

01;03

## Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли в диэлектрической среде при одномодовой начальной деформации формы

© В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 7 февраля 2003 г.)

В асимптотических расчетах второго порядка малости по величине одномодовой начальной деформации равновесной сферической формы заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости в идеальной несжимаемой диэлектрической среде показано, что амплитуды нелинейных колебаний поверхности капли, а также распределение энергии между нелинейно возбуждающимися модами существенно зависят от отношения плотностей сред  $\rho$ . Обнаружено, что увеличение  $\rho$  — отношения плотности окружающей среды к плотности капли приводит к увеличению амплитуды наиболее высокой из колебательных мод системы, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости. Амплитуда нулевой моды в том же втором порядке малости при изменении отношения плотностей сред не изменяется. Влияние собственного заряда капли, величины межфазного поверхностного натяжения и диэлектрической постоянной внешней среды на параметры нелинейных осцилляций с ростом  $\rho$  усиливается.

1. Исследование электростатической неустойчивости заряженной капли жидкости, взвешенной в другой жидкости, представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями, в которых фигурирует подобный объект: в технологии для равномерного перемешивания не смешивающихся жидкостей, в практике сжигания жидких топлив для смешивания топлива и окислителя, в геофизических экспериментах (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор исследованы слабо из-за сложной техники экспериментов и трудоемкости теоретических выкладок. При этом подавляющее большинство задач решено в линейном приближении по амплитуде капиллярных осцилляций. Сравнительно недавно стали выполняться теоретические аналитические и численные работы, посвященные расчету параметров осцилляций заряженной капли, находящейся в вакууме, принимающие во внимание реальную нелинейность феномена [5–11]. В [12] исследованы нелинейные осцилляции заряженной электропроводной капли в сжимаемой диэлектрической среде, но все рассмотрение проведено лишь для начального возмущения основной моды капли и основное внимание уделено изучению ее акустического излучения. В связи с многочисленными приложениями феномена осцилляций капли во внешней среде, которая не может быть отождествлена с вакуумом [1–4], представляется целесообразным исследовать влияние наличия внешней среды на закономерности нелинейных осцилляций капли в более общей ситуации, когда начальная деформация равновесной сферической формы задается виртуальным возбуждением произвольной одиночной моды ее капиллярных колебаний.

2. Рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В отсутствие поля тяжести вследствие действия сил поверхностного натяжения на границе раздела сред с коэффициентом  $\sigma$  внутренняя жидкость, к которой отнесем индекс 1, примет форму сферической капли с радиусом  $R$ . Внешнюю жидкость, идентифицируемую индексом 2, будем считать безграничной. Примем далее, что жидкость в капле идеально проводящая и имеет заряд  $Q$ , распределенный по поверхности капли, а среда является идеальным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_*$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одной из мод капиллярных осцилляций системы. Зададимся целью найти аналитическое выражение для формы нелинейно осциллирующей капли в любой момент времени  $t > 0$ .

В нижеследующих рассуждениях будем пользоваться безразмерными переменными, в которых  $R = \rho_1 = \sigma = 1$ , полагая, что  $\rho_2/\rho_1 \equiv \rho$ .

В сферической системе координат  $r, \Theta, \phi$  с началом в центре капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, имеет вид

$$r = 1 + \xi(\Theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Движения жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными, т.е. примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$  и в среде  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется функциями потенциалов скорости  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

Система уравнений, описывающих эволюцию поверхности раздела, в изложенной формулировке будет состоять из системы уравнений Лапласа для потенциалов скоростей  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и электростатического потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3)$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

и граничных условий: в центре капли

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (5)$$

на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (6)$$

на границе раздела сред: кинематического

$$r = 1 + \xi(\Theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}; \quad (7)$$

равенства нормальных компонент скоростей движения жидкости в капле и в среде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}; \quad (8)$$

динамического

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + P_0^{(1)} + P_E - P_\sigma \\ = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2 + P_0^{(2)}; \end{aligned} \quad (9)$$

постоянства электрического потенциала поверхности капли

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t). \quad (10)$$

В выписанных математических соотношениях  $P_0^{(j)}$  — давление в капле ( $j = 1$ ) и в среде ( $j = 2$ );  $P_E = \varepsilon_*(\nabla\Phi)^2/8\pi$  — давление электрического поля на границу раздела сред;  $P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}$  — лапласовское давление, где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор положительной нормали к поверхности капли;  $\Phi_S(t)$  — постоянный вдоль поверхности капли электростатический потенциал.

Учтем также условия: неизменности электрического заряда

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \varepsilon_*(\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi) dS = Q, \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\Theta, t); \\ 0 \leq \Theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (11)$$

неизменности объема капли

$$\begin{aligned} \int_{V_1} r^2 dr \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi = \frac{4}{3}\pi; \\ V_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\Theta, t); \\ 0 \leq \Theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

неподвижности центра масс капли

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 \int_{V_1} \mathbf{r} dV_1 + \rho_2 \int_{V_2} \mathbf{r} dV_2}{\int_{V_1} \rho_1 dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 dV_2} = 0; \\ V_2 = \begin{cases} r > 1 + \xi(\Theta, t); \\ 0 \leq \Theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы капли

$$t = 0: \quad \xi(\Theta) = \xi_0 + \varepsilon P_k(\mu) \quad (k \geq 2); \quad \mu \equiv \cos \Theta \quad (14)$$

и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0: \quad \frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, имеющий смысл амплитуды начальной деформации;  $P_k(\mu)$  — полином Лежандра порядка  $k$ ;  $\xi_0$  — константа, определяемая из условия (12) с точностью до слагаемого второго порядка малости,

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + 0(\varepsilon^3). \quad (16)$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении воспользуемся известным методом многих масштабов [13]. Для этого искомые функции  $\xi(\Theta, t)$ ,  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и будем считать зависящими не просто от времени  $t$ , а от разных его масштабов  $T_m$ , определенных через малый параметр  $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ,

$$\begin{aligned} \xi(\Theta, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \cdot \xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \cdot \psi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, \dots); \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \varphi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + 0(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложения (17) в краевую задачу (2)–(13) и приравнивая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций  $\xi^{(m)}$ ,  $\psi^{(m)}$ ,  $\varphi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(m)}$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

В силу линейности уравнений (2)–(6) им должна удовлетворять каждая из функций  $\psi^{(m)}$ ,  $\varphi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(m)}$  в разложениях (17), поэтому представим последние как решения системы (2)–(6) в виде

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n P_n(\mu); \\ \varphi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \\ \Phi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu).\end{aligned}\quad (18)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра будем искать и последовательные поправки  $\xi^{(m)}$  к выражению, определяющему форму поверхности капли,

$$\xi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu). \quad (19)$$

4. В нулевом порядке малости по  $\varepsilon$  из задачи (2)–(13) получим решение, описывающее равновесное состояние системы,

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) &\equiv 0; \quad \psi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \\ \xi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) &\equiv 0; \quad \Phi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, \dots) = \frac{Q}{r\varepsilon_*}.\end{aligned}\quad (20)$$

5. В первом порядке малости по  $\varepsilon$  для определения коэффициентов  $G_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(1)}$ ,  $F_n^{(1)}$ ,  $M_n^{(1)}$  в решениях (18), (19) (при  $m = 1$ ) граничные условия (7)–(13) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}; \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}; \\ -\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon_*}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} \right) &+ (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = -\rho \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_0}; \\ \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} &= \Phi_S^{(1)}; \\ \int_0^\pi \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left( \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] d\mu &= 0; \\ \int_0^\pi \xi^{(1)} d\mu = 0; \quad \int_\Omega \xi^{(1)} Y_1^n(\Theta, \varphi) d\Omega &= 0; \\ \Delta_\Omega &\equiv \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right).\end{aligned}\quad (21)$$

$Y_1^n(\Theta, \varphi)$  — сферическая функция.

Выражения для коэффициентов первого порядка в разложениях (18), (19) несложно найти из системы (21) в виде

$$\begin{aligned}M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \\ M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= A_n(T_1, \dots) \cdot \exp(i\omega_n T_0) + \text{к. с.} \quad (n \geq 2); \\ D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2); \\ G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= -\frac{n}{n+1} D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ &= -\frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2); \\ F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{Q}{\varepsilon_*} M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \quad (n \geq 0); \\ A_n(T_1, \dots) &\equiv a_n(T_1, \dots) \cdot \exp[ib_n(T_1, \dots)]; \\ \Phi_S^{(1)} &= 0; \quad \omega_n^2 \equiv \chi_n n(n-1)[(n+2) - W]; \\ W &\equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_*}; \quad \chi_n = \left( 1 + \frac{n\rho}{n+1} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (22)$$

Аббревиатура к.с. означает комплексно сопряженные слагаемые к выписанным. Зависимости функций  $a_n$  и  $b_n$  от параметров  $T_1$  и т.д. определяются в следующих порядках малости.

Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по  $\varepsilon$  приближении, величины  $a_n$  и  $b_n$  можно положить не зависящими от времени, т.е.

$$\begin{aligned}a_n(T_1, \dots) &\approx a_n^{(0)} + 0(T_1); \\ b_n(T_1, \dots) &\approx b_n^{(0)} + 0(T_1).\end{aligned}$$

Несложно показать, что при этом для возмущения поверхности получим оценку

$$\xi(\Theta, t) \approx \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\Theta, t, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) + \varepsilon 0(\varepsilon t), \quad (23)$$

где  $a_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$  — константы, не зависящие от времени.

Ошибка в этом разложении окажется порядка первого члена, если  $t \approx 0(\varepsilon^{-1})$ . Для значений  $t \geq 0(\varepsilon^{-1})$  данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (23) справедливо на временном интервале  $t \leq 0(1)$ , в этом случае ошибка составляет величину  $\sim \varepsilon^2$ . Однако при исследовании тенденций движения поверхности использовать (23) можно и на временных интервалах  $t \leq 0(\varepsilon^{-1})$  при условии выполнения требования сравнимости решения первого порядка с величиной начального возмущения. Более детальная информация о пределах применимости выписанного разложения может быть получена при анализе задачи в следующем квадратичном порядке малости по  $\varepsilon$ .

Подставляя разложение (23) с учетом (19), (22) в начальные условия (14)–(16) и приравнивая друг к другу величины одного порядка малости, несложно найти

$$a_n^{(0)} = \frac{1}{2} \delta_{nk}; \quad b_n^{(0)} = 0 \quad (n \geq 2),$$

где  $\delta_{nk}$  — символ Кронекера.

В итоге функция, описывающая эволюцию формы поверхности капли со временем в линейном по  $\varepsilon$  приближении, будет иметь вид

$$\xi(\Theta, t) = \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + 0(\varepsilon^2). \quad (24)$$

Согласно этому решению, в первом порядке по амплитуде возмущения  $\varepsilon$  поверхность капли совершает гармонические колебания в окрестности равновесной сферы, соответствующие  $k$ -й (начально возбужденной) моде.

Для потенциалов полей скоростей и электростатического потенциала в этом же приближении получим следующие решения:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon \frac{\omega_k r^k}{k} \sin(\omega_k t) P_k(\mu) + 0(\varepsilon^2);$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \frac{\omega_k}{(k+1)r^{k+1}} \sin(\omega_k t) P_k(\mu) + 0(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{r\varepsilon_*} + \varepsilon \cos(\omega_k t) \frac{Q}{r^{k+1}\varepsilon_*} P_k(\mu) + 0(\varepsilon^2). \quad (25)$$

6. Для определения поправок второго порядка малости к выписанным решениям (т.е. для отыскания функций  $\xi^{(2)}(\Theta, t)$ ,  $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ) выпишем систему уравнений, получающуюся из граничных условий (7)–(13), приравниванием слагаемых  $\sim \varepsilon^2$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \Theta};$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \Theta} \\ &= \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \Theta}; \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon_*}{8\pi} \left[ 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 \right]$$

$$+ 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} + 2 \left( \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)}$$

$$+ \left( \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + \left( \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right)^2 \right) \left( \xi^{(1)} \right)^2 + (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)}$$

$$- 2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = -\rho \left\{ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_1} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\Phi^{(2)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \left( \xi^{(1)} \right)^2 = \Phi_S^{(2)};$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left[ \frac{d\Phi^{(2)}}{dr} + \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(2)} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right] d\mu = 0; \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \left[ \xi^{(2)}(\Theta, t) + \left( \xi^{(1)}(\Theta, t) \right)^2 \right] d\mu = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ 2\xi^{(2)}(\Theta, t) + 3 \left( \xi^{(1)}(\Theta, t) \right)^2 \right] Y_1^n(\Theta, \varphi) d\mu d\varphi = 0. \quad (26)$$

Подставляя разложения (18), (19) (при  $m = 2$ ), а также решения (20) и (22) в систему граничных условий (26), можно получить дифференциальные уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ , требование исключения из решений которых секулярных членов приводит к соотношениям

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} = 0; \quad \frac{\partial b_n}{\partial T_1} = 0,$$

т.е. получаем, что  $a_n$  и  $b_n$  в решениях (21) не зависят от времени  $T_1$ . Их зависимость от более медленных времен  $T_2, T_3$  и т.д. может быть определена только в следующих порядках приближений.

Общее решение полученных из системы (26) неоднородных дифференциальных уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left\{ A_n(T_2, \dots) \bar{A}_n(T_2, \dots) \right. \\ & \left. + [A_n(T_2, \dots)]^2 \exp(i2\omega_n T_0) + \text{к.с.} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= -9 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)(2n-1)} \\ & \times \left\{ A_{n-1}(T_2, \dots) A_n(T_2, \dots) \exp(i\omega_{n-1} + \omega_n) T_0 \right. \\ & \left. + \bar{A}_{n-1}(T_2, \dots) A_n(T_2, \dots) \exp(i(\omega_n - \omega_{n-1}) T_0) + \text{к.с.} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \left\{ c_n(T_2, \dots) \exp(id_n(T_1, \dots)) \right. \\ & \left. \times \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.} \right\} + N_n(T_0, T_2, \dots); \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_n(T_0, T_2, \dots) &\equiv \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \right. \\
&\quad \times \exp[i(\omega_m + \omega_l)T_0] + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \\
&\quad \times \bar{A}_l(T_2, \dots) \exp[i(\omega_m - \omega_l)T_0] + \text{к. с.} \left. \right\}; \\
\lambda_{mln}^{(\pm)} &= \frac{[\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}]}{[\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2]}; \\
\gamma_{mln} &\equiv \varkappa_n K_{mln} \left\{ \omega_m^2 \left[ n - m + 1 - \frac{\rho n(n-m-1)}{n+1} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2n[l(l+1) - 1] + W \frac{n}{2} [l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3] \right\} \\
&\quad + \varkappa_n \alpha_{mln} \left\{ \omega_m^2 \left[ \frac{1}{m} - \frac{n\rho}{(n+1)(m+1)} \right] + W \frac{n}{2} \right\}; \\
\eta_{mln} &\equiv \varkappa_n K_{mln} \left\{ \frac{n}{2} - m + 1 + \frac{\rho n(2m-n+3)}{2(n+1)} \right\} \\
&\quad + \varkappa_n \alpha_{mln} \left\{ \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{n}{2l} \right) - \frac{n\rho(n+2l+3)}{2(m+1)(l+1)(n+1)} \right\}; \\
K_{mln} &\equiv [C_{mln}^{000}]^2; \\
\alpha_{mln} &\equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{mln}^{000} C_{mln}^{-110}; \\
C_{mln}^{000} &\equiv \begin{cases} 0, & \text{если } m+l+n = 2g+1, \\ & \text{где } g \text{ — целое число;} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-m)!(g-l)!(g-n)!} \left[ \frac{(2g-2m)!(2g-2l)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \end{cases}
\end{aligned}$$

если  $m+l+n = 2g$  ( $g$  — целое число);

$$\begin{aligned}
C_{mln}^{-110} &\equiv \sqrt{2n+1} n! \\
&\quad \times \left[ \frac{(m+l-n)! m(m+1)}{(n+m-l)!(n-m+l)!(m+l+n+1)! l(l+1)} \right]^{1/2} \\
&\quad \times \sum_z \frac{(-1)^{m+1+z} (m+z-1)!(n+l-z+1)!}{z!(m-z+1)!(n-z)!(l-n+z-1)!}.
\end{aligned}$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям  $z$ , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. Горизонтальная черта сверху над  $A_n$  в (27) обозначает комплексное сопряжение. Отметим, что  $C_{mln}^{000}$  и  $C_{mln}^{-110}$  (коэффициенты Клебша–Гордана [14]) отличны от нуля при условии, что их нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
|m-l| \leq n \leq (m+l); \quad m+l+n = 2g \\
(g \text{ — целое число}). \quad (28)
\end{aligned}$$

Коэффициенты в разложениях (19) для потенциалов полей скоростей в среде  $\varphi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  и капле  $\psi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$

и электростатического потенциала  $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  связаны с решениями (19) и (27) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
D_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} [(m(m-1)K_{mln} - \alpha_{mln})] \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{m} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{-1}{n+1} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} [(m+1)(m+2)K_{mln} - \alpha_{mln}] \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{m+1} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\};
\end{aligned}$$

$$F_0^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = 0;$$

$$\begin{aligned}
F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{Q}{\varepsilon_*} \left\{ M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m K_{mln} M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \cdot M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}.
\end{aligned}$$

В решении (27)  $c_n(T_1, \dots)$  и  $d_n(T_1, \dots)$  — неизвестные функции времени, которые не зависят от временного масштаба  $T_0$ .

Аналогично тому, как это делалось для случая линейного приближения, чтобы завершить рассмотрение задачи в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении, следует неизвестные величины  $a_n, b_n, c_n, d_n$  положить не зависящими от времени, т.е. равными константам, значения которых определяются начальными условиями (14)–(16), поскольку справедливы следующие оценки:

$$a_n \approx a_n^{(0)} + 0(T_2); \quad b_n \approx b_n^{(0)} + 0(T_2);$$

$$c_n \approx c_n^{(0)} + 0(T_1); \quad d_n \approx d_n^{(0)} + 0(T_1).$$

В этом случае разложение (19) для функции, описывающей искажение формы поверхности капли, принимает вид

$$\begin{aligned}
\xi(\Theta, t) &\approx \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\Theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) \\
&\quad + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\Theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}) + 0(\varepsilon^3 t); \quad (29)
\end{aligned}$$

$a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}$  — константы.

Выражение (29) справедливо на временном интервале  $t \leq 0(1)$  с ошибкой  $\sim \varepsilon^3$ . На временном интервале  $0(1) < t \leq 0(\varepsilon^{-1})$  величина ошибки сравнима со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости); следовательно, в разложении (29) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному

приближению. Таким образом, приближенное линейное решение задачи (24), (25) применимо (равномерно пригодно) на временном интервале  $t \leq 0(\varepsilon^{-1})$ .

Подставим разложение (29) в начальные условия (14)–(16) и, приравняв друг к другу величины одного порядка малости, с учетом (19) получим следующие соотношения:

$$t = 0: \quad M_n^{(1)} = \delta_{nk}; \quad M_n^{(2)} = -\frac{\delta_{n0}}{2k+1};$$

$$\frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad \frac{\partial M_n^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_0} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

из которых, используя выражения (22) и (27), определим неизвестные константы  $a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}$

$$a_n^{(0)} = \frac{1}{2}\delta_{nk}; \quad b_n^{(0)} = 0;$$

$$c_n^{(0)} = -\frac{(1 - \delta_{n,0})}{2}N_n(t=0);$$

$$d_n^{(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В итоге решения (22), (27) для коэффициентов  $M_n^{(m)}(t)$  примут окончательный вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nk} \cos(\omega_n t);$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{2(2k+1)}[1 + \cos(2\omega_k t)]; \quad M_1^{(2)}(t) = 0;$$

$$M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t) \quad (n \geq 2);$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} \left( \lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cos(2\omega_k t) \right). \quad (30)$$

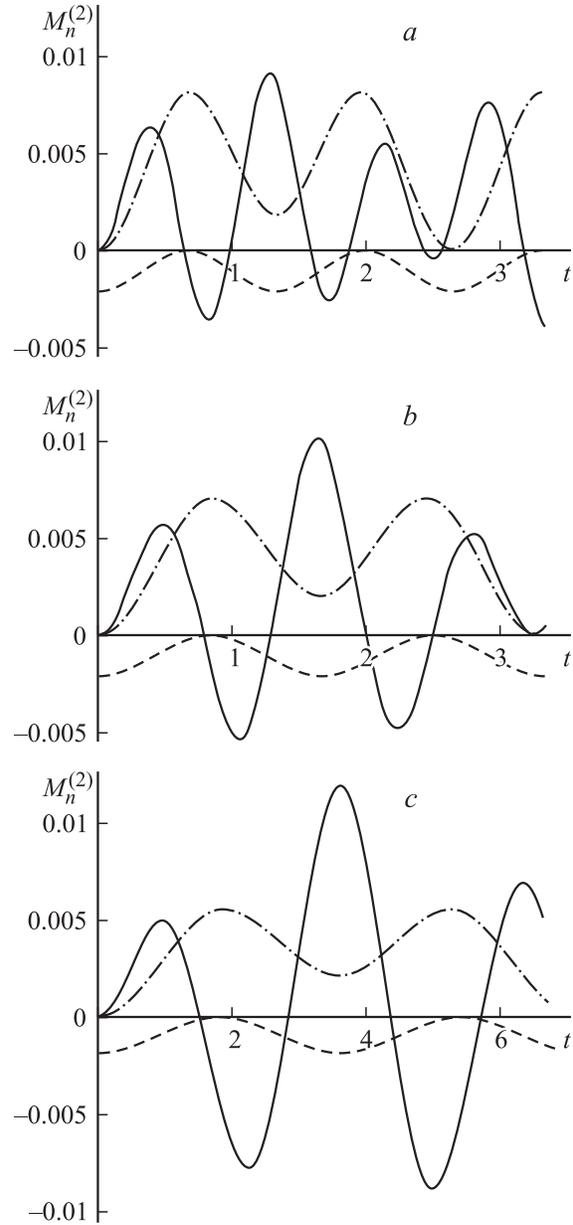
Несложно заметить, что коэффициенты  $M_n^{(2)}(t)$  пропорциональны величинам  $\lambda_{kkn}^{(\pm)}$ , которые в свою очередь, согласно обозначениям, введенным в (27), пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана  $C_{kkn}^{000}$  и  $C_{kkn}^{-110}$  и, следовательно (см. (28)), отличны от нуля только для  $n = 2j$  ( $j = 0, \dots, k$ ).

Подставляя (19), (30) в (29), получим, что изменение во времени формы поверхности капли с точностью до слагаемых второго порядка малости будет описываться функцией

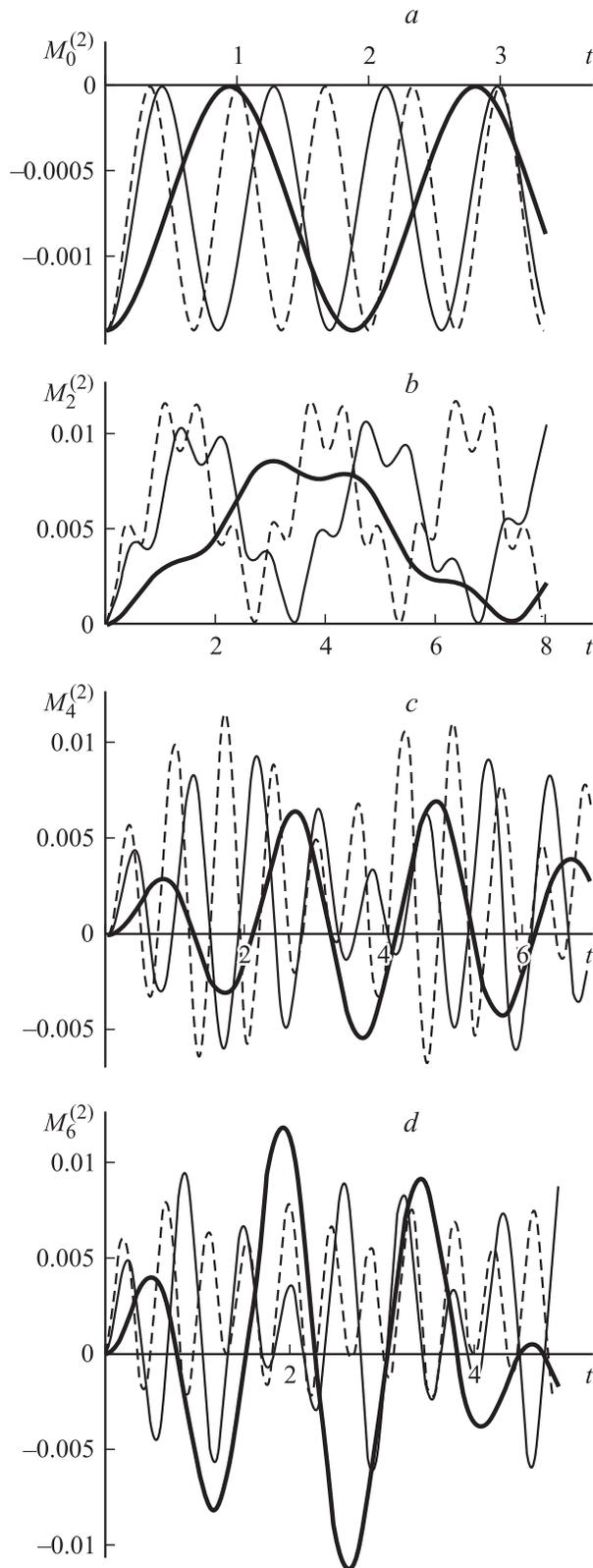
$$\begin{aligned} \xi(\Theta, t) \approx & \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) \\ & - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} [1 + \cos(2\omega_k t)] \right. \\ & + \sum_{j=1}^k \left[ \left( \lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)} \right) \cos(\omega_{2j} t) \right. \\ & \left. \left. - \left( \lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)} \cos(2\omega_k t) \right) \right] P_{2j}(\mu) \right\} + 0(\varepsilon^3 t). \quad (31) \end{aligned}$$

Из (31) видно, что начальное возмущение любой  $k$ -й (четной либо нечетной) одиночной моды капиллярных колебаний приводит к возбуждению во втором порядке малости только четных мод с номерами, лежащими в диапазоне  $[0; 2k]$ .

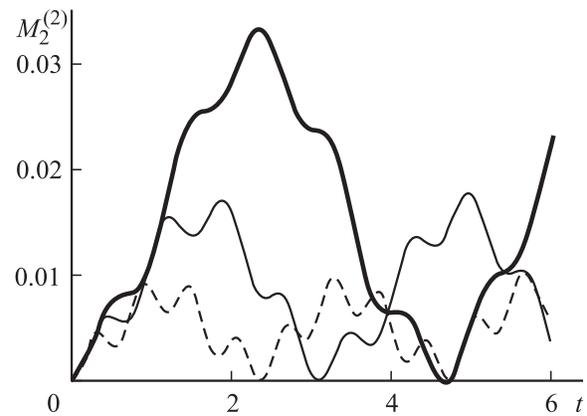
7. На рис. 1, *a-c* приведены рассчитанные по (30) при различных значениях отношения плотностей среды и капли  $\rho$  временные зависимости амплитуд мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением основной ( $k = 2$ ) моды. В этом случае во втором порядке малос-



**Рис. 1.** Зависимость безразмерных амплитуд мод  $M_n^{(2)}(t)$ , возбуждающихся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся основной модой, при  $W = 1$ .  $\rho$ : *a* — 0.1, *b* — 1.0, *c* — 10.



**Рис. 2.** Зависимости безразмерных амплитуд мод  $M_n^{(2)}(t)$ , возбуждающихся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся третьей модой, при  $W = 1$ .  $\rho = 0.1$  (пунктир), 10 (тонкая сплошная кривая), 100 (жирная кривая); *a* — нулевая мода  $n = 0$ , *b* — вторая мода  $n = 2$ , *c* — четвертая мода  $n = 4$ , *d* — шестая мода  $n = 6$ .



**Рис. 3.** Зависимость безразмерной амплитуды основной моды  $M_2^{(2)}(t)$ , возбуждающейся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся третьей модой, при  $\rho = 0.1$ .  $W = 1$  (пунктир), 2 (тонкая сплошная кривая), 3 (жирная кривая).

ти возбуждаются нулевая (штриховая кривая), вторая (штрих-пунктир) и четвертая (сплошная кривая) моды. Из рис. 1 видно, что с увеличением отношения плотностей  $\rho$  растет амплитуда четвертой моды, а амплитуда второй моды убывает. Расчеты для более высоких номеров мод, определяющих начальную деформацию капли, показывают, что с увеличением  $\rho$  всегда растет амплитуда самой высокой из мод, возбуждающихся во втором порядке малости, а амплитуды остальных мод, кроме нулевой, убывают. Это обстоятельство проиллюстрировано рис. 2, *a-d*, где приведены результаты расчетов для ситуации, когда начальная деформация определяется третьей модой. На каждой части рис. 2 приведены временные зависимости одной из мод, возбуждающихся во втором порядке малости, рассчитанные при различных значениях отношения плотностей. Как выше уже отмечалось, амплитуда нулевой моды при изменении  $\rho$  не меняется. Это обстоятельство связано с тем, что во втором порядке малости амплитуда нулевой моды определяется, как это видно из (30), квадратом амплитуды моды, задающей начальную деформацию. Зависимость амплитуды нулевой моды от  $\rho$  появится лишь при расчетах следующего третьего порядка малости.

На рис. 3 приведены результаты расчетов амплитуды основной моды, возбуждающейся во втором порядке малости при фиксированном  $\rho$  и различных докритических значениях параметра  $W$ , в котором собраны остальные важные для обсуждаемого феномена физические величины: коэффициент межфазного натяжения, диэлектрическая проницаемость среды, заряд капли и ее радиус. В размерной форме параметр  $W$  имеет вид  $W = Q^2/4\pi\sigma R^3\epsilon_*$ . Несложно видеть, что с увеличением  $W$  (с приближением к критическому для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значению  $W_{cr} = 4$  [1-4]) амплитуда основной моды заметно растет.

Ясно видное из приведенных графиков снижение частоты осцилляций с ростом  $\rho$  является линейным по малому параметру  $\varepsilon$  результатом, который ранее уже обсуждался как для идеальных жидкостей [15], так и для вязких, для диэлектрической среды [16] и для проводящей [17].

## Заключение

При нелинейных осцилляциях капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в диэлектрической идеальной несжимаемой среде с ростом отношения плотностей среды и капли максимум энергии в спектре нелинейно возбужденных мод смещается к наиболее высокой моде, независимо от того, какой из мод задается начальная деформация капли. С увеличением собственного заряда капли и с уменьшением коэффициента межфазного натяжения, радиуса капли и диэлектрической проницаемости среды амплитуда основной моды в квадратичном по малому параметру приближении растет.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-01-00760).

## Список литературы

- [1] *Vaily A.G.* // *Sci. Prog.*, Oxf. 1974. Vol. 61. P. 555–581.
- [2] *Коженков В.И., Фукс Н.А.* // *Успехи химии*. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
- [3] *Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О.* // *ЖПХ*. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // *Изв. РАН. МЖГ*. 1994. № 3. С. 3–22.
- [5] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [6] *Basaran O.A., Scriven L.E.* // *Phys. Fluids A*. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
- [7] *Feng Z.* // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [8] *Ширяева С.О.* // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [9] *Ширяева С.О.* // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 3. С. 163–174.
- [10] *Ширяева С.О.* // *ЖТФ*. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [11] *Ширяева С.О.* // *ЖТФ*. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [12] *Гаибов А.Р., Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // *ЖТФ*. 2003. Т. 29. Вып. 4. С. 22–27.
- [13] *Найфе А.* *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [14] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [15] *Стаханов И.П.* // *ЖТФ*. 1974. Т. 44. Вып. 7. С. 1373–1379.
- [16] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* // *ЖТФ*. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 1–8.
- [17] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // *ЖТФ*. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 34–42.