

01;03;04

## Метод интегральных уравнений в солнечной магнитогидродинамике

© А.А. Александрова, Ю.Н. Александров

Харьковский военный университет,  
61043 Харьков, Украина  
Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
61726 Харьков, Украина  
e-mail: et@kture.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 5 марта 2003 г.)

Обобщен метод интегральных уравнений, основанный на использовании не только функции Грина в МГД среде, но и принципа погашения соответственно в этой же среде, на случай солнечной магнитной гидродинамики. На модельной нестационарной дифракционной задаче продемонстрировано использование этих уравнений.

Как известно, большая часть материи во Вселенной находится в четвертом состоянии, начиная с ионосферы Земли, атмосферы Солнца и т.д. Имеется образное сравнение Приста [1]: подобно гальке в речном потоке наша Земля представляет собой крохотное вкрапление твердого вещества, жидкости и газа, погруженное в поток истекающий из Солнца плазмы. Солнце подобно всем остальным звездам является массивным плазменным шаром, который удерживается в таком состоянии и сжимается под действием своего собственного тяготения. Вторую половину XX века называют „золотым веком“ физики Солнца. Действительно, за это время в этой области науки были получены многие основополагающие результаты, в частности доказана фундаментальная роль тонкой структурности магнитного поля Солнца, показано, что нагрев солнечной короны обусловлен магнитным полем, доказана определяющая роль магнитного поля в возникновении различных форм солнечной активности и т.д. Это оказалось возможным при рассмотрении солнечной плазмы как единой гидродинамической среды, что привело к необходимости привлечения магнитогидродинамических (МГД) механизмов описания изучаемых процессов и, как следствие, создания солнечной магнитогидродинамики как науки.

Плазма представляет собой среду, в которой легко возбуждаются различные виды колебаний и волн. Волны присутствуют и на Солнце. Солнце чрезвычайно динамично, причем отдельные его структурные элементы находятся в непрерывном движении, пространственные и временные масштабы которого заключены в широком интервале значений.

Математическое рассмотрение волнового движения в однородной среде проводится по стандартной схеме. Сначала рассматривается равновесное состояние, которое описывается плотностью  $\rho$ , скоростью  $U$ , давлением  $p$  и магнитным полем  $B$ , затем вводится малое возмущение, при этом исследуется вопрос, распространяется ли результирующее возмущение в виде волны.

Основными уравнениями при рассмотрении волновых движений являются уравнения непрерывности массы, импульса и энергии и уравнение индукции

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot U &= 0, \\ \rho \frac{DU}{Dt} &= -\nabla p + (\nabla \times B) \times B/\mu - \rho g z^0 - 2\rho(\Omega \times U), \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^v} \right) &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \nabla \times (U \times B), \quad \nabla \cdot B = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla$$

— материальная производная, связанная с движением среды. Уравнения (1) записаны в системе координат, вращающейся вместе с Солнцем с постоянной относительно инерционной системы координат угловой скоростью  $\Omega$ ;  $z^0$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ , нормальной к солнечной поверхности.

Рассматривая небольшие отклонения пакета перечисленных величин от равновесия  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ ,  $U = U_0 + \mathbf{u}$ ,  $p = p_0 + \tilde{p}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  и линеаризуя основные уравнения (1), в результате система линейных дифференциальных уравнений относительно  $(\tilde{\rho}, \mathbf{u}, \tilde{p}, \mathbf{b})$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \tilde{\nabla} p + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}/\mu - \tilde{\rho} g z^0 - 2\rho_0(\Omega \times \mathbf{u}), \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p_0 - V_s^2 \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_0 \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \nabla \times (U_0 \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

После некоторых тривиальных преобразований получим обобщенное волновое уравнение относительно скорости  $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = V_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\gamma - 1) g z^0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - g \nabla u_z - 2\Omega \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0))]/\mu \rho_0. \quad (3)$$

Но сложность заключается в том, что существуют два фактора, а именно сила тяжести и магнитное поле, вызывающее неоднородность Солнца. Причем сила тяжести приводит к увеличению давления в направлении к  $z^0$  — единичному вектору в направлении оси  $z$ , нормальной к солнечной поверхности.

Рассматривая небольшие отклонения пакета перечисленных величин от равновесия  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ ,  $U = U_0 + \mathbf{u}$ ,  $p = p_0 + \tilde{p}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  и линеаризуя основные уравнения (1), получим, что в результате система линейных дифференциальных уравнений относительно  $(\tilde{\rho}, \mathbf{u}, \tilde{p}, \mathbf{b})$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\tilde{\nabla} p + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}/\mu - \tilde{\rho} g z^0 - 2\rho_0 (\Omega \times \mathbf{u}), \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p_0 - V_s^2 \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_0 \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \nabla \times (U_0 \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (2a)$$

После некоторых тривиальных преобразований получим обобщенное волновое уравнение относительно скорости  $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = V_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\gamma - 1) g z^0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - g \nabla u_z - 2\Omega \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0))]/\mu \rho_0. \quad (3b)$$

Сложность заключается в том, что, с одной стороны, существуют два фактора, а именно сила тяжести и магнитное поле, вызывающие неоднородность Солнца. При этом сила тяжести приводит к увеличению давления в направлении к центру Солнца, а магнитное поле и связанная с ним сила Лоренца часто создают давление плазмы в направлении, нормальном к магнитному полю, и вдали от областей концентрации магнитного потока. Это приводит к появлению границ раздела неоднородных сред (неоднородностей); наиболее характерные из них: магнитные силовые трубки, плоскопараллельные границы и т.д. С другой стороны, при определенных физических ситуациях, например при встрече солнечного ветра с магнитным полем Земли, при столкновении двух газовых масс и т.д., возникают сильные разрывы, при которых разрывны не только производные МГД величин по пространственным и временным координатам, но и сами эти величины. Скачки МГД величин на

поверхности разрыва определяются из интегральных законов сохранения или интегральных уравнений баланса, представляющих собой непрерывность потока энергии  $\Delta W_n = 0$ , массы  $\Delta \rho U_n = 0$ , импульса  $\Delta \pi_{in} = 0$ , тангенциальной составляющей электрического поля  $\Delta \mathbf{E}_t = 0$  и нормальной составляющей магнитного поля  $\Delta B_n = 0$ .

Что же касается дифференциальных уравнений солнечной магнитной гидродинамики (2), которые теряют силу вследствие недифференцируемости разрывных величин на поверхности разрыва, то их можно представить в интегральной форме, полностью эквивалентной соответствующим дифференциальным уравнениям (2), а также перечисленным законам сохранения, которые в линеаризованном виде представляют собой граничные условия для искомых величин поля.

Следует отметить, что иная природа пакета волн, существующих в солнечной плазме, возможность их трансформации друг в друга, а также учет различных способов образования движущейся границы (в другой терминологии — поверхности разрыва МГД величин) приводят к определенным сложностям при изучении рассеяния МГД волн на различных препятствиях, особенно с учетом нестационарности процесса. Рассмотрение нестационарных процессов предполагает постановку начальных условий, т.е. учет начального момента нестационарности. А это очень важно для солнечной плазмы, так как нестационарность является ее сущностью. Поэтому привлечение для решения краевых задач интегральной постановки, которая автоматически включает в себя краевые, не только граничные, о чем шла речь выше, но и начальные условия, приобретает особый смысл.

Постановка краевой задачи. Предположим, что некоторая неоднородность (геометрически однородная область), характеризуемая параметрами:  $\mathbf{B}_2$  — невозмущенное магнитное поле;  $V_{A2}$ ,  $V_{S2}$  — альфвеновская и звуковая скорости;  $\rho_2$  — плотность, имеет объем  $V(t)$  с границей, в общем случае зависящей от времени. Пусть рассматриваемая неоднородность помещена в неограниченную МГД среду, характеризуемую соответственно параметрами  $\mathbf{B}_1$ ,  $V_{A1}$ ,  $V_{S1}$ ,  $\rho_1$  до возмущения ее падающим полем, заданным вектором состояния  $\Psi_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{b}_0(\mathbf{r}, t), \rho_0(\mathbf{r}, t), p_0(\mathbf{r}, t)\}$ . Вектор МГД состояния  $\Psi(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}$  представляет собой совокупность следующих величин: отклонения скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , магнитного поля  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ , плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и давления  $p(\mathbf{r}, t)$  от их невозмущенных значений, характеризующих магнитогиродинамическое состояние солнечной плазмы.

Опуская вывод самих уравнений, описывающих поставленную краевую задачу (идеология вывода подробно рассматривалась в работах [2,3]), окончательно интегродифференциальное уравнение относительно вектора  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x}) + G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') * \mathbf{W}(\mathbf{x}'), \quad (4)$$

где  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, t\}$  — четырехмерный пространственно-временной вектор; символ  $(*)$  есть свертка, т.е. интеграль-

ная операция вида

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\infty}^{\infty} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')g(\mathbf{x}') d\mathbf{r}',$$

$\mathbf{W}(\mathbf{x})$  — разрывная функция, записанная в классе обобщенных функций, описывающая единым образом МГД среду внутри и вне неоднородности, при этом следует отметить, что все характеристики неоднородности содержатся именно в этой функции;  $\mathbf{G}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  — функция Грина уравнений свободного пространства, заданного параметрами  $\mathbf{B}_1, V_{A1}, V_{S1}, \rho_1$ , или в другой терминологии фундаментальное решение волнового уравнения солнечной магнитной гидродинамики (3) с дельта-образной правой частью,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_0}{\partial t^2} - V_{S1}^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}_0) + (\gamma - 1) \mathbf{g} \mathbf{z}^0 (\nabla \cdot \mathbf{G}_0) \\ + g \nabla \mathbf{G}_0 + 2\Omega \times \frac{\partial \mathbf{G}_0}{\partial t} \\ - [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{G}_0 \times \mathbf{B}_1))] / \mu \rho_1 = \varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  — аффинор.

Отсюда следует, что функция Грина, представляющая собой тензорную функцию положения двух точек: точки наблюдения  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, t\}$  и точки источника  $\mathbf{x}' = \{\mathbf{r}', t'\}$ , имеет вид

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{G}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \mathbf{G} \cdot I(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

где  $G = \|G_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$  — дифференциальный оператор, заданный в виде матрицы в специально выбранном базисе;

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int_{-\infty+i\sigma_0}^{\infty+i\sigma_0} \exp[-iq(t-t')] dq \\ \times \iiint_{\infty} \frac{\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{\delta(q, \mathbf{p}) \Delta(q, \mathbf{p}) \iota(q, \mathbf{p})} d\mathbf{p} \quad (6) \end{aligned}$$

— преобразование Фурье-Лапласа, зависящее от сдвига пространственных  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и временных  $t - t'$  переменных.

Как видно из (6), в пространственно-временном выражении для функции Грина интегрирование в каждом из интегралов проводится в бесконечных пределах и для их вычисления необходимо задать способ обхода особых точек, лежащих на пути интегрирования. Эти особые точки (как правило, полюса) имеют место при тех значениях  $\mathbf{p}, q$ , для которых выполняются соотношения, которые в свою очередь являются дисперсионными уравнениями для соответствующих видов реально существующих в солнечной плазме волн

$$\begin{aligned} \delta(q, \mathbf{p}) &= q^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 = 0, \\ \Delta(q, \mathbf{p}) &= q^4 - q^2 (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) \mathbf{p}^2 \\ &+ V_{S1}^2 N^2 \sin^2 \Theta_g \mathbf{p}^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 \mathbf{p}^2 = 0, \\ \iota(q, \mathbf{p}) &= q^2 \pm 2(\mathbf{p}\Omega)^2 / p = 0. \end{aligned}$$

В частности, дисперсионное уравнение  $\delta(q, \mathbf{p}) = 0$  связано с альфвеновскими волнами;  $\Delta(q, \mathbf{p}) = 0$  — магнитоатмосферными и  $\iota(q, \mathbf{p}) = 0$  — инерционными волнами.

Так как свертка в (4) является интегральной операцией, то (4) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно вектора состояния  $\Psi$ . Само существование свертки позволяет, согласно ее свойствам, перенести дифференцирование со вторых множителей на функцию Грина, и уравнение может быть записано в оперативной форме следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Xi(\mathbf{x}) + (\hat{K}\Psi)(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где оператор  $\hat{K}$  является интегральным оператором Вольтерра.

Это связано с тем, что ядро интегрального оператора, записанное в виде матрицы  $\hat{K} = \|K_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$ , интегрируемо в четырехмерном пространстве, а в пространственно-временной трактовке интерпретируется как пересечение области, ограниченной функцией

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in V(t), \\ 0, & \mathbf{x} \notin V(t), \end{cases}$$

задающей неоднородность, и характеристического конуса с вершиной в точке наблюдения (в случае электродинамической задачи [4] характеристическим конусом является световой конус).

Так как обобщенное волновое уравнение солнечной магнитогидродинамики (3) является дифференциальным уравнением гиперболического типа, то для него в каждой точке пространства можно построить конус

$$(t - t_0)^2 - \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0) = 0,$$

который делит рассматриваемое пространство на три области: две внутренние и одну внешнюю. Из общей теории дифференциальных уравнений [5] следует, что уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных, всегда можно в любой точке пространства привести к каноническому виду с помощью линейного преобразования, и соответственно каноническое уравнение характеристического конуса в четырехмерном пространстве нулевых интегралов  $(x_1, x_2, x_3, it)$  с вершиной в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, it_0)$  будет иметь вид

$$(t - t_0)^2 - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} (x_i - x_i^0)^2 = 0.$$

Таким образом, характеристическая поверхность — это конус с вершиной в точке наблюдения, однако „направляющей“ конуса является не обязательно сфера, как в электродинамике [4], а более сложная поверхность, и вызвано это тройной анизотропией задачи, связанной с выделенным направлением невозмущенного магнитного поля, угловой скоростью и силой гравитации Солнца.

С формальной точки зрения уравнение (7) можно рассматривать как линейризованное уравнение солнечной магнитной гидродинамики с нелокальными граничными условиями, в общем случае записанными в лабораторной системе координат. Следует заметить, что при решении краевой задачи в дифференциальной постановке локальные граничные условия могут удовлетворяться либо волнами одной и той же моды, либо для их удовлетворения требуется привлечение нескольких мод. При интегральной постановке этот непростой вопрос решается автоматически, что обусловлено физикой явления. Механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны, описываемой вектором состояния  $\Psi_0$ , индуцированных источников, приводящих к излучению вторичных волн, интерференция которых и дает требуемые моды колебания. Это является аналогом теоремы погашения в солнечной магнитной гидродинамике. Математически вторичные волны описываются интегральными слагаемыми, записанными в (7) справа.

Несколько слов относительно начального условия. Имеем два варианта, в первом из них в качестве упрощающего предположения можно считать, что нестационарность начинается в бесконечно удаленный момент времени, т.е. имеет место адиабатическое включение на бесконечности, тогда уравнение (7) можно рассматривать без учета начального условия. Что касается самого уравнения (7), то оно задается во всем пространстве определения поля, но сущность его зависит от расположения точки наблюдения, при этом интегрирование всегда ограничено характеристической функцией  $\chi(\mathbf{x})$ , связанной с неоднородностью. Отсюда соотношение (7) представляет собой собственно интегральное уравнение только в точках области  $V(t)$ . Вне этой области соотношение (7) представляет квадратурную формулу, позволяющую вычислять внешнее поле по предварительно найденному внутреннему. Отсюда алгоритм решения краевой задачи дифракции разбивается на два этапа: нахождение внутреннего поля путем решения интегрального уравнения и вычисление внешнего поля по найденному внутреннему. Следуя этому алгоритму, в частности, были исследованы и решены краевые задачи магнитной гидродинамики [6].

Второй вариант задания начального условия связан с конечным моментом времени, например  $t = 0$ . Рассмотрим следующую модельную задачу, придерживаясь при этом терминологии работы [4].

Предположим, что неоднородность до момента времени  $t < 0$  описывается множеством параметров  $H_1$ . В момент времени  $t = 0$  состояние неоднородности меняется и описывается множеством параметров  $H_2$ .

Вернемся к соотношению (7); оно, как и прежде, зависит от расположения точки наблюдения, но теперь точка наблюдения  $\mathbf{x} = (t, \mathbf{r})$  задана в четырехмерной области пространства событий. Как и в случае стационарной задачи (предыдущий случай), если эта точка принадлежит неоднородности, то (7) является интегральным уравнением. Как известно, на механизм получения решения

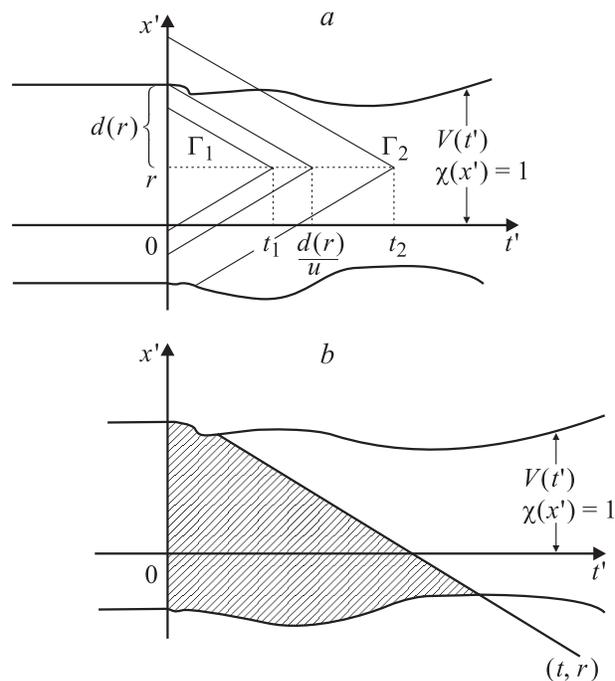


Рис. 1. Пересечение характеристического конуса и области, ограниченной функцией

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in V(t), \\ 0, & x \notin V(t). \end{cases}$$

*a* — внутренняя задача, *b* — внешняя задача.

интегрального уравнения существенным образом влияет ядро уравнения, которое, как отмечалось выше, определяется как пересечение характеристического конуса и области, ограниченной функцией

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in V(t), \\ 0, & \mathbf{x} \notin V(t). \end{cases}$$

Поэтому имеет смысл рассмотреть проекцию этого пересечения более подробно, что проиллюстрировано на рис. 1 в координатной плоскости  $(x, t)$ .

Отметим, что алгоритм решения краевой задачи сохраняется и состоит также из двух этапов, но теперь первый этап нахождения внутреннего поля распадается на цепочку эволюционно связанных интегральных уравнений для трех различных временных интервалов:  $t < 0$ ,  $0 \leq t \leq t_1$  и  $t \geq t_1$ .

В первом из них при  $t < 0$  четырехмерная область интегрирования в интегральных слагаемых уравнения (7) по временной и пространственной координатам является неограниченной, т.е. до нулевого момента времени падающее поле  $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$  порождает внутреннее  $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ , где

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \{u_1(\mathbf{r}, t), b_1(\mathbf{r}, t), \rho_1(\mathbf{r}, t), p_1(\mathbf{r}, t)\}$$

представляет собой вектор состояния, описывающий решение невозмущенной задачи, которую можно считать стационарной, с соответствующим выбором параметров.

Но наибольший интерес представляет промежуток  $t > 0$ , т.е. после нулевого момента времени, когда неоднородность находится в новом состоянии; при этом область интегрирования в тех же интегральных слагаемых уравнения (7) ограничивается гиперплоскостью  $t' = 0$ . И анализ возможных пересечений части характеристического конуса, соответствующего положительным значениям  $t'$ , с областью, ограниченной поверхностью неоднородности  $\chi(\mathbf{x}) = 1$ , приводит к выделению двух качественно различных областей интегрирования  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (рис. 1, а). Они соответствуют интервалам  $0 \leq t \leq d(\mathbf{r})/u$  и  $t > d(\mathbf{r})/u$ , где  $d(\mathbf{r})$  — наименьшее расстояние между точкой наблюдения  $\mathbf{r}$  и границей объема  $V(t)$  в момент  $t = 0$ . В первой из них ( $\Gamma_1$ ) сечение конуса плоскостью  $t' = \text{const}$  ( $0 \leq t' \leq t$ ) не выходит за пределы поверхности  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  и целиком остается внутри четырехмерной области пространства событий, соответствующей неоднородности. На этом интервале нет влияния границ неоднородности, а учитывается только изменение свойств среды в чистом виде. Если продолжить уравнение (7) на все четырехмерное пространство, то оно будет описывать поле в безграничной среде с такими же свойствами, как и среда внутри объекта. Это — следствие естественной задержки времени из-за конечности скорости распространения волны. Формально это означает, что МГД поле на этом интервале времени взаимодействует со средой в области  $V(t)$  как с неограниченной. Следовательно, задача о нахождении МГД поля сводится к начальной задаче в неограниченной среде. Следует заметить, что рассматривается случай, когда скорость движения границы не превышает скорости  $u$ , т.е. наклон мировых линий границы области меньше наклона образующих характеристического конуса.

Итак, после изменения состояния неоднородности в нулевой момент времени в области отсутствует влияние границы неоднородности и падающее поле явно не участвует в создании внутреннего поля, но оно находится в „памяти“ среды, т.е. отыскиваемое на втором этапе поле  $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$  порождается непосредственно полем  $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ , образовавшимся внутри неоднородности до изменения состояния, и опосредовано полем  $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ . Другими словами, на втором этапе ищется решение возмущенной задачи, но без влияния границ неоднородности.

Начиная с момента  $t_1 = d(\mathbf{r})/u$  (область  $\Gamma_2$ ), прошедший конус уже будет пересекать границу четырехмерной области  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  и на формирование внутреннего поля будет оказывать влияние граница области  $V(t)$ , т.е. приходим непосредственно к краевой задаче относительно поля  $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$ . В образовании этого поля наряду с полем  $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$  участвуют падающее поле  $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ , прошедшее через границу, и поле  $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ . Таким образом, на третьем этапе находится поле с учетом краевых эффектов, решение которого может быть построено только с помощью уже найденных решений на предыдущих интервалах. Всю информацию относительно изменения

среды в области  $V(t)$  должно содержать именно последнее решение.

Если точка наблюдения находится вне области  $V(t)$ , то, как показано на рис. 1, б, соотношение (7) представляет собой квадратурную формулу для вычисления внешнего поля через известное уже внутреннее.

Если задачу рассеяния пакета волн, присутствующих в солнечной плазме, на любой границе раздела двух МГД сред можно считать теоретически поэтапно разнообразной, то в смысле математического воплощения возникают следующие трудности. Прежде всего характерная для солнечной плазмы трансформация волн друг в друга на границе раздела значительно усложняет задачу. Это проявляется уже при рассмотрении трехмерной задачи дифракции на простейшей неоднородности, а именно полупространстве. При адиабатическом включении нестационарности на бесконечности эта трансформация волн достаточно красиво анализируется с помощью соответствующих интегральных уравнений. В чисто магнитогиродинамической интерпретации эта задача была рассмотрена в [7]. При этом интегральные уравнения не разделялись на уравнения, описывающие отдельные волновые моды, например альфвеновские или только магнитозвуковые, т.е. волны как бы „переплетались“ в интегральных слагаемых. При учете конечности начального момента времени это обстоятельство сильно усложняет задачу. И чтобы полностью исключить трансформацию волн, имеет смысл рассматривать для начала пространственно одномерную задачу отдельно для каждого типа волн.

Сведение к одномерной задаче требует и анализ прошедшего характеристического конуса, общий вид которого, как отмечалось, достаточно сложен. Поэтому для анализа удобно пользоваться следами конуса на соответствующих координатных плоскостях. Для наглядности работы разработанного метода рассмотрим модельную задачу рассеяния альфвеновских волн плазменным полупространством после начала его движения.

Пусть плоская альфвеновская волна

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_0 \exp[ik_0^A z - i\omega_0^A t], \\ \mathbf{b}_0(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{b}_0 \exp[ik_0^A z - i\omega_0^A t] \end{aligned} \quad (8)$$

нормально падает на плоскую границу ( $z = 0$ ) двух сред, заданных параметрами  $\mathbf{B}_i, V_{Ai}, V_{Si}, \rho_i, i=1,2$ . Пусть внутренняя среда ( $i = 2$ ) начинает равномерное движение со скоростью  $U_0$  перпендикулярно своей границе в момент времени  $t = 0$ . До начала движения неоднородность занимала область ( $z > 0$ ). Тогда закон движения границы будет задаваться формулой  $z(t) = U_0 t \Theta(t)$ . Здесь  $\Theta(t)$  — функция Хевисайда. Характеристический конус определяется соотношением

$$t - t' - |z - z'|/V_{A1} = 0.$$

При такой постановке задачи дифракции интегральные уравнения (7) только для альфвеновской волны

имеют скалярный вид. И интегральное соотношение для нахождения альфвеновского поля, как прошедшего в МГД неоднородность, так и отраженного от нее, представимо следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_x(\mathbf{r}, t) &= u_{0x}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{B_1} (V_{A1}^2 - V_{A2}^2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{V(t')} b_x(\mathbf{r}', t') G^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}' \\
 &- V_{A1}^2 \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \\
 &\times \int_{V(t')} u_x(\mathbf{r}', t') G^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}', \quad (9)
 \end{aligned}$$

где альфвеновская функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned}
 G^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= -\frac{1}{V_{A1}} \delta(x - x') \delta(y - y') \\
 &\times \Theta\left(t - t' - \frac{|z - z'|}{V_{A1}}\right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\Theta(t)$  — функция Хевисайда.

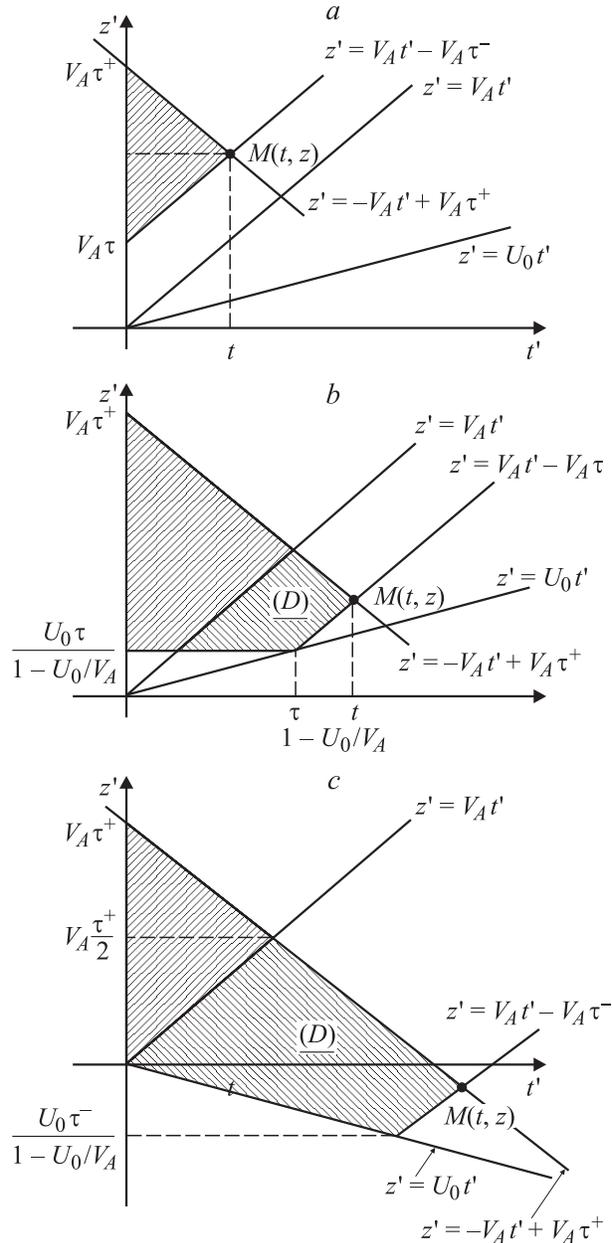
Трехмерный интеграл по пространственным переменным в (9) легко свести к одномерному интегралу для внутренней задачи

$$\begin{aligned}
 &\int_{V(t')} u_x(\mathbf{r}', t') G^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}' \\
 &= \int_{z(t')}^z u_x(z', t') \Theta\left(t - \frac{z}{V_{A1}} - t' + \frac{z'}{V_{A1}}\right) dz' \\
 &+ \int_z^{\infty} u_x(z', t') \Theta\left(t + \frac{z}{V_{A1}} - t' - \frac{z'}{V_{A1}}\right) dz' \quad (11)
 \end{aligned}$$

и соответственно к одномерному интегралу для внешней задачи

$$\begin{aligned}
 &\int_{V(t')} u_x(\mathbf{r}', t') G^A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}' \\
 &= \int_{z(t')}^{\infty} u_x(z', t') \Theta\left(t + \frac{z}{V_{A1}} - t' - \frac{z'}{V_{A1}}\right) dz'. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Для формирования внутреннего поля удобно пользоваться пространственно-временными картинками (рис. 2). На них в каждой заштрихованной области находится поле, которое удовлетворяет уравнению, все члены которого определены именно в этой области. Так как движение по времени идет слева направо вдоль временной



**Рис. 2.** Геометрическая интерпретация пространственно-временных областей интегрирования для нахождения внутреннего поля после начала движения: *a* —  $V_{A1}t < z$ ; *b* —  $U_0t \leq z \leq V_{A1}t$ ,  $U_0 > 0$ ; *c* —  $U_0t \leq z \leq V_{A1}t$ ,  $U_0 < 0$ .

оси, то и будут прослеживаться эволюция процесса путем накопления информации о поле в предыдущий интервал времени. Здесь  $M$  — мировая точка, в которой определяется поле в данный момент и в данной точке пространства. Рассмотрим случай  $U_0 < V_{A1}$  и проанализируем внутреннее поле после начала движения ( $t > 0$ ). Для этого в уравнение (9) подставим соотношение (11) и интегральные слагаемые в (9) станут двумерными: по пространственной ( $z'$ ) и временной ( $t'$ ) координатам.

На рис. 2, *a* показана область интегрирования двумерного интеграла в случае, когда граница области не влияет на формирование поля. В результате решения начальной задачи в неограниченной среде имеем, что поле в области  $V_{A1}t < z$  не меняет ни частоты, ни волнового числа, а изменяется только амплитуда существовавшей до начала движения альфвеновской волны и появляется постоянная составляющая, обусловленная скачком скорости среды. То, что на поле не оказывают влияния краевые эффекты от движущейся границы, связано с тем, что возмущение от границы распространяется со скоростью  $V_{A1}$  и область его влияния заключается в секторе  $-V_{A1}t \leq z \leq V_{A1}t$ .

В области  $U_0t \leq z \leq V_{A1}t$  необходимо отдельно рассматривать случаи „убегающего“ ( $U_0 > 0$ ) и „встречного“ ( $U_0 < 0$ ) движения. Первый случай, когда граница „убегает“ от падающего поля, показан на рис. 2, *b*. Второй случай, когда граница движется навстречу падающей волны, показан на рис. 2, *c*. Для каждого из этих случаев двумерное интегральное уравнение сводится к уравнению Вольтерра второго рода с фредгольмовским ядром, для которого достаточно хорошо разработана методика построения решения в виде равномерного сходящегося ряда Неймана [8]

$$u_x(z, t) = F(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda^2 V_{A1})^n \iint_{(D)} K_n(z', t') F(z', t') dt' dz',$$

где  $F(z, t)$  — свободный член уравнения, а интегрируемые ядра

$$K_1 = 1, \quad K_n = \iint_{(D)} \dots \iint_{(D)} dD_1 \dots dD_n, \quad n > 1$$

представляют собой полиномы относительно переменных  $\tau^{\pm} = t \pm z/V_{A1}$ .

Из анализа результатов получаем, что после начала движения по обе стороны от границы возникают области влияния краевых эффектов. Границы этих областей перемещаются с альфвеновской скоростью. При „убегании“ полупространства от падающей волны поле остается непрерывным на границах этих областей, при встречном движении поле терпит разрыв, по-видимому это результат остаточных явлений в среде. Аналогичные качественные эффекты наблюдаются при рассмотрении нестационарной краевой задачи электромагнитных волн в электродинамической трактовке [9], что подтверждает единый физический подход к рассмотрению плазменных задач.

Отраженное поле легко восстанавливается с помощью квадратурных формул (9), (12) по известному уже внутреннему полю. При этом следует отметить, что на спектр рассеянного поля существенно влияет постановка начального условия. В случае спектра рассеянного поля при адиабатическом включении на бесконечности

в прошедшем поле присутствует только уходящая от границы волна. А спектр поля при конечном моменте времени состоит из волн с разными частотами, распространяющимися как от границы среды, так и в сторону границы. Это проявляется уже при рассмотрении нулевого члена ряда Неймана.

Поверхностный анализ краевой задачи только для альфвеновской волны показал принципиальную возможность применения метода интегральных уравнений при магнитогидродинамическом описании волн в солнечной плазме. Причем ценность строгих математических решений, полученных для простых модельных задач, каковой является дифракция одной отдельно взятой альфвеновской волны, состоит в том, что она может служить основой для построения приближенных решений более сложных краевых задач, когда рассматривается пакет волн, распространяющихся в плазме Солнца.

## Список литературы

- [1] Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. М.: Мир, 1985. 589 с.
- [2] Александрова А.А., Александров Ю.Н. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 5. С. 6–11.
- [3] Александрова А.А., Александров Ю.Н. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 1–6.
- [4] Neruch A.G., Scherbatko I.V., Marciniak M. Electromagnetics of modulated media with applications to photonics. Warsaw, 2001. 263 p.
- [5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 437 с.
- [6] Александрова А.А., Хижняк Н.А. Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков: Тест-Радио лтд., 1993. 230 с.
- [7] Александрова А.А. // Магнит. гидродинамика. 1993. № 2. С. 21–28.
- [8] Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
- [9] Нерух А.Г. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 2. С. 216–226.