

01;03

## О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно осциллирующей слабо заряженной капли

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, М.В. Волкова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 марта 2003 г.)

Получено аналитическое выражение для напряженности электростатического поля в окрестности заряженной капли электропроводной жидкости, совершающей нелинейные осцилляции, когда начальная деформация формы определена виртуальным возбуждением произвольной одиночной моды капиллярных колебаний. Оказалось, что даже при малых зарядах (когда параметр Рэлея для капли равен одной десятой от критического в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду) напряженность электростатического поля у поверхности капли при начальном возбуждении одной из высоких мод достаточна для зажигания коронного разряда.

**1.** Согласно существующим представлениям, разряд линейной молнии может быть инициирован коронным разрядом в окрестности капли или обводненной (тающей) градины, свободно падающей в грозном облаке [1–3]. Натурные же измерения зарядов на каплях в грозных облаках показывают, что величины зарядов на каплях достаточно малы и величина безразмерного параметра Рэлея, характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду, для капель миллиметрового радиуса не превышает одной десятой от критического по Рэлею [4]. Более того, заряды капель недостаточны для того, чтобы напряженность электростатического поля собственного заряда у поверхности сферической капли достигла величины  $E_+ \approx 20 \text{ kV/cm}$ , при которой возможно зажигание коронного разряда [5]. В то же время известно, что амплитуда осцилляций дождевых и крупных ( $R \approx 100\text{--}1000 \mu\text{m}$ ) облачных капель достигает величины, сравнимой с радиусом капли [6]. В этой связи представляется целесообразным рассчитать напряженность поля собственного заряда у вершин нелинейно осциллирующей капли, поскольку из общефизических соображений понятно, что напряженность поля должна увеличиваться с ростом амплитуды осцилляций.

Отметим, что раскачка интенсивных осцилляций крупных ( $R \approx 100\text{--}1000 \mu\text{m}$ ) капель, свободно падающих в грозном облаке, происходит за счет их столкновений с более мелкими капельками, у которых  $R \sim 10 \mu\text{m}$  и на которые приходится максимум концентрации облачных капель [4]. Таким образом, колебательная энергия аккумулируется в высоких модах осцилляций капли. Как показано в [7,8], перекачка энергии осцилляций из высоких мод в наиболее низкую основную ( $n = 2$ ) за счет нелинейного резонансного взаимодействия в капле идеальной жидкости (только в этой модели на данный момент возможны корректные расчеты нелинейных осцилляций) не реализуется. Но в третью и четвертую моды осцилляций энергия из высоких мод перекачива-

ется достаточно эффективно [7,8]. В связи со сказанным будем рассчитывать напряженность электростатического поля у поверхности нелинейно осциллирующей капли при начальном возбуждении одной из более высоких мод, чем основная.

**2.** Пусть имеется нелинейно осциллирующая капля идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен  $Q$ , объем определяется объемом сферы с радиусом  $R$  и в начальный момент времени  $t = 0$  равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды  $\varepsilon$  (существенно меньшей радиуса капли), определенное полиномом Лежандра порядка  $m$ . В нижеследующих рассуждениях будем пользоваться безразмерными переменными, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ .

Уравнение поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли представим в виде

$$r(\Theta, t) = 1 + \xi(\Theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и считать, что после скоростей движения жидкости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}; t) = \nabla\psi(\mathbf{r}; t)$  полностью определяется функцией потенциала поля скоростей  $\psi(\mathbf{r}; t)$ . Математическая формулировка задачи будет иметь вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r}; t) = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}; t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}; t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \Phi(\mathbf{r}; t) \rightarrow 0;$$

$$r = 1 + \xi(\Theta, t): \quad \Phi = \Phi_S(t); \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta};$$

$$\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\text{grad } \psi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{grad } \Phi)^2 = \text{div } \mathbf{n};$$

$$t = 0: \quad \xi(\Theta, t) = \xi_0 + \varepsilon P_m(\cos \Theta) \quad (m \geq 2);$$

$$\frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial t} = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) dS = Q, \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\Theta, t); \\ 0 \leq \Theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\int_V r^2 dr \sin \Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi = \frac{4}{3} \pi, \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\Theta, t); \\ 0 \leq \Theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\int_V \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \sin \Theta d\Theta d\phi = 0,$$

$\psi(\mathbf{r}; t)$  и  $\Phi(\mathbf{r}; t)$  — потенциалы поля скоростей жидкости и электростатического поля;  $\Delta p$  — перепад постоянных давления внутри и вне капли в состоянии равновесия;  $\varepsilon$  — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли;  $\xi_0$  — константа, определяемая из условия неизменности объема капли с точностью до слагаемого второго порядка малости равная,

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2m+1)} + O(\varepsilon^3).$$

Проводя решение сформулированной нелинейной задачи методом многих масштабов, как это делалось ранее в [8–10], найдем аналитическое выражение для образующей формы капли

$$\xi(\Theta, t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega_m t) P_m(\mu) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2m+1)} [1 + \cos(2\omega_m t)] + \sum_{j=1}^m [(\lambda_{m,m,2j}^{(-)} + \lambda_{m,m,2j}^{(+)}) \cos(\omega_{2j} t) - (\lambda_{m,m,2j}^{(-)} - \lambda_{m,m,2j}^{(+)}) \cos(2\omega_m t)] P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t);$$

$$\mu \equiv \cos \Theta;$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W]; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\lambda_{ikn}^{(\pm)} \equiv \frac{[\gamma_{ikn} \pm \omega_i \omega_k \eta_{ikn}]}{[\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_k)^2]};$$

$$\gamma_{ikn} \equiv K_{ikn} \left[ \omega_i^2 (n-i+1) + 2n[k(k+1) - 1] + [k(i+1) - i(2i-2n+7) + 3]n \frac{W}{2} \right] + \alpha_{ikn} \left[ \frac{1}{i} \omega_i^2 + n \frac{W}{2} \right];$$

$$\eta_{ikn} \equiv K_{ikn} \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) + \alpha_{ikn} \frac{1}{i} \left( 1 + \frac{n}{2k} \right);$$

$$K_{ikn} \equiv [C_{n0k0}^{n0}]^2;$$

$$\alpha_{ikn} \equiv -\sqrt{i(i+1)k(k+1)} \cdot C_{i0k0}^{n0} C_{i(-1)k1}^{n0},$$

$P_m(\mu)$  — полиномы Лежандра порядка  $m$ ;  $C_{i0k0}^{n0}$  и  $C_{i(-1)k1}^{n0}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [11].

3. Поскольку наша задача заключается в расчете величины напряженности электростатического поля собственного заряда нелинейно осциллирующей капли, выпишем электростатические задачи нулевого, первого и второго порядков для отыскания электростатического потенциала капли. Исходная электростатическая задача имеет вид

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \Phi;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \Phi \rightarrow 0; \quad r = 1 + \xi: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t);$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint \text{grad } \Phi d\mathbf{S} = Q,$$

$$S = \{r = 1 + \xi(\Theta, t); \quad 0 \leq \Theta \leq \pi; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$

Решение ищем в виде разложения:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \Theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(r, \Theta, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя это разложение в выписанную электростатическую задачу, получим следующие задачи различных порядков малости.

В нулевом порядке малости по  $\varepsilon$

$$\Delta \Phi^{(0)} = 0;$$

$$\text{grad } \Phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$\Phi^{(0)}|_{r=1} = \Phi_S^{(0)};$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \sin \Theta d\Theta d\phi = Q.$$

В первом порядке малости по  $\varepsilon$

$$\Delta \Phi^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \Phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$\Phi^{(1)}|_{r=1} = \Phi_S^{(1)}(t) - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \xi^{(1)};$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \Big|_{r=1} \xi^{(1)} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=1} \xi^{(1)} \right) \sin \Theta d\Theta d\phi = 0.$$

Во втором порядке малости по  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{(2)} &= 0; \\ r \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \Phi^{(2)} &\rightarrow 0; \\ \Phi^{(2)}|_{r=1} &= |\Phi_s^{(2)} - \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}|_{r=1} \xi^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}|_{r=1} (\xi^{(1)})^2 - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}|_{r=1} \xi^{(1)}; \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} &\left( \left( \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}|_{r=1} + 2 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}|_{r=1} \right) \xi^{(2)} \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial r^3}|_{r=1} + 2 \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}|_{r=1} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}|_{r=1} \right) (\xi^{(1)})^2 \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2}|_{r=1} + 2 \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}|_{r=1} \right) \xi^{(1)} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r}|_{r=1} - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}|_{r=1} \cdot \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\Theta} \right) \cdot \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi = 0. \end{aligned}$$

Решение сформулированной электростатической задачи стандартными методами приводит к выражению для электростатического потенциала в окрестности нелинейно осциллирующей заряженной капли

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{Q}{r} + \varepsilon Q \left[ \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] r^{-(n+1)} P_n(\mu); \end{aligned}$$

$$F_n^{(2)}(t) \equiv M_n^{(2)}(t) + \sum_{i,k=2}^{\infty} i K_{ikn} M_i^{(1)}(t) M_k^{(1)}(t);$$

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nm} \cos(\omega_n t); \quad M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t);$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} (\lambda_{nmn}^{(-)} + \lambda_{nmn}^{(+)} \cos(2\omega_n t)).$$

Напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv -\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, t)$  в окрестности нелинейно осциллирующей заряженной капли будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \left\{ \frac{Q}{r^2} + \varepsilon Q \left[ \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] \right. \\ &\quad \left. \times (n+1) r^{-(n+2)} P_n(\mu) \right\} \mathbf{n}_r + \left\{ \varepsilon Q \left[ \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] r^{-(n+2)} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right\} \mathbf{n}_\Theta + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}_r$  и  $\mathbf{n}_\Theta$  — орты сферической системы координат.

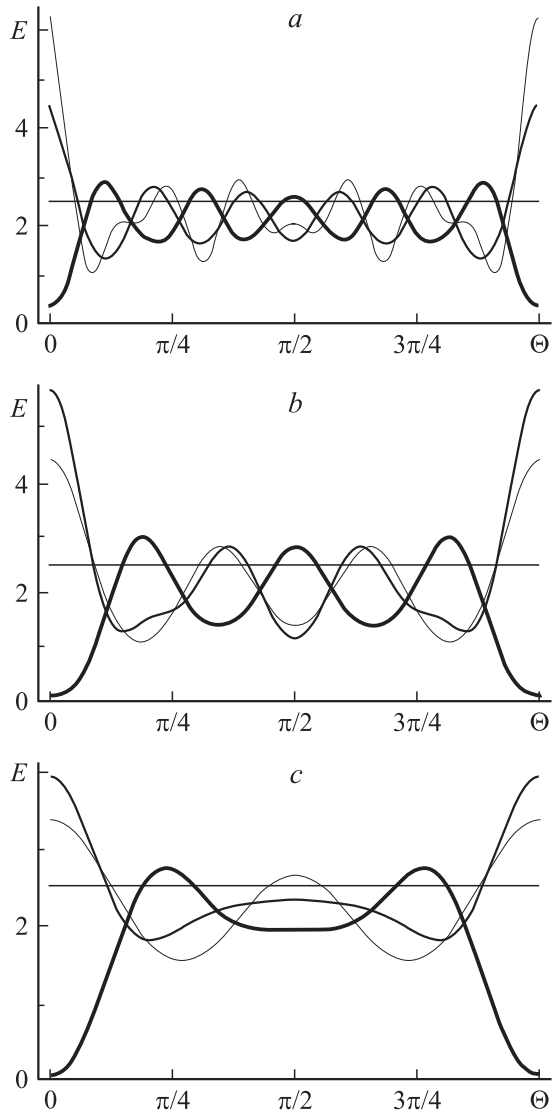
Непосредственно на поверхности капли тангенциальная к поверхности идеально проводящей жидкости компонента напряженности  $E_\tau$  обратится в нуль, а нормальная  $E_n$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} r = 1 + \xi: \quad E_n &= Q + Q\varepsilon \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) M_n^{(1)}(t) \right. \\ &+ \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1) - (n+1)\delta_{n0}] M_n^{(2)}(t) \\ &+ \sum_{i,k=2}^{\infty} [(1-\delta_{n0})(n+1)i + 3 - (i+1)(i+2)] K_{ikn} \\ &\left. + 0.5\alpha_{ikn} M_i^{(1)}(t) M_k^{(1)}(t) \right\} P_n(\mu) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2)$$

На рис. 1 приведены результаты расчета по (2) зависимости от полярного угла в различные моменты времени величины напряженности электростатического поля на поверхности нелинейно осциллирующей капли, для которой величина параметра Рэлея на порядок меньше критической  $W = 0.4$ , когда в начальный момент времени возбуждены десятая (а), шестая моды (б).

На рис. 2 приведены формы образующей нелинейно осциллирующей капли в различные моменты времени, когда в начальный момент времени возбуждены десятая (а), шестая моды (б). На рис. 3 приведены временные зависимости величины напряженности на поверхности капли при различных значениях полярного угла. Интересно, что максимальное значение напряженности на оси симметрии капли достигается не в начальный момент времени, но по прошествии некоторого интервала времени, когда энергия начальной деформации перераспределится между нелинейно возбуждаемыми модами и их суперпозиция на вершине, лежащей на оси симметрии, обеспечит минимальную кривизну вершины. Видно также, что характерное время перераспределения энергии между нелинейно взаимодействующими модами растет с увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию.

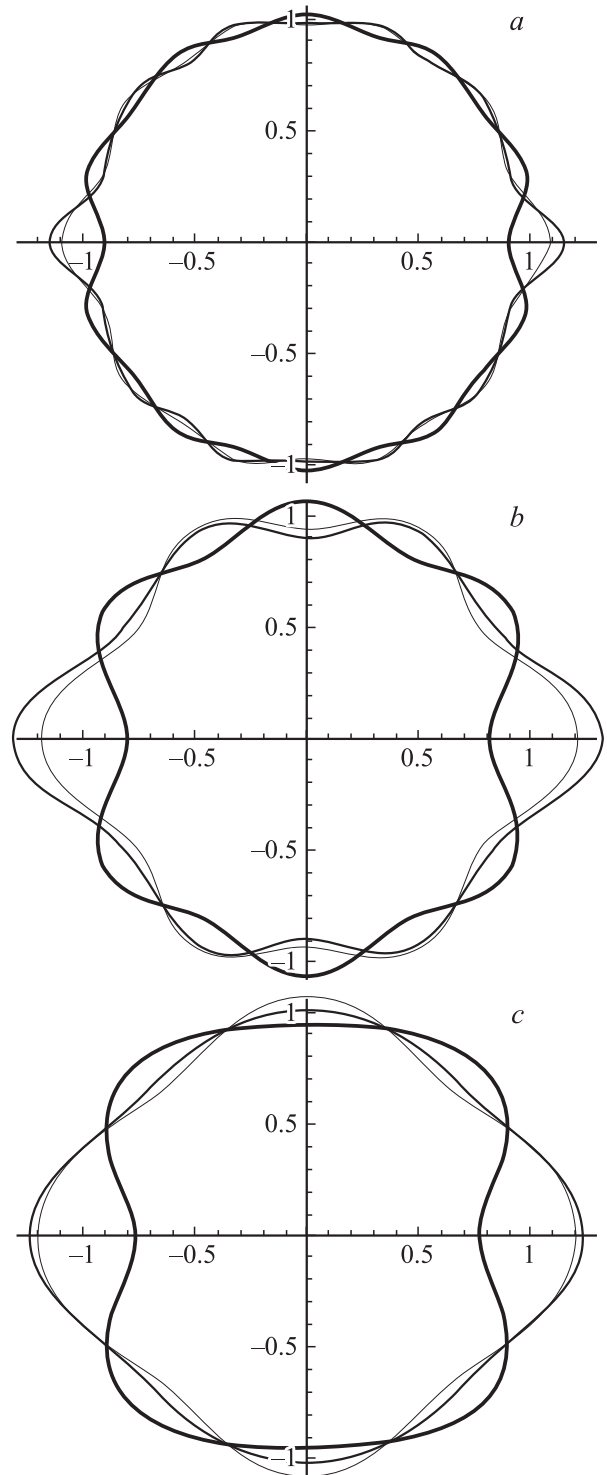
В использованных безразмерных переменных для крупной капли воды с  $R = 1 \text{ mm}$  критическая для зажигания коронного разряда величина напряженности электростатического поля равна  $\approx 2.5$ . На рис. 1 и 3 соответствующее значение напряженности указано прямой линией, параллельной оси абсцисс. Видно, что значительную часть времени нелинейных осцилляций напряженность поля у вершин капли достаточна велика для зажигания коронного разряда. Интересно то, что локальное увеличение напряженности электростатического поля связано с возбуждением более высоких мод, чем основная ( $n = 2$ ), с раскачкой которой традиционно [2,11,12] связывалась возможность зажигания коронного разряда в окрестности капли.



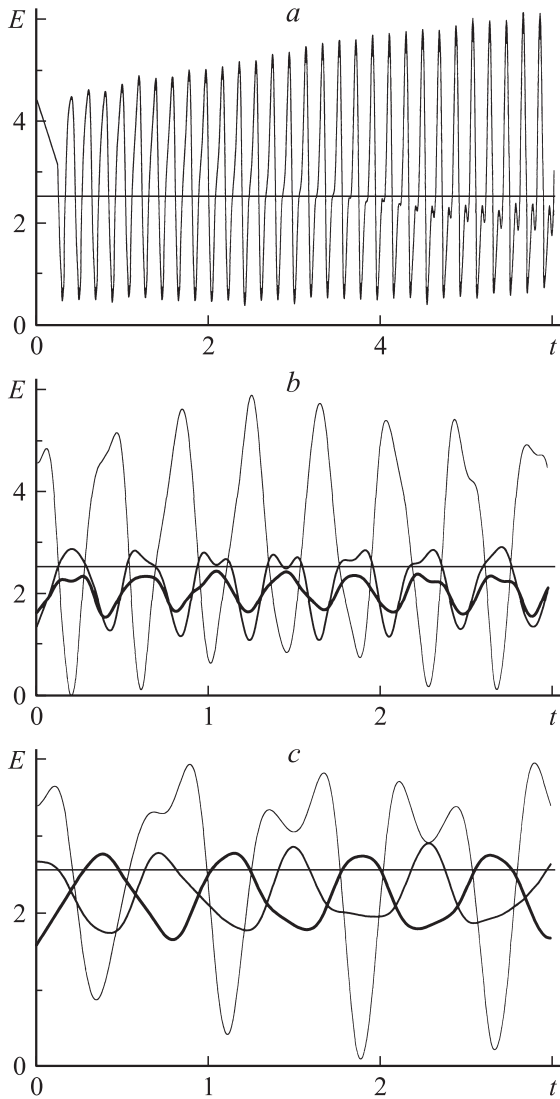
**Рис. 1.** Зависимости от полярного угла напряженности электростатического поля на поверхности нелинейно осциллирующей капли при  $W = 0.4$ , когда в начальный момент времени возбуждена. *a* — десятая мода с амплитудой  $\varepsilon = 0.1$ : тонкая кривая — начальный момент времени  $t = 0$ ; кривая средней толщины —  $t = 7.0045$ , когда поле на оси симметрии максимально; жирная кривая —  $t = 2.4171$ , когда поле на оси симметрии минимально. *b* — шестая мода с амплитудой  $\varepsilon = 0.1$  в характерные моменты времени  $t = 0, 0.891, 1.899$  (распределение толщин кривых такое же, как на рис. 1, *a*). *c* — четвертая мода с амплитудой  $\varepsilon = 0.2$  в характерные моменты времени  $t = 0, 1.26, 0.1971$  (распределение толщин кривых такое же, как на рис. 1, *a*).

**4.** В проведенном рассмотрении не учитывалась возможность резонансного обмена энергией между модами, тогда как известно [8,12,13], что например, при  $W < 4$  имеет место внутреннее вырожденное трехмодовое резонансное взаимодействие четвертой и шестой мод капиллярных осцилляций. Вообще же количество

резонансных ситуаций весьма велико: для первой сотни мод осциллирующей при  $W < 4$  оно измеряется тысячами [8,14,15]. В связи со сказанным рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени возбуждена четвертая мода. Напомним, что резонансное взаимодей-



**Рис. 2.** Формы образующей нелинейно осциллирующей капли в те же моменты времени, что и на рис. 1: *a* — десятая мода, *b* — шестая мода, *c* — четвертая мода.



**Рис. 3.** Временные зависимости величины напряженности на поверхности капли при тех же значениях параметров, что и на рис. 1. *a* — десятая мода на оси симметрии капли  $\Theta = 0$ , амплитуда осцилляций достигает максимума за пределами графика,  $t = 7.0045$ ; *b* — шестая мода: тонкая кривая —  $\Theta = 0$ , средняя —  $\Theta = \pi/2$ , жирная —  $\Theta = \pi/4$ ; *c* — четвертая мода: тонкая кривая —  $\Theta = 0$ , средняя —  $\Theta = \pi/2$ , жирная  $\Theta = \pi/4$ .

ствии четвертой и шестой мод асимметрично, начальное возбуждение шестой моды не приводит к резонансному обмену энергией с четвертой, тогда как начальное возбуждение четвертой моды приводит к резонансной перекачке энергии в шестую моду [13]. В итоге, если начальная деформация равновесной сферической формы капли задается виртуальным возбуждением четвертой моды, за счет резонансного обмена энергией амплитуды и четвертой, и шестой мод имеют первый порядок малости, хотя само внутреннее резонансное взаимодействие мод есть эффект, реализующийся лишь во втором порядке [8].

Итак, рассмотрим случай вырожденного трехмодового резонанса, когда резонансно взаимодействуют две моды, т. е. когда справедливо соотношение вида  $\omega_6 = 2\omega_4$ .

Проводя такой же анализ, как в [8], получим для временной зависимости амплитуд четвертой и шестой мод первого порядка малости выражения

$$M_6^{(1)}(t) = 2a_6^{(1)}(\epsilon t) \cos[2\omega_4 t - \beta_6^{(1)}(\epsilon t)]; \quad (3)$$

$$M_4^{(1)}(t) = 2a_4^{(1)}(\epsilon t) \cos[\omega_4 t + b_4^{(1)}(\epsilon t)], \quad (4)$$

где вещественные функции  $a_6^{(1)}(\epsilon t)$ ,  $\beta_6^{(1)}(\epsilon t)$ ,  $a_4^{(1)}(\epsilon t)$ ,  $b_4^{(1)}(\epsilon t)$  являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$4\omega_6 \frac{da_6^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{446}^{(+)} [a_4^{(1)}(T_1)]^2 \sin[\varphi_{64}^{(1)}(T_1)];$$

$$4\omega_6 a_6^{(1)}(T_1) \frac{d\beta_6^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 4\omega_6^2 a_6^{(1)}(T_1) \delta + \Lambda_{446}^{(+)} [a_4^{(1)}(T_1)]^2 \cos[\varphi_{64}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_4 \frac{da_4^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{644}^{(-)} a_6^{(1)}(T_1) a_4^{(1)}(T_1) \sin[\varphi_{64}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_4 a_4^{(1)}(T_1) \frac{db_4^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{644}^{(-)} a_6^{(1)}(T_1) a_4^{(1)}(T_1) \times \cos[\varphi_{64}^{(1)}(T_1)];$$

$$\varphi_{64}^{(1)}(T_1) = \beta_6^{(1)}(T_1) + 2b_4^{(1)}(T_1);$$

$$\Lambda_{ikn}^{(\pm)} = (\gamma_{ikn} + \gamma_{kin}) \pm \omega_i \omega_k (\eta_{ikn} + \eta_{kin});$$

$$a_6^{(1)}(0) = 0; \quad \beta_6^{(1)}(0) = \pi/2; \quad a_4^{(1)}(0) = 1/2;$$

$$b_4^{(1)}(0) = 0; \quad T_1 \equiv \epsilon t, \quad (5)$$

где  $\delta$  — параметр расстройки, определяющийся выражением

$$2\omega_4 = \omega_6(1 + \epsilon\delta).$$

Соотношения для амплитуд второго порядка малости определяются так же, как и в отсутствие резонанса [8]. Выражения для напряженности электрического поля в окрестности такой капли при наличии резонансного обмена энергией между четвертой и шестой модами будет по-прежнему иметь вид (1), (2), но с коэффициентами  $M_n^{(1)}(t)$ , определенными соотношениями (3)–(5).

Результаты расчетов по (2), (3)–(5) для анализируемой ситуации приведены на рис. 1, *c*, 2, *c* и 3, *c*. Качественных изменений по сравнению с данными, представленными на рис. 1, *a, b*, 2, *a, b*, и 3, *a, b*, и соответствующими ситуации отсутствия резонансного обмена энергией между модами нет, и все сделанные выводы о возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно осциллирующей капли остаются справедливыми.

Из сравнения кривых, приведенных на рис. 1 и 3, видно, что независимо от наличия или отсутствия внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия мод с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы капли, напряженность электростатического поля на поверхности капли растет. Из рис. 2 также видно, что с ростом номера изначально возбужденной моды растет кривизна выступов на поверхности капли. Поскольку же во всех случаях заряд капли принимается одним и тем же, то ясно, что именно увеличение кривизны поверхности при виртуальном возбуждении высоких мод приводит к увеличению напряженности поля на поверхности нелинейно осциллирующей капли.

В реальных условиях грозового облака возбуждение нелинейных осцилляций свободно падающих крупных ( $R \approx 100 - 1000 \mu\text{m}$ ) капель происходит за счет их столкновений с более мелкими капельками, имеющими радиусы  $R \sim 10 \mu\text{m}$ , на которые приходится максимум функции распределения облачных капель по размерам [4]. При таких столкновениях в крупных каплях будут возбуждаться нелинейные осцилляции мод с номерами  $m \in 10 - 100$ . При наличии на капле заряда, такого что параметр Рэлея  $W$  достигает одной десятой от своего критического для реализации неустойчивости основной моды осцилляций значения  $W_{\text{cr}} = 4$ , напряженность электростатического поля собственного заряда капли становится достаточно большой для зажигания коронного разряда в ее окрестности.

Анализ выражений (1), (2) для напряженности поля у поверхности нелинейно осциллирующей капли показывает, что с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию, равномерность асимптотического разложения для  $E$  достигается при все меньших значениях малого параметра  $\varepsilon$ . Так, при начальном возбуждении четвертой моды асимптотичность разложений (1), (2) имеет место при  $\varepsilon \leq 0.2$ , а для начального возбуждения шестой и десятой мод — только при  $\varepsilon \leq 0.1$ . Это обстоятельство связано с тем, что энергия, вносимая в колебательную систему начальной деформацией  $n$ -й моды амплитуды  $\varepsilon$  при прочих равных условиях, пропорциональна  $n^2$ . Перераспределение этой энергии между модами, возбуждающимися во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, придостаточно большом  $\varepsilon$  приводит к значительному росту амплитуд некоторых мод с малыми номерами и к нарушению равномерности разложений. Существенное увеличение напряженности электростатического поля у вершин капли с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию, проиллюстрированное приведенными рисунками, также объясняется увеличением энергии, вносимой в колебательную систему.

В проведенных рассуждениях не учитывалось влияние внешнего электростатического поля, всегда присутствующего в грозовом облаке и достигающего величин  $\sim 10 \text{ kV/cm}$  [4], в котором капля будет поляри-

зоваться. Появление на капле дополнительного поляризационного заряда может привести к существенному увеличению напряженности поля в окрестности капли.

## Заключение

При нелинейных осцилляциях слабо заряженной капли напряженность электростатического поля у ее вершин может превышать значение, критическое для зажигания коронного разряда в окрестности капли. С увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы капли, напряженность электростатического поля у вершин капли растет.

## Список литературы

- [1] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [2] Бейтуганов М.Н. // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 42–49.
- [3] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [4] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Ред. И.П. Мазина и др. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
- [5] Лозанский Э.Д., Фирсов О.Б. Теория искры. М.: Атомиздат, 1975. 272 с.
- [6] Beard K.V. // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 3. P. 357–370.
- [7] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
- [8] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [9] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [10] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [11] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [12] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [13] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
- [14] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
- [15] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.