

01;05;09

## Особенности процессов магнитной релаксации в сверхпроводниках с различными моделями крипа

© В.Р. Романовский

Российский научный центр „Курчатовский институт“,  
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 1 октября 2002 г. В окончательной редакции 12 февраля 2003 г.)

В рамках автомодельного приближения исследованы характерные закономерности процессов релаксации электромагнитного поля внутри низко- и высокотемпературных сверхпроводников в случае неполного заполнения магнитным потоком их поперечного сечения. Проведенный теоретический анализ основывался на макроскопическом описании крипа феноменологическими уравнениями вольт-амперных характеристик степенного и экспоненциального типа. Изучено влияние нелинейности вольт-амперных характеристик на особенности развития процессов магнитной релаксации. Показана существенная роль области низких электрических полей в формировании релаксационных состояний высокотемпературных сверхпроводников, в которой уравнения вольт-амперных характеристик степенного и экспоненциального типа могут иметь заметное отличие. Выписанные полные аналитические решения сопоставлены с соответствующим численным решением рассматриваемых проблем.

### Введение

Исследование релаксационных явлений в сверхпроводниках является эффективным методом анализа механизмов пиннинга, переходных процессов в сверхпроводящих устройствах, работающих в быстро изменяющихся магнитных полях. Поэтому изучению процессов магнитной релаксации постоянно уделяется значительное внимание (см., например, [1–7] и цитированную там литературу). Однако, несмотря на выполненные ранее многочисленные теоретические исследования, полученные к настоящему времени результаты не достаточно полны. В частности, не выполнен сравнительный анализ макродиффузии вихрей с учетом существующего разнообразия моделей крипа, описываемых в диффузионном приближении соответствующими уравнениями вольт-амперных характеристик (ВАХ), которые в простейших случаях имеют вид [8,9]

$$E = E_C (J/J_C)^n, \quad (1)$$

$$E = E_C \exp[(J - J_C)/J_\delta]. \quad (2)$$

Здесь  $J_C$  — плотность тока, определенная при напряженности электрического поля  $E_C$ ;  $n$  — показатель степени, определяющий крутизну нарастания ВАХ;  $J_\delta$  — токовая константа нарастания ВАХ.

В связи с этим в настоящей работе в макроскопическом приближении сопоставлены между собой основные физические особенности развития процессов магнитной релаксации в сверхпроводниках с уравнениями ВАХ (1), (2). Сформулированные закономерности следуют из решетки соответствующих задач о релаксации электромагнитного поля внутри хорошо охлаждаемого сверхпроводника, которые описывают эксперименты по измерению его магнитного момента в случаях, когда внешнее магнитное поле  $B(x, t) = B_0 + B_i$ , состоящее из

двух компонент — большой постоянной и малой переменной ( $B_0 \gg B_i$ ), при  $t = t_i$  принимает постоянное значение  $B_{0,i}$ . Не ограничивая общности, предполагалось, что внешнее магнитное поле параллельно граничной поверхности полубесконечного сверхпроводника. Поэтому, согласно системе уравнений Максвелла, релаксация напряженности электрического поля, индуцированного внешним возмущением, в прямоугольной системе координат описывалась уравнением [6]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \begin{cases} \frac{J_C}{nE} \left(\frac{E}{E_C}\right)^{1/n} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (1),} \\ \frac{J_\delta}{E} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (2)} \end{cases} \quad (3)$$

с граничными и начальным условиями вида

$$\partial E / \partial x(0, t) = 0, \quad E(\infty, t) = 0, \quad E(x, t_i) = E_0(x). \quad (5)$$

Здесь  $E_0(x)$  — распределение индуцированного электрического поля в момент времени прекращения нарастания внешнего магнитного поля. Отметим также, что второе граничное условие записано в предположении, согласно которому экранирующий ток заполняет все сечение сверхпроводника независимо от вида ВАХ. Именно в рамках данного предположения выполняется численный анализ электродинамических состояний сверхпроводников при крипе (см., например, [7]).

Для дальнейшего анализа также потребуется дополнительное условие

$$\mu_0 \int_0^\infty J(x, t) dx = B_{0,i}, \quad t \geq t_i, \quad (6)$$

описывающее закон сохранения введенного магнитного потока. Ниже будет показано, что его соблюдение необходимо для корректного описания релаксационных явлений при крипе.

Как и в работе [3], характерные особенности релаксационных процессов, происходящих при крипе, исследованы с помощью автомодельных приближений.

## Релаксация электромагнитного поля внутри сверхпроводника со степенной ВАХ

Введем следующие безразмерные переменные:

$$e = E/E_C, \quad X = x/L_x, \quad \tau = t/t_x,$$

$$L_x = B_{0,i}/(\mu_0 J_C), \quad t_x = B_{0,i}^2/(\mu_0 J_C E_C).$$

Будем искать решение задачи (3), (5), (6) в виде

$$e = (\tau + \tau_0)^q W(Z), \quad X = (\tau + \tau_0)^p Z,$$

$$q = -n/(n+1), \quad p = 1/(n+1),$$

где  $\tau_0$  — некоторая константа, подлежащая определению.

Переходя от дифференцирования по независимым переменным  $X$  и  $\tau$  к дифференцированию по  $Z$ , получим

$$(n+1) \frac{d^2 W}{dZ^2} + \frac{Z}{n} W^{(1-n)/n} \frac{dW}{dZ} + W^{1/n} = 0$$

$$dW/dZ(0) = 0, \quad W(\infty) = 0. \quad (7)$$

Задача (7) имеет аналитическое решение вида

$$W(Z) = \left[ \frac{n-1}{2n(n+1)} (Z_0^2 - Z^2) \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (8)$$

где  $Z_0$  — неизвестная константа.

Отметим характерную особенность изменения инварианты  $W(Z)$ . Согласно (8), допустимые значения  $W(Z)$  существуют на ограниченном отрезке  $0 \leq Z \leq Z_0$ , причем  $W(Z_0) = 0$ . Следовательно, условие (6) относительно автомодельных переменных должно быть записано в виде

$$\int_0^{Z_0} W^{1/n} dy = 1. \quad (9)$$

Подставив (8) в (9), получим

$$Z_0 = \left[ \frac{2n(n+1)}{n-1} \right]^{1/(n+1)} \left( \frac{1}{\Psi_1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \Psi_1 = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{1}{n-1}} dy.$$

Существование конечного значения  $Z_0$ , при котором инвариант  $W(Z)$  принимает нулевое значение, приводит к особому характеру его изменения в окрестности точки  $Z = Z_0$ , так как, согласно (8),  $d^k W/dZ^k = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  при  $Z = Z_0$ .

Таким образом, затухание электромагнитного поля внутри сверхпроводника со степенной ВАХ происходит

в финитной области и в размерном виде описывается следующими выражениями:

$$E(x, t) = E_a(t) (1 - x^2/x_0^2)^{\frac{n}{n-1}},$$

$$B(x, t) = B_{0,i} \left[ 1 - \frac{1}{x_0 \Psi_1} \int_0^x \left( 1 - \frac{y^2}{x_0^2} \right)^{\frac{1}{n-1}} dy \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$E_a(t) = E_C \left( \frac{t_n}{t + t_0} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad t_n = \frac{n-1}{2n(n+1)} \frac{t_x}{\Psi_1^2},$$

$$x_0(t) = \frac{B_{0,i}}{\mu_0 J_C \Psi_1} \left[ \frac{E_C}{E_a(t)} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (11)$$

Выписанное решение определено с точностью до константы  $t_0$ . Найдем ее, задавая значение напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника  $E_{0,i} = E_0(0)$  в момент времени  $t_i$ . В результате будем иметь

$$t_0 = t_e - t_i, \quad t_e = t_n (E_C/E_{0,i})^{(n+1)/n},$$

где  $t_e$  — характерное время релаксации магнитного потока.

На рис. 1 приведено распределение индукции магнитного поля внутри области намагниченности в зависимости от показателя степени ВАХ. Видно, что область плавного перехода от возмущенного состояния к невозмущенному при  $n > 10$  пренебрежимо мала. Более того, условие  $n > 10$  удовлетворительно описывает состояния, у которых релаксация экранирующих токов характеризуется практически линейным распределением индукции магнитного поля внутри сверхпроводника. Данная оценка обосновывает использование более упрощенных методов анализа процессов релаксации в сверхпроводниках, например предложенного в [5].

Итак, релаксационный процесс в сверхпроводнике со степенной ВАХ сопровождается образованием особого

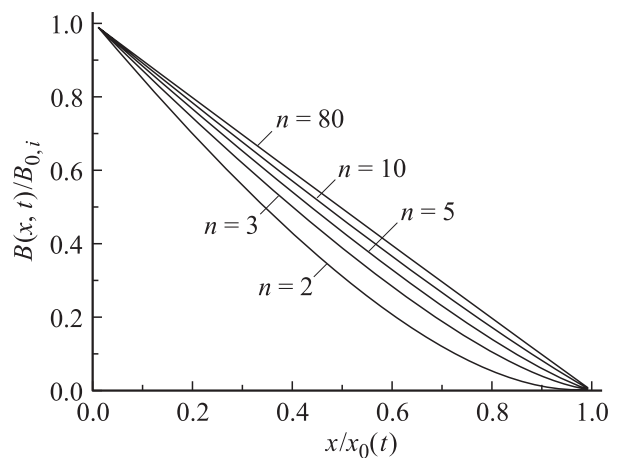


Рис. 1. Автомодельное распределение магнитного поля внутри области намагниченности сверхпроводника в зависимости от показателя степени ВАХ (1).

состояния. Для него закономерна конечная протяженность области намагниченности с подвижной границей, на которой имеют место условия плавного сопряжения индуцированных вводом электрического и магнитного полей со своими невозмущенными значениями

$$\partial^k E / \partial x^k = 0, \quad \partial^k B / \partial x^k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

При этом экранирующий ток проникает с конечной скоростью

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{B_{0,i}}{(n+1)\mu_0 J_C \Psi_1} \frac{E_a(t)}{E_C}$$

Записанное решение позволяет ответить на вопрос о корректности описания процессов, протекающих при крипе в сверхпроводниках с логарифмической зависимостью потенциального барьера от тока, предложенного в [3,4]. Как указано в [5], в [3] приведена ошибочная формула для оценки магнитного момента сверхпроводящей пластины в случае неполного проникновения экранирующих токов. Более того, согласно записанному выше решению, на подвижной границе области намагниченности соблюдаются условия плавного сопряжения индуцированного и невозмущенного значений электромагнитного поля. Нетрудно найти, что данные условия также должны выполняться и в рамках задачи, поставленной в [3]. Однако приведенное в [3] решение им не удовлетворяет. Допущенная в [3] ошибка заключается в том, что для определения неизвестных констант, появляющихся в ходе решения, в [3] вместо условия вида (9) используется дополнительное условие

$$J(x, t)|_{x=0, t=0} = J_C$$

В силу этого выписанное в [3,4] автомодельное решение оказывается некорректным не только для оценки магнитного момента пластины, но и для расчета магнитного поля на протяжении всего процесса его релаксации.

Используя предложенное выше автомодельное решение, определим изменение во времени магнитного момента сверхпроводящей пластины с полушириной  $a$  для состояний, предшествующих полному проникновению экранирующих токов внутрь пластины. Согласно (10), (11) будем иметь

$$-\mu_0 M(t) / B_{0,i} = 1 - \varphi_n x_0(t) / a$$

или

$$M(t) = M(t_i) + M_1 \left( \frac{t - t_i + t_e}{t_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \left[ 1 - \left( \frac{t_e}{t - t_i + t_e} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right] \varphi_n, \quad t \geq t_i$$

Здесь  $M(t_i)$  — магнитный момент пластины при  $t = t_i$ ,  $M_1 = B_{0,i}^2 / (\mu_0^2 a J_C \Psi_1)$ ,

$$\varphi_n = 1 - \frac{1}{\psi_1} \int_0^1 \psi(\eta) d\eta, \quad \psi(\eta) = \int_0^\eta (1 - y^2)^{\frac{1}{n-1}} dy$$

Из записанных выражений следует, что релаксация магнитного момента сверхпроводника при частичном заполнении экранирующим током его поперечного сечения определяется особенностями динамики подвижной границы области намагниченности сверхпроводника. Важность вывода о прямой связи намагниченности сверхпроводника с глубиной проникновения магнитного потока следует подчеркнуть особо, так как он не только сформулирован впервые, но и позволяет на основании соответствующих экспериментов непосредственно проанализировать финитный характер протекающих при крипе процессов.

Дифференцируя  $M(t)$  по времени, найдем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M_1 \varphi_n}{(n+1)(t - t_i + t_e)} \left( \frac{t - t_i + t_e}{t_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Данная формула позволяет оценить значения характерных скоростей процесса магнитной релаксации. При  $t - t_i \ll t_e$  магнитный момент релаксирует практически с постоянной скоростью, равной

$$\frac{dM}{dt} \approx \frac{M_1 \varphi_n}{(n+1)t_e} \left( \frac{t_e}{t_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

При  $t - t_i \gg t_e$  релаксация магнитного момента происходит с монотонно уменьшающейся скоростью. Ее значение может быть оценено как

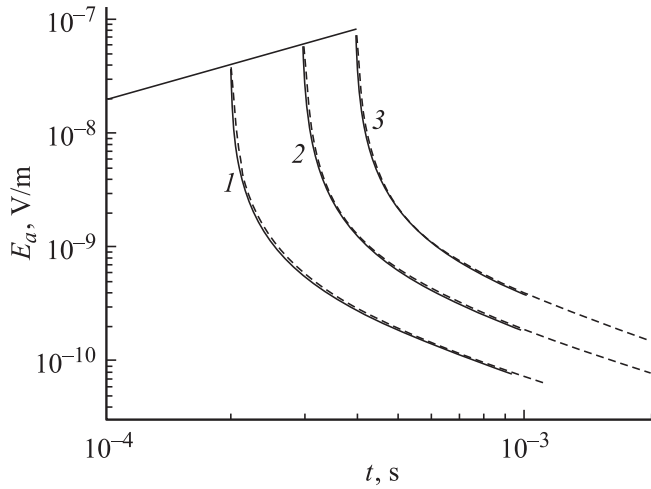
$$\frac{dM}{dt} \approx \frac{M_1 \varphi_n}{(n+1)(t - t_i)} \left( \frac{t - t_i}{t_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad t - t_i \gg t_e$$

или

$$\frac{dM}{d \ln t} \approx \frac{M_1 \varphi_n}{n+1} \frac{t}{t - t_i} \left( \frac{t - t_i}{t_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

т.е., как и следовало ожидать, при больших временах с точностью до множителя  $(t/t_n)^{1/(n+1)}$  процесс релаксации имеет логарифмический характер.

Приведенное полное аналитическое решение задачи о релаксации магнитного потока внутри сверхпроводника со степенной ВАХ наглядно демонстрирует качественные особенности происходящих при этом явлений. Прежде всего оно показывает, что магнитная релаксация в первую очередь зависит от характера затухания электрического поля на поверхности сверхпроводника. В частности, при прочих равных условиях увеличение показателя степени  $n$  будет сопровождаться уменьшением времени затухания  $E_a(t)$ . В результате этого скорость проникновения экранирующего тока внутрь сверхпроводника и скорость релаксации его магнитного момента также уменьшаются, так как  $dM/dt \sim dx_0/dt \sim E_C / (n+1)$ . В предельном случае при  $n \rightarrow \infty$  имеют место соотношения  $E_a \rightarrow 0$ ,  $dx_0/dt \rightarrow 0$ ,  $dM/dt \rightarrow 0$ ,  $x_0 \rightarrow B_{0,i} / \mu_0 J_C$ . Нетрудно понять причину данных закономерностей. Они являются прямым следствием соответствующего увеличения дифференциального сопротивления сверхпроводника, ко-



**Рис. 2.** Изменение напряженности электрического поля на поверхности Nb-Ti сверхпроводника со степенной ВАХ (— — численное решение задачи о вводе и релаксации экранирующего тока, ---- — автомодельное решение).  $t_i$ , s: 1 —  $2 \cdot 10^{-4}$ , 2 —  $3 \cdot 10^{-4}$ , 3 —  $4 \cdot 10^{-4}$ .

гда  $\rho_d \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Как известно, эта причина лежит в основе объяснения принципиальной разницы во временах протекания релаксационных процессов в низко- и высокотемпературных сверхпроводниках.

Для иллюстрации возможности описания процессов релаксации с помощью автомодельного приближения сопоставим между собой соответствующие результаты численного и аналитического расчетов. На рис. 2 для различных значений времени  $t_i$  показано изменение напряженности электрического поля на поверхности низкотемпературного сверхпроводника. Его параметры принимались равными  $E_C = 10^{-4}$  В/см,  $J_C = 4 \cdot 10^9$  А/м<sup>2</sup>,  $n = 80$ . Сплошные кривые соответствуют численному решению задачи (3,5,6). Распределение электрического поля  $E_0(x)$  при  $t = t_i$  задавалось на основании соответствующего расчета процесса проникновения экранирующего тока, численно интегрируя уравнения (3) с условиями

$$E(x, 0) = 0, \quad \partial E / \partial x(0, t) = -dB/dt, \\ E(x_0, t) = 0 \quad (12)$$

для случая непрерывного увеличения магнитной индукции на поверхности сверхпроводника со скоростью  $dB/dt = 1$  Т/с.

Представленные кривые, а также аналогичные расчеты, выполненные для высокотемпературных сверхпроводников, показывают, что предложенное аналитическое решение позволяет весьма удовлетворительно описать весь процесс релаксации в сверхпроводнике со степенной ВАХ, а не только его асимптотику при больших временах.

## Релаксация электромагнитного поля внутри сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ

Исследуем релаксационные процессы в сверхпроводнике с ВАХ вида (2). Используя безразмерные переменные

$$e = E/E_C, \quad X = x/L_x, \quad \tau = t/t_x,$$

$$L_x = B_{0,i}/(\mu_0 J_\delta), \quad t_x = B_{0,i}^2/(\mu_0 J_\delta E_C),$$

задачу (4)–(6) приведем к интегрированию уравнения вида

$$\partial e / \partial \tau = e \partial^2 e / \partial X^2 \quad (13)$$

с краевым условием

$$\partial e / \partial X(0, \tau) = 0 \quad (14)$$

и условием сохранения наведенного тока с плотностью  $j = 1 + \delta \ln e$  ( $j = J/J_C$ ,  $\delta = J_\delta/J_C$ )

$$\int_0^{X_0} j dX = \delta, \quad (15)$$

записанного в предположении существования конечного размера области намагниченности и условия  $e(X_0, \tau) = 0$  на подвижной границе.

Задача (13)–(15) выходит за рамки проблем, обычно исследуемых в классе автомодельных функций. Поэтому ее решение опишем более подробно, чем это было сделано выше.

Будем искать искомое распределение электрического поля в виде

$$e = T(\tau)W(Z), \quad Z = X/X_0(\tau).$$

В результате уравнение (13) преобразуется к виду

$$\frac{dT}{d\tau} W - \frac{dX_0}{d\tau} \frac{Z}{X_0} T \frac{dW}{dZ} = \frac{T^2}{X_0^2} W \frac{d^2 W}{dZ^2}. \quad (16)$$

Так как функции  $T(\tau)$ ,  $X_0(\tau)$  изначально полагаются произвольными, потребуем, чтобы они удовлетворяли равенству

$$\frac{dX_0}{d\tau} \frac{T}{X_0} = -\alpha \frac{dT}{d\tau},$$

где  $\alpha$  — константа, подлежащая определению.

Из данного уравнения следует связь между функциями  $T(\tau)$ ,  $X_0(\tau)$

$$X_0(\tau) = \gamma T^{-\alpha}(\tau), \quad (17)$$

определяемая с точностью до произвольной константы  $\gamma$ .

При соблюдении записанных соотношений в уравнении (16) разделяются переменные, т. е.

$$\frac{T^2}{X_0^2} \frac{dT}{d\tau} = \frac{W}{W + \alpha Z} \frac{d^2 W}{dZ^2} = -\beta = \text{const}. \quad (18)$$

Учитывая (17), из (18) с точностью до константы  $\tau_0$  нетрудно найти

$$T(\tau) = T_1(\tau)/\beta, \quad X_0(\tau) = \gamma_1(\tau + \tau_0)^{\frac{\alpha}{1+2\alpha}},$$

где

$$T_1(\tau) = \gamma_1^2 / [(1 + 2\alpha)(\tau + \tau_0)^{\frac{1}{1+2\alpha}}],$$

$$\gamma_1 = [\gamma\beta^\alpha(1 + 2\alpha)^\alpha]^{\frac{1}{1+2\alpha}}.$$

Введем новую переменную  $W_1 = W/\beta$ . Тогда искомое решение

$$e = T_1W_1 = \gamma_1^2W_1 / [(1 + 2\alpha)(\tau + \tau_0)^{\frac{1}{1+2\alpha}}]$$

не зависит от  $\beta$  и задача (13)–(15) приводится к интегрированию уравнения

$$W_1 \frac{d^2W_1}{dZ^2} + \alpha Z \frac{dW_1}{dZ} + W_1 = 0 \quad (19)$$

с краевыми условиями

$$dW_1/dZ(0) = 0, \quad W_1(1) = 0.$$

Исследуем характер изменения  $W_1(Z)$ . Согласно уравнению (19), а также в силу граничного условия при  $Z = 1$  первая и все последующие производные инварианты  $W_1(Z)$  на правой границе равны нулю. Кроме этого, из уравнения (19) следуют два интегральных равенства

$$1 + \alpha \int_0^1 \frac{Z}{W_1} \frac{dW_1}{dZ} dZ = 0,$$

$$\int_0^1 \left( \frac{dW_1}{dZ} \right)^2 dZ + (\alpha - 1) \int_0^1 W_1 dZ = 0.$$

Поскольку по своему физическому смыслу  $W_1 \geq 0$ , а  $dW_1/dZ \leq 0$ , то данные равенства имеют место только при  $0 < \alpha < 1$ .

Итак, искомое распределение электромагнитного поля внутри сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ после интегрирования уравнения (19) определяется с точностью до трех констант  $\alpha, \gamma, \tau_0$ . С формальной точки зрения для определения  $\alpha, \gamma$  следует воспользоваться условием (15). Однако оно не позволяет непосредственно записать решение в автомоделном приближении. Физически это соответствует нарушению условий автомодельности в характере изменения отыскиваемых решений на протяжении всего процесса релаксации. В то же время при его развитии возможно асимптотическое приближение к автомоделному состоянию. Это позволяет оценить константы  $\alpha, \gamma$ . Для этого упростим ВАХ, описываемое уравнением (2), раскладывая в ряд экспоненциальный член. Используя линейный множитель данного разложения, будем отыскивать  $\alpha, \gamma$  для ВАХ вида  $J \approx J_C(E/E_0)^\delta \xi$ , где  $E_0 = E_C \exp(-1/\delta)$ ,  $\xi < 1$  — поправочный член используемого линейного

приближения, для задания которого воспользуемся условием:  $E = E_C$  при  $J = J_C$ . Тогда  $\xi = (E_0/E_C)^\delta$ . В рамках данного приближения условие (15) преобразуется к виду

$$\delta = \gamma_1^{1+2\delta} \frac{(\tau + \tau_0)^{\frac{\alpha-\delta}{1+2\alpha}}}{(1 + 2\delta)^\delta} \int_0^1 W_1^\delta(Z) dZ.$$

Поскольку его правая часть не должна зависеть от времени, то

$$\alpha = \delta, \quad \gamma_1 = \left[ \delta(1 + 2\delta)^\delta / \int_0^1 W_1^\delta(Z) dZ \right]^{\frac{1}{1+2\delta}}. \quad (20)$$

Так как  $\delta \ll 1$ , то  $\gamma_1$  может быть аппроксимирована выражением

$$\gamma_1 \approx [\delta(1 + 2\delta)^\delta]^{\frac{1}{1+2\delta}}. \quad (21)$$

Для определения  $W_1(Z)$  приведем дифференциальное уравнение (19) к эквивалентному интегральному уравнению. После несложных преобразований будем иметь

$$W_1(Z) = \frac{1 - Z^2}{2} - \alpha \int_1^Z dx \int_0^x \frac{y}{W_1} \frac{dW_1}{dy} dy.$$

В силу малости  $\alpha$  искомая инварианта  $W_1(Z)$  с хорошей степенью точности аппроксимируется нулевым решением записанного интегрального уравнения, т. е.

$$W_1(Z) \approx (1 - Z^2)/2.$$

Поэтому в рамках используемых приближений затухание электромагнитного поля в сверхпроводнике с экспоненциальной ВАХ описываются выражениями

$$E(x, t) = E_a(t)(1 - x^2/x_0^2),$$

$$B(x, t) = B_{0,i} - \mu_0 J_C x - \mu_0 J_\delta x \ln[E_a(t)/E_C] - \mu_0 J_\delta x [(1 + x/x_0) \ln(1 + x/x_0) - (1 - x/x_0) \ln(1 - x/x_0) - 2x/x_0], \quad (22)$$

где

$$E_a(t) = \frac{E_C \gamma_1^2}{2(1 + 2\delta)} \left( \frac{t_x}{t + t_0} \right)^{\frac{1}{1+2\delta}}.$$

При этом в соответствии с автомоделным приближением координата подвижной области намагниченности изменяется во времени как

$$x_{a,0}(t) = \frac{B_{0,i} \gamma_1}{\mu_0 J_\delta} \left( \frac{t + t_0}{t_x} \right)^{\frac{\delta}{1+2\delta}}, \quad (23)$$

а, согласно (15), она нарастает по закону

$$x_0(t) = \frac{B_{0,i}}{\mu_0 J_C [1 + \delta \ln[E_a(t)/E_C] + 2\delta(\ln 2 - 1)]}. \quad (24)$$

Константу  $t_0$  определим, задавая соответствующее значение напряженности электрического поля  $E_{0,i}$  на поверхности сверхпроводника при  $t = t_i$ . Тогда

$$t_0 = t_e - t_i, \quad t_e = t_x \left[ \frac{\gamma_1^2}{2(1+2\delta)} \frac{E_C}{E_{0,i}} \right]^{1+2\delta}.$$

В соответствии с записанным приближенным решением релаксации магнитного момента сверхпроводящей пластины с полушириной  $a$  будет происходить по закону

$$-\frac{\mu_0 M(t)}{B_{0,i}} = 1 - \frac{x_0(t)}{a} + \frac{\mu_0 J_C x_0^2(t)}{2aB_{0,i}} + \delta \frac{\mu_0 J_C x_0^2(t)}{4aB_{0,i}} \left[ \ln \frac{E_a(t)}{E_C} + \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{10}{9} \right].$$

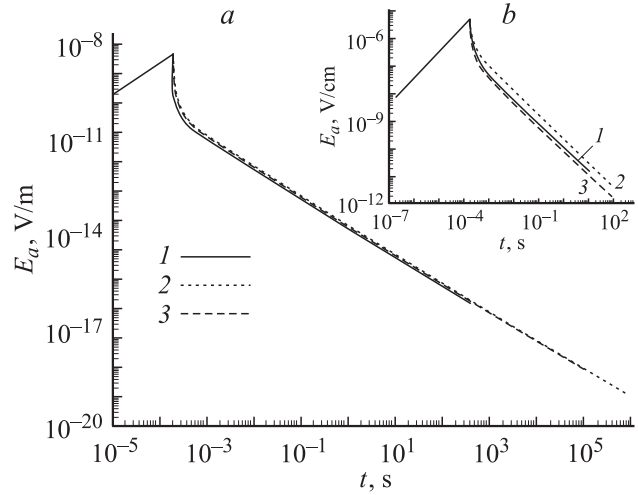
Представленные результаты показывают, что, как и в случае сверхпроводников со степенной ВАХ, релаксация магнитного момента сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ непосредственно зависит от характера нарастания подвижной границы области намагниченности, на которую в свою очередь влияет изменение электрического поля на его поверхности. Однако в отличие от сверхпроводников со степенной ВАХ процессы релаксации в сверхпроводниках с экспоненциальной ВАХ характеризуются существованием трех режимов. При  $t - t_i \ll t_e$  имеет место начальная стадия процесса релаксации. Затем релаксационный процесс переходит в режим, который может быть назван квазиавтомодельным. Его длительность прежде всего зависит от свойств сверхпроводника: время протекания квазиавтомодельного состояния у низкотемпературных сверхпроводников значительно выше, чем у высокотемпературных сверхпроводников. В течение обеих стадий координата подвижной границы области намагниченности увеличивается практически в соответствии с автомодельным режимом. Это позволяет воспользоваться этим приближением и определить характерные скорости релаксационных процессов. Для начальной стадии ( $t - t_i \ll t_e$ ) она практически постоянна и может быть оценена по формуле

$$\frac{dM}{dt} \sim \frac{dx_{a,0}}{dt} \approx \frac{B_{0,i} \gamma_1}{\mu_0 J_\delta} \frac{\delta}{1+2\delta} \frac{1}{t_e} \left( \frac{t_e}{t_x} \right)^{\frac{\delta}{1+2\delta}}.$$

Релаксация квазиавтомодельного состояния характеризуется уменьшающейся со временем скоростью, и при  $t - t_i \gg t_e$  затухание магнитного момента приближается к логарифмическому закону

$$\frac{dM}{dt} \sim \frac{dx_{a,0}}{dt} \approx \frac{B_{0,i} \gamma_1}{\mu_0 J_\delta} \frac{\delta}{1+2\delta} \frac{1}{t - t_i} \left( \frac{t - t_i}{t_x} \right)^{\frac{\delta}{1+2\delta}}.$$

На третьей стадии релаксационного процесса его развитие выходит за рамки автомодельных состояний и проникновение магнитного потока происходит с более высокой скоростью, чем это следует из квазиавтомодельного приближения.



**Рис. 3.** Изменение напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ ( $a$  — Nb-Ti,  $b$  — YBCO). 1 — численное решение при вводе и релаксации экранирующего тока; 2 — автомодельное решение, описываемое формулами (20), (22), (23); 3 — решение, описываемое формулами (21), (22), (24).

Для иллюстрации возможности использования записанных аналитических решений на рис. 3,  $a$  приведены результаты расчета процесса релаксации напряженности электрического поля на поверхности низкотемпературного сверхпроводника. Параметры его ВАХ принимались равными  $E_C = 10^{-4}$  В/м,  $J_C = 4 \cdot 10^9$  А/м<sup>2</sup>,  $J_\delta = 4 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>. Скорость увеличения внешнего магнитного поля полагалась равной  $dB/dt = 1$  Т/с и его нарастание прекращалось при  $t \geq 2 \cdot 10^{-4}$  с. Сплошные кривые соответствуют численному решению задачи о вводе и релаксации экранирующего тока, штриховые — аналитическому, использующему значение  $E_{0,i}$ , определенное в ходе численного решения задачи (4), (12). На рис. 3,  $b$  между собой сопоставлены результаты численного и аналитических расчетов, выполненных для высокотемпературного сверхпроводника с параметрами

$$E_C = 10^{-8} \text{ В/см}, \quad J_C = 1.15 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2, \\ J_\delta = 8.686 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2. \quad (25)$$

При этом предполагалось, что при  $t < 2 \cdot 10^{-4}$  с он находится во внешнем магнитном поле, изменяющемся со скоростью  $dB/dt = 7.5 \cdot 10^{-3}$  Т/с, рост которого прекращался при  $t \geq 2 \cdot 10^{-4}$  с.

### Влияние вида вольт-амперной характеристики сверхпроводника на процессы релаксации

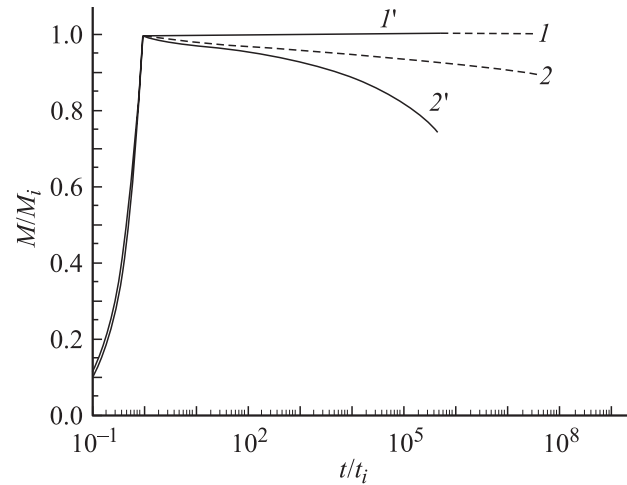
Выписанные решения показывают, что релаксационные процессы в жестких сверхпроводниках с ВАХ (1), (2) развиваются практически одинаково. В этом случае



пространственный профиль уменьшающегося со временем электрического поля для обеих моделей ВАХ с удовлетворительной точностью описывается параболической зависимостью, а распределение магнитного поля близко к линейному. Однако эквивалентность в описании электродинамических состояний сверхпроводников со степенной и экспоненциальной моделями ВАХ зависит от значения показателя степени  $n$ . Общая тенденция такова, что ее нарушение становится все более заметным с уменьшением  $n$ . В результате, если  $n < 10$ , то крип оказывает сильное влияние на распределение магнитного поля внутри всей области намагниченности сверхпроводника со степенной ВАХ, которое заметно отклоняется от линейного.

Кроме этого, качественные различия в характере развития релаксационных процессов также связаны с изменением электрического поля на поверхности сверхпроводника, которая непосредственно влияет на закономерности проникновения подвижной границы области намагниченности. Их динамика также зависит от типа ВАХ. При этом у сверхпроводника со степенной ВАХ процесс релаксации описывается двумя характерными режимами, с хорошей степенью точности аппроксимируемые автомоделным решением. В то же время релаксационные явления в сверхпроводниках с экспоненциальной ВАХ имеют три стадии. Из них первые две по характеру протекания качественно аналогичны состояниям, которые имеют место у сверхпроводников со степенной ВАХ. Но на третьей стадии релаксационный процесс в сверхпроводниках с экспоненциальной ВАХ выходит за рамки автомоделных состояний. В этом случае скорость движения подвижной границы области намагниченности оказывается выше скорости ее проникновения в сверхпроводник со степенной ВАХ.

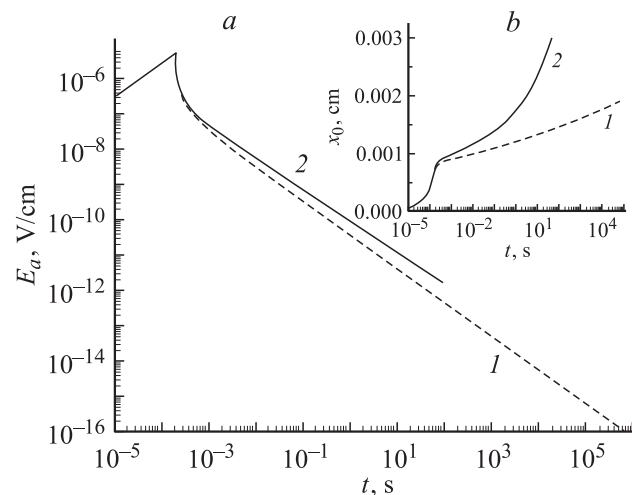
Для иллюстрации сказанного на рис. 4 между собой сопоставлены кривые намагниченности сверхпроводящей пластины с полушириной  $a$ . Расчет проводился для сверхпроводников на основе Nb-Ti ( $a = 10^{-5}$  м) и YBCO ( $a = 5 \cdot 10^{-6}$  м) с ВАХ степенного и экспоненциального вида. Для каждого из сверхпроводников их параметры были связаны между собой таким образом, чтобы в заданной точке  $\{J_c, E_c\}$  степенная ВАХ касалась ВАХ экспоненциального типа. Это выполняется при  $n = J_c/J_\delta$ . Подобный выбор параметров ВАХ позволяет сопоставить между собой расчетные значения  $E(J)$ . Для рассматриваемых сверхпроводников они приведены на вставках к рис. 4. Текущие значения магнитных моментов нормировались на соответствующие значения, достигаемые в момент времени фиксации внешнего магнитного поля ( $t_i = 2 \cdot 10^{-4}$  с). Магнитный момент пластины при  $t \leq t_i$  определялся с помощью численного решения соответствующей задачи о проникновении экранирующего тока внутрь сверхпроводника, индуцированного изменяющимся внешним магнитным полем, а при  $t > t_i$  — на основе автомоделных приближений. Скорость нарастания внешнего магнитного поля принималась равной  $dB/dt = 1$  Т/с для Nb-Ti



**Рис. 4.** Изменение магнитного момента сверхпроводящей пластины с различными типами ВАХ при вводе и релаксации экранирующего тока: 1 — Nb-Ti сверхпроводник с ВАХ (1):  $E_c = 0.6522 \cdot 10^{-2}$  В/м,  $J_c = 3.5 \cdot 10^9$  А/м<sup>2</sup>,  $n = 87.5$ ; 1' — Nb-Ti сверхпроводник с ВАХ (2):  $E_c = 0.6522 \cdot 10^{-2}$  В/м,  $J_c = 3.5 \cdot 10^9$  А/м<sup>2</sup>,  $J_\delta = 4 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>; 2 — YBCO сверхпроводник с ВАХ (1):  $E_c = 1.778 \cdot 10^{-4}$  В/см,  $J_c = 2 \cdot 10^5$  А/см<sup>2</sup>,  $n = 23$ ; 2' — YBCO сверхпроводник с ВАХ (2) и параметрами (25).

сверхпроводника и  $7.5 \cdot 10^{-3}$  Т/с для YBCO сверхпроводника. Соответствующие особенности формирования электродинамических состояний YBCO сверхпроводника показаны на рис. 5.

Таким образом, степенное и экспоненциальное уравнения ВАХ, строго говоря, не описывают одну и ту же релаксационную динамику электродинамических состо-



**Рис. 5.** Влияние ВАХ высокотемпературного сверхпроводника на изменение напряженности электрического поля на поверхности (a) и динамику его границы намагниченности (b) при вводе и релаксации экранирующего тока: 1 — сверхпроводник с ВАХ (1):  $E_c = 1.778 \cdot 10^{-4}$  В/см,  $J_c = 2 \cdot 10^5$  А/см<sup>2</sup>,  $n = 23$ ; 2 — сверхпроводник с ВАХ (2) и параметрами (25).

яний сверхпроводников при крипе. Качественное и количественное различие в получаемых результатах тем заметнее, чем меньше показатель степени в уравнении степенной ВАХ. В основе существующих отличий лежит различный характер нарастания ВАХ в области низких значений напряженности электрического поля. Как следует из (1), (2), при одном и том же значении плотности тока дифференциальное сопротивление сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ в диапазоне напряжений  $E < E_C$  всегда ниже соответствующего значения дифференциального сопротивления сверхпроводника со степенной ВАХ. Так как с увеличением дифференциального сопротивления скорость затухания электрического поля возрастает, то его спад на поверхности сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ будет происходить менее интенсивно, чем у сверхпроводника со степенной ВАХ. Вследствие этого при вводе в сверхпроводники со степенной и экспоненциальной вольт-амперными характеристиками одинакового тока процесс диффузии подвижной границы области намагниченности при прочих равных условиях происходит более интенсивно в сверхпроводнике с экспоненциальной ВАХ. Так как у высокотемпературных сверхпроводников с ВАХ вида (1), (2) отмеченная разница их дифференциальных сопротивлений наиболее заметна, то у них качественные и количественные отличия в происходящих явлениях более зависимы от вида ВАХ (рис. 4, 5).

Работа выполнена в рамках проекта № 01-02-16252а Российского фонда фундаментальных исследований.

## Список литературы

- [1] *Beasley M.R., Labusch R., Webb W.W.* // Phys. Rev. 1969. Vol. 181. N 2. P. 682–700.
- [2] *Van der Beek C.J., Nieuwenhuys G.J., Res P.H.* // Physica C. 1991. Vol. 185–189. P. 2241–2242.
- [3] *Vinokur V.M., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B.* // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. B67. N 7. P. 915–918.
- [4] *Blatter G., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Vinokur V.M.* // Reviews of Modern Physics. 1994. Vol. 66. N 4. P. 1125–1388.
- [5] *Schnack H.G., Griessen R.* // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. N 17. P. 2706–2707.
- [6] *Gurevich A., Küpfer H.* // Phys. Rev. 1993. Vol. B48. N 9. P. 6477–6487.
- [7] *Brandt E.H.* // Phys. Rev. 1996. Vol. B54. N 6. P. 4246–4264.
- [8] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
- [9] *Гуревич А.В., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.