrow +\infty$ можно представить в виде

$$y \sim c \operatorname{Ai}(x) + v \pi \operatorname{Gi}(x).$$

Здесь $\operatorname{Gi}(x)$ — решение неоднородного уравнения Эйри $y'' = xy - \pi^{-1}$, причем $\operatorname{Gi}(x) \sim \pi^{-1} x^{-1}$, $x \rightarrow +\infty$ [11].

Кривые 1а–5а (рис. 2, *a*) также являются сепаратрисными при $x \rightarrow -\infty$ с асимптотикой (11). Они отвечают одним и тем же значениям $\beta = 0$, $\gamma = -1$, но разным s_2 .

Если $s_2 \neq 0$, то асимптотика решений P2 при $x \rightarrow +\infty$ дается формулой [5]

$$y(x) \sim \sigma \sqrt{x/2} \operatorname{ctg} [2^{1/2} x^{3/2}/3 + (3\rho/4) \ln x + (5\rho/4) \ln 2 - X/2], \quad (18)$$

$\sigma = \operatorname{sign}(s_2)$, $\rho = \pi^{-1} \ln |s_2|$, $X = \arg [\Gamma(3/4 + \sigma v/2 + i\rho/2) \Gamma(1/4 - \sigma v/2 + i\rho/2)] - \arg(1 + s_1 s_2)$.

Решения 1а, 2а соответствуют $s_2 < 0$, 3а–5а — $s_2 > 0$.

Для решений P2 при $v = 1/2$, приведенных на рис. 2, *b*, $\beta = -1$, $\gamma = 0$. Асимптотика решения, показанного на рис. 2, *b* сплошными линиями, удовлетворяет (18) при $s_2 \approx 0.72$. Решение (12) при $C \rightarrow \infty$, представленное штриховыми кривыми, соответствует $s_2 = 1$, когда формула (18) становится непригодной. Интересно отметить, что, используя асимптотические представления при $x \rightarrow +\infty$ функций Эйри $\operatorname{Ai}(-x)$, $\operatorname{Bi}(-x)$ и их производных [11], для решения (12) с постоянной $C = 0$ получим асимптотику (18), если множитель Стокса s_2 стремится к единице слева $s_2 = 1 - 0$, а для решения ($C \rightarrow \infty$) — справа $s_2 = 1 + 0$.

Заключение

Реализована возможность численного интегрирования уравнения P2, позволяющая вычислять значения функции Пенлеве второго рода в некоторых частных случаях. Возникает вопрос об обозначении этой функции для выделения конкретного решения. Так как любое частное решение можно однозначно характеризовать значением свободного параметра ν , мнимой частью γ множителя Стокса s_1 и вещественным множителем s_2 , для функции Пенлеве второго рода предлагается следующее обозначение: $P2(x; \nu, \gamma, s_2)$. Тогда, например, вычисленные здесь решения с асимптотикой $y \sim \nu/x$ при $x \rightarrow +\infty$ будут обозначены как $P2(x; \nu, \gamma, 0)$.

Автор благодарит С.Ю. Славянова, А.И. Кириллова и Т.В. Рогозкину за содействие публикации.

Список литературы

- [1] Громак В.И. // ДУ. 1982. Т. 18. № 5. С. 753–763.
- [2] Flaschka H., Newell A.C. // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 76. N 1. P. 65–116.
- [3] Канаев А.А., Новокшенов В.Ю. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 3. С. 590–594.
- [4] Итс А.Р., Канаев А.А. // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1987. Т. 51. № 4. С. 878–892.
- [5] Канаев А.А. // ТМФ. 1988. Т. 77. № 3. С. 323–332.
- [6] Rosales R.R. // Proc. Roy Soc. London. 1978. Vol. A361. N 1706. P. 265–275.
- [7] Miles J. // W Ibid. P. 277–281.
- [8] Cohen I.M. // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. N 10. P. 1492–1499.
- [9] Кашеваров А.В. // ЖВММФ. 1998. Т. 38. № 6. С. 992–1000.
- [10] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.
- [11] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И.М. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.