

01;03

## Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 24 апреля 2003 г.)

Выведено дисперсионное уравнение для неосесимметричных капиллярных колебаний объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости. Показано, что критические условия реализации неустойчивости неосесимметричных мод струи менее жесткие, чем осесимметричных, и этот эффект выражен тем более ярко, чем меньше диэлектрическая проницаемость жидкости.

1. Исследование капиллярных осцилляций, устойчивости и условий разбиения на капли заряженной струи электропроводной или диэлектрической жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями феномена в различных разделах технической физики и технологии (см. [1,2] и указанную там литературу). В связи со сказанным этот физический объект неоднократно изучался как экспериментально, так и теоретически: в линейной и нелинейной постановках [1–12]. И все таки некоторые вопросы, связанные с устойчивостью струй, до сих пор непонятны. Сказанное, в частности, относится к анализу устойчивости неосесимметричных мод осцилляций и связано с тем, что большая часть ранее проведенных исследований была прагматически ориентирована на получение потоков монодисперсных капель [2]. Тем не менее с феноменом распада на капли неосесимметричных струй приходится сталкиваться при исследовании спонтанного дробления струй: выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [13] и менисков жидкости на торцах капилляров [14,15], при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду. В [12] были рассмотрены общие закономерности потери устойчивости неосесимметричными модами поверхностно заряженных струй идеально проводящих жидкостей и выяснилось, что критические условия реализации неустойчивости неосесимметричных мод оказываются менее жесткими, чем осесимметричных, и этот эффект усиливается с увеличением вязкости. В этой связи представляет интерес исследование устойчивости неосесимметричных мод в другом предельном случае объемно заряженных струй идеально диэлектрических жидкостей. Подобная задача представляет интерес в связи с проблемой создания электрически управляемых потоков заряженных капель жидкого водорода для лазерного термоядерного синтеза [16], ускорителей макрочастиц [17,18] или для нейтринных детекторов [19].

2. Пусть дана бесконечная, движущаяся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью  $U_0$  цилиндрическая струя вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$ , диэлектрической

проницаемостью  $\epsilon$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , имеющая радиус  $R$ . В рамках модели „вмороженного“ заряда примем, что заряд распределен равномерно с объемной плотностью  $\mu$ . Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью  $U_0$ . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется возможными (имеющими например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных колебаний поверхности такой струи.

Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью  $OZ$ , совпадающей с осью симметрии струи, орт  $\mathbf{n}_z$  которой направлен вдоль вектора скорости  $U_0$ . Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде:

$$r = R + \xi(z, \phi, t), \quad |\xi| \ll R.$$

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости в струе много меньше релятивистской)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \text{div} \mathbf{U} = 0;$$

$$\Delta \Phi^{\text{in}} = -4\pi \frac{\mu}{\epsilon}; \quad \Delta \Phi^{\text{ex}} = 0;$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi^{\text{in}} \rightarrow \text{const}; \quad |\mathbf{U}| = \text{const} < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \text{grad} \Phi^{\text{ex}} \rightarrow 0;$$

граничных условий на свободной поверхности струи

$$r = R + \xi: \quad \Phi^{\text{in}} = \Phi^{\text{ex}}, \quad \epsilon \frac{\partial \Phi^{\text{in}}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^{\text{ex}}}{\partial n};$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla [r - (R + \xi(z, \phi, t))] = 0; \quad \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} U_\phi = 0;$$

$$-P(\mathbf{r}, t) - P_0 + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - P_e + P_\sigma = 0.$$

Здесь  $U_r, U_\phi, U_z$  — компоненты поля скоростей в цилиндрической системе координат;  $P(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическое давление;  $P_0$  — атмосферное давление;  $P_e$  — давление электрического поля (см. Приложение);  $P_\sigma$  — давление сил поверхностного натяжения ( $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}$ );  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности струи;  $\Phi^{\text{in}}$  и  $\Phi^{\text{ex}}$  — электростатические потенциалы внутри и вне струи соответственно.

Решение сформулированной задачи будем искать в виде разложения по малому параметру  $|\xi|/R$ .

В нулевом приближении получим неподвижный цилиндрический столб жидкости, а также известное выражение для давления электрического поля на поверхность равномерно заряженного бесконечного цилиндра фиксированного радиуса.

3. Переходя к безразмерным переменным, в которых  $R = 1, \rho = 1, \sigma = 1$ , и сохраняя за всеми физическими величинами прежние обозначения, запишем обсуждаемую задачу в линейном по  $|\xi|$  приближении в следующем виде

$$r = 1 + \xi(\phi, z, t); \quad |\xi| \ll 1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0; \quad (3)$$

$$\Delta \varphi^{\text{in}} = 0; \quad \Delta \varphi^{\text{ex}} = 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \varphi^{\text{in}} \rightarrow 0, \quad |\mathbf{U}| < \infty; \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi^{\text{ex}} \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$r = 1; \quad \varphi^{\text{in}} + \frac{\partial \Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} \xi = \varphi^{\text{ex}} + \frac{\partial \Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \xi; \quad (7)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \varphi^{\text{in}}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{\text{in}}}{\partial r^2} \xi \right) = \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r^2} \xi; \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_r = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - U_\phi = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0; \quad (11)$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - p_e + p_\sigma = 0. \quad (12)$$

В уравнениях (1)–(12)  $\varphi^{\text{in}}, \varphi^{\text{ex}}, p, p_e, p_\sigma$  — вызванные капиллярными колебаниями поверхности струй добавки первого порядка малости по  $|\xi|$  к электрическим потенциалам внутри и вне жидкости, гидродинамическому давлению, давлению электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно.

Раскладывая по малой величине  $|\xi|$  выражения для лапласовского давления и давления электрического поля на поверхность струи, несложно получить для величин первого порядка малости  $p_e$  и  $p_\sigma$  следующие соотношения (см. Приложение и [12]):

$$p_\sigma = -\left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right); \quad (13)$$

$$p_e = 2\pi\mu^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \right) \xi - \mu \left( \varphi^{\text{ex}} + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right). \quad (14)$$

4. Систему уравнений (2), (3) будем решать методом операторной скаляризации (подробно изложенным в [20], см. также [12]), раскладывая поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов  $\hat{\mathbf{N}}_i$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_i \psi_i(\mathbf{r}, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_i^+ \hat{\mathbf{N}}_j = 0 \quad (\text{при } i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta. \quad (17)$$

В выражениях (15), (16)  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$  — неизвестные скалярные функции;  $\hat{\mathbf{N}}_j^+$  — операторы, эрмитовосопряженные к операторам  $\hat{\mathbf{N}}_j$ .

Поскольку равновесная форма струи обладает осевой симметрией, то операторы  $\hat{\mathbf{N}}_i$  удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times \mathbf{e}_z; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z).$$

В цилиндрической системе координат поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  будет иметь следующие компоненты, выраженные в соответствии с (15) через скалярные функции  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ :

$$U_r = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r};$$

$$U_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \phi};$$

$$U_z = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \phi^2} \right]. \quad (18)$$

Подставляя (15), (18) в систему (2), (3) и используя свойства операторов (16), (17), получим систему скалярных уравнений

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_i - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 2, 3); \quad (19)$$

$$p = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \quad (20)$$

Используя (13), (14), (18), (20), граничные условия (9)–(12), преобразуем в граничные условия для неизвестных функций  $\psi_i$  и  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 r = 1: \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} - \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right] = 0; \\
 & 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \psi_1 \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \phi^2} \right\} \\
 & \quad + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \left\{ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \psi_3 \right\} = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \phi^2} \right] \right\} \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right\} = 0; \\
 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right\} \\
 & - 2\pi\mu^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \right) \xi + \mu \left( \varphi^{\text{ex}} + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right) \\
 & - \left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\xi$ ,  $\varphi^{\text{ex}}$ ,  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\psi_i$  описывают малые отклонения от равновесного состояния, для того чтобы проанализировать его устойчивость, примем, что временная зависимость всех малых величин имеет экспоненциальный вид

$$\xi, \varphi^{\text{ex}}, \varphi^{\text{in}}, \psi_i \sim \exp(st);$$

где  $s$  — комплексная частота.

Тогда решения уравнений (19) и (4) в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие условиям ограниченности (5), (6), будем искать в виде разложений по волнам, бегущим по невозмущенной цилиндрической поверхности струи вдоль оси  $OZ$ ,

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_1 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk; \\
 \psi_i &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_i I_m(lr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk \\
 & \quad (i = 2, 3); \quad (22) \\
 \varphi^{\text{ex}} &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_4 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk; \\
 \varphi^{\text{in}} &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_5 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (23)
 \end{aligned}$$

В виде аналогичного разложения представим и функцию  $\xi(z, \phi, t)$

$$\xi(z, \phi, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (24)$$

В (22)–(24)  $k$  — волновое число;  $l^2 \equiv k^2 + s/\nu$ ;  $m$  — азимутальное число, характеризующее неосесимметричность решений;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода;  $C_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , и  $D$  — коэффициенты разложений, зависящие от  $m$  и  $k$ .

Используя решения (23), (24) и учитывая свойства ортонормированности функций  $\exp(im\phi)$  и  $\exp(ikz)$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\phi] d\phi &= \delta_{m_1, m_2}; \\
 \int_{-\infty}^\infty \exp[i(k_1 - k_2)z] dz &= \delta(k_1 - k_2), \quad (25)
 \end{aligned}$$

где  $\delta_{m_1, m_2}$  — дельта-символ Кронекера,  $\delta(k_1 - k_2)$  — дельта-функция Дирака, из граничных условий (7), (8) несложно получить связь коэффициентов  $C_4$ ,  $C_5$  и  $D$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{2\pi\mu D}{K_m(k)} \cdot \frac{2 + (\varepsilon - 1)k \cdot h(k)}{\varepsilon \cdot k [h(k) - g(k)]}; \\
 C_5 &= \frac{2\pi\mu D}{I_m(k)} \cdot \frac{2\varepsilon + (\varepsilon - 1)k \cdot g(k)}{\varepsilon^2 k [h(k) - g(k)]}; \\
 h(k) &\equiv I'_m(k)/I_m(k); \quad g(k) \equiv K'_m(k)/K_m(k). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Подставляя решения (22), (23) с учетом (26) и разложение (24) в граничные условия (21) и используя соотношения (25), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $D$  и  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned}
 D \cdot s - C_1 k \cdot I'_m(k) - C_2 \cdot im \cdot I_m(l) - C_3 \cdot ikl \cdot I'_m(l) &= 0; \\
 C_1 \cdot 2im(k \cdot I'_m(k) - I_m(k)) + C_2 \cdot (l \cdot I'_m(l) - m^2 \cdot I_m(l) \\
 & \quad - l^2 \cdot I''_m(l)) + C_3 \cdot 2mk(I_m(l) - l \cdot I'_m(l)) = 0; \\
 C_1 \cdot 2ik^2 \cdot I'_m(k) - C_2 mk \cdot I_m(l) - C_3 \cdot (l^3 I''_m(l) + l^2 \cdot I''_m(l) \\
 & \quad + l(k^2 - m^2 - 1) \cdot I'_m(l) + 2m^2 \cdot I_m(l)) = 0; \\
 D \left\{ k^2 + m^2 - 1 - 2\pi\mu^2 \left[ 1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(2 + (\varepsilon - 1)k \cdot h(k))(2\varepsilon + (\varepsilon - 1)k \cdot g(k))}{2\varepsilon^2 \cdot k \cdot [h(k) - g(k)]} \right] \right\} \\
 & + C_1 (sI_m(k) + 2\nu k^2 I''_m(k)) + C_2 2vim(I''_m(l) - I_m(l)) \\
 & + C_3 2vikl^2 I''_m(l) = 0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Штрихами обозначены производные функций Бесселя  $m$ -го порядка по аргументу, которые могут быть выражены через функции Бесселя  $m$ -го и  $(m + 1)$ -го порядков с помощью следующих рекуррентных соотношений [21]:

$$I'_m(x) = I_{m+1}(x) + \frac{m}{x} I_m(x) = I_{m-1}(x) - \frac{m}{x} I_m(x);$$

$$I''_m(x) = -\frac{1}{x} I_{m+1}(x) + \left(1 + \frac{m(m-1)}{x^2}\right) I_m(x);$$

$$I'''_m(x) = \left(1 + \frac{m^2 + 2}{x^2}\right) I_{m+1}(x) + \frac{m-1}{x} \left(1 + \frac{m(m-2)}{x^2}\right) I_m(x);$$

$$K'_m(x) = \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x).$$

Напомним, что система однородных линейных уравнений (27) имеет нетривиальное решение только в случае, если ее определитель равен нулю  $\det[a_{ij}] = 0$ , где элементы  $a_{ij}$  определяются соотношениями

$$a_{11} = s; \quad a_{21} = a_{31} = 0;$$

$$a_{41} = k^2 + m^2 - 1 - 2\pi\mu^2 \left[1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \left( \frac{2 + (\varepsilon - 1)m + (\varepsilon - 1)k \cdot F_m(k)}{(\varepsilon - 1)m + \varepsilon k(F_m(k) - G_m(k))} \right) \right];$$

$$F_m(x) \equiv \frac{I_{m+1}(x)}{I_m(x)}; \quad G_m(x) \equiv \frac{K_{m+1}(x)}{K_m(x)};$$

$$a_{12} = -(k \cdot I_{m+1}(k) + m \cdot I_m(k));$$

$$a_{22} = 2im(k \cdot I_{m+1}(k) + (m-1) \cdot I_m(k));$$

$$a_{32} = 2ik(k \cdot I_{m+1}(k) + m \cdot I_m(k));$$

$$a_{42} = [s + 2v(k^2 + m(m-1))] \cdot I_m(k) - 2vk \cdot I_{m+1}(k);$$

$$a_{13} = -im \cdot I_m(l);$$

$$a_{23} = 2Il_{m+1}(l) - (l^2 + 2m(m-1)) \cdot I_m(l);$$

$$a_{33} = -mk \cdot I_m(l);$$

$$a_{43} = 2vim(l \cdot I_{m+1}(l) + (m-1) \cdot I_m(l));$$

$$a_{14} = -ik(l \cdot I_{m+1}(l) + m \cdot I_m(l));$$

$$a_{24} = -2mk(l_{m+1}(l) + (m-1)I_m(l));$$

$$a_{34} = -(l^2 + k^2)(l \cdot I_{m+1}(l) + m \cdot I_m(l));$$

$$a_{44} = 2vik([l^2 + m(m-1)] \cdot I_m(l) - l \cdot I_{m+1}(l)).$$

5. Раскрывая определитель четвертого порядка с элементами (28), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоты  $s$  колебаний поверхности струи азимутальным числом  $m$  и с волновым числом  $k$ ,

$$s^2 \left\{ m[l^2(l^2 + k^2) + 2m(m-1)l^2] + F_m(l) \cdot l[(l^2 + k^2) \times (l^2 - 4m) + 2l^2m^2] - 2l^2(l^2 + k^2) \cdot F_m^2(l) \right\} + 2sv \left\{ -ml^2(l^2 - k^2)(k^2 - m(m-1)) + F_m(l) \cdot l[l^2k^2(l^2 + k^2) + l^2m(m-1)(l^2 - 2m(m+1)) + l^2k^2m(3m+1) - 4k^2m(k^2 - m(m^2 - 1))] - 2l^2[k^2(l^2 + k^2) + m(m^2 - 1)(l^2 - k^2)] \cdot F_m^2(l) - F_m(k) \cdot k(2l^2(l^2k^2 + m^2(m^2 - 1)) + l^2m(l^2 + k^2(4m - 5)) + F_m(l) \cdot l[l^4 - 5l^2k^2 + 4m(m^2 - 1)(l^2 - k^2)] + 2l^2(m^2 - 1)(l^2 - k^2) \cdot F_m^2(l)) \right\}$$

$$= f(m, \mu, k) \left\{ m(l^2m(l^2 - k^2) + F_m(l) \cdot l[l^2(l^2 - k^2) - 2m(l^2 - 2k^2)] - 2l^2(l^2 - k^2)F_m^2(l)) + F_m(k) \cdot k(m[l^2(l^2 - k^2) - 2ml^2] + l(l^2 - k^2)(l^2 - 4m) \times F_m(l) - 2l^2(l^2 - k^2) \cdot F_m^2(l)) \right\};$$

$$f(m, \mu, k) \equiv 1 - k^2 - m^2 + 2W \left\{ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \varepsilon - 1 + \frac{(2 + (\varepsilon - 1)m + (\varepsilon - 1)kF_m(k)) \times (\varepsilon - 1)m + \varepsilon kG_m(k))}{(\varepsilon - 1)m + \varepsilon kF_m(k) + kG_m(k)} \right] \right\};$$

$$W = \pi\mu^2. \quad (29)$$

Анализ уравнения (29) в общем случае достаточно проблематичен и доступен только численными методами.

В пределе  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $\mu = 2\kappa$ , где  $\kappa$  — плотность поверхностного заряда струи электропроводной жидкости, приходим к дисперсионному уравнению для неосесимметричных колебаний заряженной струи вязкой электропроводящей жидкости, полученному в [12] (при таком переходе предполагается неизменным заряд, приходящийся на единицу длины струи).

Дисперсионное уравнение для случая осесимметричных колебаний заряженной струи, в том либо ином варианте упрощений обсуждавшееся в [3,5,7], несложно

получить из (29), положив  $m = 0$ ,

$$s^2 + 2\nu k^2 s \left[ 1 - F_0(k) \left( \frac{2kl}{(l^2 + k^2)F_0(l)} + \frac{l^2 - k^2}{k(l^2 + k^2)} \right) \right] = k \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} \cdot F_0(k) \cdot f(0, \mu, k).$$

При  $\mu = 0$  это выражение совпадает с дисперсионным уравнением для незаряженной струи вязкой жидкости [21]

$$s^2 + 2\nu k^2 s \left[ 1 - F_0(k) \left( \frac{2kl}{(l^2 + k^2)F_0(l)} + \frac{l^2 - k^2}{k(l^2 + k^2)} \right) \right] = k(1 - k^2) \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} F_0(k).$$

Для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие  $l \gg k$ , уравнение (29) приводится к более простому виду

$$s^2 + 2sv(k^2 + m(m-1) - k \cdot F_m(k)) = f(m, \mu, k)(m + k \cdot F_m(k)). \quad (30)$$

В пределе идеальной жидкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) уравнение (30) сводится к

$$s^2 = f(m, \mu, k)(m + k \cdot F_m(k)). \quad (31)$$

6. Несложно видеть из (31), что при  $f > 0$  величина  $s$  вещественна и имеет два корня. Один из корней отрицателен и определяет декремент затухания соответствующего движения жидкости, а потому не представляет интереса в плане проводимого исследования, а второй положителен и определяет инкремент нарастания неустойчивости цилиндрической волны  $s = \sqrt{f} \cdot (m + k \cdot F_m(k))^{1/2}$ . Приравнявая нулю первую производную от инкремента по волновому числу, можно найти волновое число капиллярной волны с максимальным значением инкремента и, подставив его в (31), получить величину самого инкремента. На рис. 1 и 4 приведены результаты подобных расчетов по уравнению (30), проведенных с помощью программ аналитических расчетов „Математика“, в виде зависимостей:  $s = s(W)$ ,  $k = k(W)$  для первых пяти значений азимутального числа  $m$  при различных значениях диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

Из сравнения данных, приведенных на рис. 1 для  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , на рис. 2 для  $\varepsilon = 20$  и на рис. 3, 4, где представлены результаты расчета для жидкого водорода с  $\varepsilon = 1.241$ , несложно видеть, что с уменьшением величины диэлектрической проницаемости жидкости абсолютные значения инкрементов неустойчивости и волновые числа наиболее неустойчивых волн снижаются. Кроме того, область значений параметра  $W$ , в которой реализуется неустойчивость, сдвигается в область больших значений  $W$ , что особенно наглядно видно из сравнения рис. 2–4.

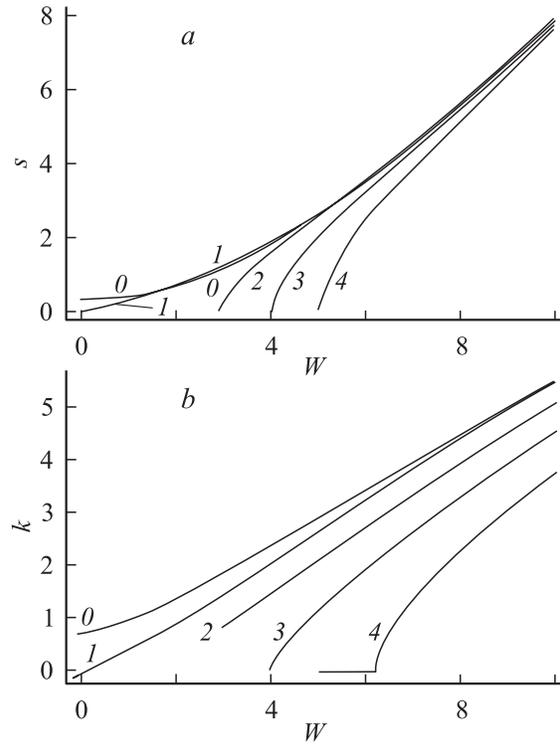


Рис. 1. Зависимости от безразмерного параметра  $W$ , характеризующего поверхностный заряд, величина безразмерного инкремента (а) и безразмерного волнового числа (б) наиболее неустойчивой волны, рассчитанные при  $\nu = 0.1$  и  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Цифры у кривых — значения азимутального параметра  $m$ .

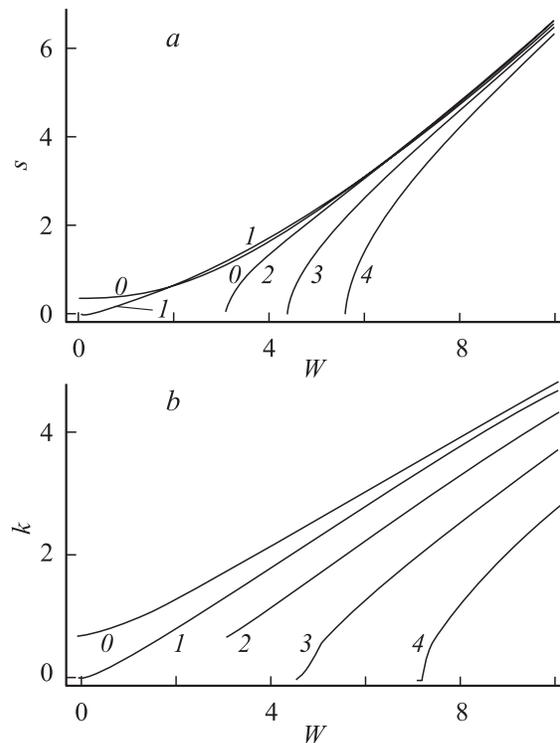
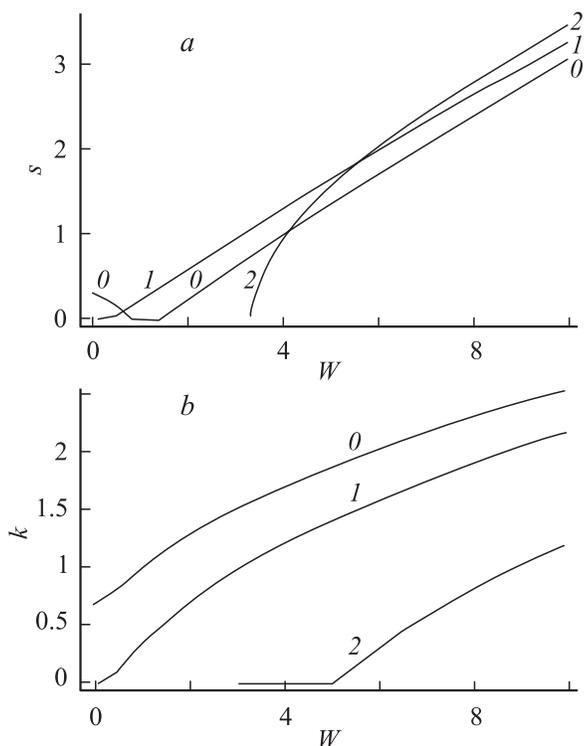
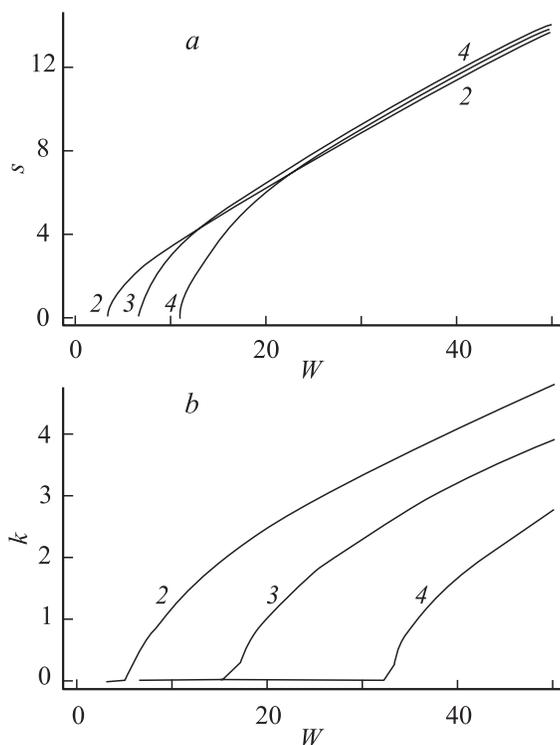


Рис. 2. Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при  $\varepsilon = 20$ .



**Рис. 3.** Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при  $m = 0$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$  для жидкого водорода при  $\varepsilon = 1.241$ .

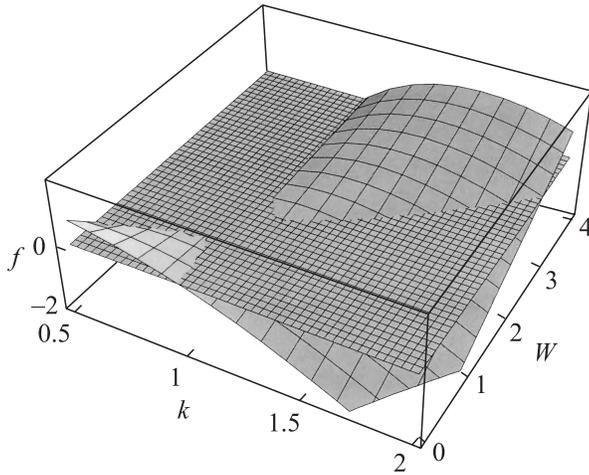


**Рис. 4.** Те же зависимости, что и на рис. 3, рассчитанные при  $m = 2$ ,  $m = 3$ ,  $m = 4$  в более широком диапазоне изменения параметра  $W$ .

Наиболее интересным результатом, полученным ранее [12] при исследовании неустойчивости поверхностно заряженных неосесимметричных струй электропроводных жидкостей, является то, что при достаточно больших значениях параметра  $W$  величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод сравниваются с инкрементами осесимметричной моды, а величины волновых чисел наиболее неустойчивых волн снижаются по сравнению с осесимметричной. Это означает, что на финальной стадии реализации неустойчивости, проявляющейся в разбиении струи на капли, струя будет дробиться на капли разных размеров и для получения на практике потоков монодисперсных капель следует создавать осесимметричной моде преимущественные условия, например, искусственно увеличивая ее амплитуду, как это делается при вынужденном капиллярном распаде струй [2].

В проанализированной ситуации объемно заряженных диэлектрических струй инкременты неустойчивости неосесимметричных мод оказываются даже выше, чем осесимметричных. Это особенно наглядно видно из рис. 3, *a*, 4, *a*, где приведены результаты расчета инкрементов неустойчивости для осесимметричной моды (номер на кривой совпадает с номером моды) и для следующих четырех в порядке возрастания азимутального числа  $m$  неосесимметричных мод для струи жидкого водорода. Интересно, что при низкой диэлектрической проницаемости для мод с  $m \geq 2$  область значений параметра  $W$ , при которых волновые числа наиболее неустойчивых мод принимают разумные с точки зрения практики разбиения струй на капли значения, существенно сдвигается в сторону больших величин  $W$ . Это видно из сравнения областей значений параметра  $W$  при которых реализуется неустойчивость поверхности струи на рис. 3, *a* и *b*, а также рис. 4, *a* и *b*. На рис. 3, *b* и 4, *b* существуют параллельные оси абсцисс участки кривых (практически сливающиеся с осью), соответствующие неустойчивым волнам с очень малыми волновыми числами. Физически это соответствует неустойчивости очень длинных волн. В смысле дробления струи на части такая неустойчивость при ее реализации приведет к разрыву струи на большие куски, а не на мелкие капли. Такая неустойчивость наблюдалась экспериментально в [13,14], и ее следствием является существенное усложнение спектра режимов электростатического диспергирования жидкости [14,15,22,23].

Из рис. 3, *a* видно, что для струи жидкого водорода с малой диэлектрической проницаемостью ( $\varepsilon = 1.241$ ) при  $m = 0$  кривая зависимости  $s = s(W)$  по мере увеличения параметра  $W$  сначала снижается до нуля, затем в некотором диапазоне значений  $W$  неустойчивых решений уравнения (30) нет, потом они снова появляются и общий вид зависимости  $s = s(W)$  становится таким же, как и на других кривых. Указанный ход зависимости  $s = s(W)$  с появлением минимума в области малых  $W$  ранее отмечался в [12] при больших значениях вязкости (при  $\nu = 3$ ) и связан с немонотонностью при



**Рис. 5.** Зависимость множителя  $f(k, m, W)$  от параметра  $W$  и безразмерного волнового числа  $k$  обозначена крупной координатной сеткой. Мелкой координатной сеткой выделена плоскость  $f \equiv 0$ .

малых  $k$  и  $W$  хода функции  $f(k, m, W)$ , как это видно из рис. 5, где приведены результаты расчета зависимости  $f = f(k, m, W)$  для диэлектрической струи с  $\varepsilon = 1.241$  при  $m = 0$ . На том же рисунке приведена плоскость  $f \equiv 0$ , выделенная более частой координатной сеткой. Если вспомнить, что неустойчивым состояниям заряженной струи соответствуют положительные значения функции  $f(k, m, W)$ , возвышающиеся на рис. 5 над плоскостью  $f \equiv 0$ , то видно существование геометрического места точек при малых  $k$  и  $W$ , в которых неустойчивые состояния отсутствуют. Это обстоятельство и приводит к показанной на рис. 3, а зависимости инкремента неустойчивости осесимметричной ( $m = 0$ ) моды от величины параметра  $W$ .

Влияние вязкости на закономерности реализации неустойчивости струи качественно такое же, как и в ранее исследованном случае поверхностно заряженной электропроводной струи [12]: с ростом вязкости жидкости величины инкрементов неустойчивости и волновые числа наиболее неустойчивых волн снижаются. А потому на этом вопросе не будем останавливаться отдельно.

## Заключение

Величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод объемно заряженных струй снижаются при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости, причем этот эффект сказывается тем сильнее, чем меньше азимутальное число  $m$  (чем меньше степень несимметричности). Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных усло-

виях существенно превышать инкремент неустойчивости осесимметричной моды, что скажется на закономерностях дробления струи на капли.

## Приложение

Давление электростатического поля на поверхность заряженной диэлектрической струи  $P_e$  определяется выражением

$$P_e = -\mu\Phi^{\text{in}} + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial\Phi^{\text{ex}}}{\partial n} \right)^2 + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \left( \frac{\partial\Phi^{\text{ex}}}{\partial r} \right)^2, \quad (1\text{П})$$

где потенциалы электрического поля внутри и вне жидкости  $\Phi^{\text{in}}$  и  $\Phi^{\text{ex}}$  являются решениями краевой задачи

$$\Delta\Phi^{\text{in}} = -4\pi \frac{\mu}{\varepsilon}; \quad \Delta\Phi^{\text{ex}} = 0;$$

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi^{\text{in}} = \Phi^{\text{ex}}; \quad \varepsilon \frac{\partial\Phi^{\text{in}}}{\partial n} = \frac{\partial\Phi^{\text{ex}}}{\partial n};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi^{\text{in}} \rightarrow 0. \quad (2\text{П})$$

Представим потенциалы  $\Phi^{\text{in}}$  и  $\Phi^{\text{ex}}$  в виде разложений

$$\Phi^{\text{in}} = \Phi_0^{\text{in}} + \varphi^{\text{in}}, \quad \Phi^{\text{ex}} = \Phi_0^{\text{ex}} + \varphi^{\text{ex}} \quad (3\text{П})$$

здесь  $\Phi_0^{\text{in}}$  и  $\Phi_0^{\text{ex}}$  — потенциалы электрического поля вблизи невозмущенной поверхности струи;  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  — добавки к потенциалам вызванные возмущением поверхности  $\xi(z, \phi, t)$ , имеющие первый порядок малости по  $|\xi|$ . Разделяя сформулированную задачу по порядкам малости, получим в нулевом приближении по  $|\xi|$

$$\Delta\Phi_0^{\text{in}} = -4\pi \frac{\mu}{\varepsilon}; \quad \Delta\Phi_0^{\text{ex}} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi_0^{\text{in}} = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \varphi^{\text{ex}} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \Phi_0^{\text{in}} = \Phi_0^{\text{ex}}; \quad \varepsilon \frac{\partial\Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} = \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r}, \quad (4\text{П})$$

а в первом порядке:

$$\Delta\varphi^{\text{in}} = 0; \quad \Delta\varphi^{\text{ex}} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \varphi^{\text{in}} \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \varphi^{\text{ex}} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \varphi^{\text{in}} + \frac{\partial\Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} \xi = \varphi^{\text{ex}} + \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \xi;$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial\varphi^{\text{in}}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_0^{\text{in}}}{\partial r^2} \xi \right) = \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r^2} \xi. \quad (5\text{П})$$

В нулевом порядке малости значения потенциалов  $\Phi_0^{\text{in}}$  и  $\Phi_0^{\text{ex}}$  электрического поля внутри и вне струи имеют вид

$$\Phi_0^{\text{in}} = -\frac{\pi\mu r^2}{\varepsilon}; \quad \Phi_0^{\text{ex}} = -\frac{\pi\mu}{\varepsilon} - 2\pi\mu lnr. \quad (6\text{П})$$

Решение задачи первого порядка малости имеет вид

$$\varphi^{\text{ex}} = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_4 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk;$$

$$\varphi^{\text{in}} = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_5 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk.$$

(7П)

где коэффициенты  $C_4, C_5$  выражаются через коэффициент  $D$  из интегрального представления (24) для функции возмущения  $\xi$  (см. (26)).

Искажение равновесной цилиндрической поверхности струи волновым движением  $\xi(z, \phi, t)$  вызывает изменение давления  $P_e$ . Поскольку возмущение  $\xi$  — мало, подставляя в (1П) разложения (3П), представим  $P_e$  в виде ряда по малым величинам  $\varphi^{\text{in}}, \varphi^{\text{ex}}, \xi$  с точностью до величин первого порядка

$$P_e|_{r=1+\xi} = \left\{ -\mu(\Phi_0^{\text{in}} + \varphi^{\text{in}}) + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial n} + \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial n} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{8\pi} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial\tau} \right)^2 \right\} \Big|_{r=1+\xi} + O(\xi^2)$$

$$\approx \left\{ -\mu \left( \Phi_0^{\text{in}} + \xi \frac{\partial\Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} + \varphi^{\text{in}} \right) + \left( \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \right)^2 \xi + \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{r=1} + O(\xi^2),$$

(8П)

где  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  — орты нормали и касательной к поверхности струи.

При выводе последнего выражения использованы следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial n} \approx \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} + O(\xi^2), \quad \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial n} \approx \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} + O(\xi^2),$$

$$\frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial\tau} = 0.$$

Из (8П) видно, что выражения для давления электрического поля на невозмущенную поверхность диэлектрической заряженной струи  $P_e^0$  и для добавки к давлению электрического поля  $p_e$ , вызванной малым возмущением равновесной поверхности струи и имеющей первый порядок малости по этому возмущению, имеют вид

$$P_e^0 \approx \left\{ -\mu\Phi_0^{\text{in}} + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \right)^2 \right\} \Big|_{r=1};$$

$$p_e \approx \left\{ -\mu \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} \xi + \varphi^{\text{in}} \right) + \left( \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \right)^2 \xi + \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial\Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{r=1}.$$

Учитывая решение нулевого порядка малости (6П) и связь между потенциалами  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  на поверхности струи (5П), получим

$$P_e^0 \approx \pi\mu^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right);$$

$$p_e \approx 2\pi\mu^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right) \xi - \mu \left( \varphi^{\text{ex}} + \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right).$$

Подставляя вместо функций  $\xi$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  их интегральные представления (23), (24) с учетом (25), (26), получим окончательное выражение для давления электрического поля, связанного с возмущением формы поверхности струи,

$$p_e = 2\pi\mu^2 D \left[ 1 - \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} - \frac{(2 + (\varepsilon-1)k \cdot h(k))(2\varepsilon + (\varepsilon-1)k \cdot g(k))}{2\varepsilon^2 \cdot k \cdot [h(k) - g(k)]} \right] \times \exp i(kz + m\phi) \exp(st),$$

где обозначения  $h(k)$  и  $g(k)$  введены в (26).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

## Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [2] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Гордов А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат. 1991. 336 с.
- [3] Глонти Г.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 5. С. 1329–1330.
- [4] Nayfeh F.H. // Phys. Fluids. 1970. N 4. P. 841–847.
- [5] Savill D.A. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827.
- [6] Mutoh M., Kaieda S., Kamimura K. // J. Appl. Phys. 1979. Vol. 50. N 5. P. 3174–3179.
- [7] Grossmann S., Muller A. // Z. Phys. B. 1984. Vol. 57. P. 161–173.
- [8] Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. // АН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 121–125.
- [9] Garcia F.J., Castellanos A. // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. N 8. P. 2676–2689.
- [10] Eggers J. // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 5. P. 941–953.
- [11] Чесноков Ю.Г. // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 56–62.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 5–12.
- [13] Macky W.A. // Proc. Roy. Soc. (London). 1931. Vol. 133A. P. 565–587.
- [14] Cloupeau M., Prunet-Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [15] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. N 1. P. 51–59.
- [16] Kim K., Turnbull R.J. // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47. N 5. P. 1964–1969.
- [17] Манзон Б.И. // УФН. 1981. Т. 134. N 4. С. 611–639.

- [18] *Kim Y.E., Rabinowitz M., Chulick G.S., Rice R.A.* // Modern Phys. Lett. B. 1991. Vol. 5. N 6. P. 427–438.
- [19] *Pretzel K.P.* // Particle world. 1990. Vol. 1. N 6. P. 153–162.
- [20] *Ширяева С.О., Лазаряц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Перпринт ИМ РАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [21] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [22] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [23] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 5–12.