01;03;08

Об акустическом излучении нелинейно колеблющейся заряженной капли

© А.Р. Гаибов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 10 июля 2002 г. В окончательной редакции 18 декабря 2002 г.)

При расчетах во втором порядке малости по амплитуде осцилляций капли несжимаемой жидкости в сжимаемой диэлектрической среде получено выражение для изменения со временем формы капли. Показано, что в спектре акустического излучения капли присутствует монопольная компонента, вносящая существенный вклад в интегральную интенсивность излучения. Появление монопольной компоненты излучения связано с проявляющейся во втором порядке малости зависимостью от времени амплитуды нулевой моды капли.

1. Колеблющаяся в сжимаемой среде капля несжимаемой жидкости способна излучать звуковые волны. При расчетах в линейном по амплитуде колебания приближении нулевая и первая моды не участвуют в формировании спектра колебаний [1]. При неизменном объеме капли в спектре ее звукового излучения наиболее интенсивным является излучение, связанное с основной модой [2]. Дипольное излучение, обязанное возбуждению трансляционной моды, обнаруживается лишь при расчетах во втором порядке малости по амплитуде колебаний, когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, имеются две моды с соседними номерами (например, j и $j+1$). Это связано с видом выражения для амплитуды трансляционной моды, возбуждающейся во втором порядке малости, пропорционального коэффициентам Клебша–Гордана, отличным от нуля только для указанной последовательности номеров изначально возбужденных мод [3,4].

Сама идея постановки задачи об акустическом излучении осциллирующей капли основана на том, что с каждой модой осцилляций связано искажение формы поверхности равновесной сферической формы вида $\sim P_n(\mu)\exp(i\omega_n t)$, $\mu \equiv \cos\theta$, где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра; ω_n — частота n-й моды. Периодическое движение поверхности капли вызывает периодические же возмущения давления в сжимаемой окружающей среде, т.е. генерирует акустическую волну. Частоты осцилляций капель из диапазона размеров, характерных для жидкокапельных систем естественного происхождения (туманов, облаков, дождя), приходятся на диапазоны частот звуковых волн и длинноволновых ультразвуковых (см., например, [5,8] и указанную там литературу). Наличие на каплях электрического заряда, отклонение формы капель от сферической, движение капель относительно внешней среды, учет их вязкости приводят к смещению спектра капиллярных колебаний в область более низких значений [4–6], т.е. в область звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом.

2. Пусть капля идеальной электропроводной жидкости с равновесным радиусом R, плотностью ρ_1, коэффициентом поверхностного натяжения γ, зарядом Q находится во внешней идеальной сжимаемой диэлектрической среде плотностью ρ_2, диэлектрической проницаемостью ε, скорость распространения звука в которой — c.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли. Примем, что в начальный момент времени возмущение равновесной сферической формы капли $\xi(\theta,t)$ имеет вид $\xi(\theta,t)=\alpha\cdot P_2(\mu)$, α — амплитуда возмущения, считающаяся малой ($\alpha/R \ll 1$).

Уравнение осциллирующей поверхности капли в любой момент времени запишем в виде

$$r = R + \xi(\theta,t); \quad \big(|\xi|/R \le \alpha/R \ll 1\big).$$

Движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей ψ_1 и ψ_2 соответственно.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\Delta\phi = 0; \quad \Delta\psi_1 = 0; \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - \Delta\psi_2 = 0;$$

$$r = R+\xi: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = \frac{\partial\psi_2}{\partial n}; \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta};$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \rho_1\frac{1}{2}(\nabla\psi_1)^2 + \rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \frac{\rho_2}{2c^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\rho_2(\nabla\psi_2)^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi}(\nabla\phi)^2 = \gamma\cdot\operatorname{div}\mathbf{n};$$

$$\phi = \mathrm{const};$$

$$r\to\infty: \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + ik\psi_2 = o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$t=0: \quad r = R + \xi_0 + \alpha\cdot P_2(\mu); \quad \psi_1 = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\nabla\phi)\,ds = Q,$$

$$S = \big[r = R+\xi(\theta,t),\, 0\le\theta\le\pi,\, 0\le\varphi\le 2\pi\big];$$

$$\int_v r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$v = \left[0 \le r \le R + \xi(\theta, t), 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right];$$

$$\int_v \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0,$$

ϕ — потенциал электрического поля; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности капли, Δp — разность гидростатических давлений в капле и во внешней среде; γ — коэффициент поверхностного натяжения; ξ_0 — нормировочная константа, определяющаяся из условия постоянства объема капли.

Решение сформулированной задачи проведем стандартными методами теории возмущений (см., например, [4,7–10]).

Будем учитывать зависимость ψ_1 и ψ_2 от времени при помощи множителя $\exp(i\omega t)$. Тогда волновое уравнение для потенциала ψ_2 можно преобразовать в уравнение Гельмгольца

$$\Delta\psi_2 + k^2\psi_2 = 0.$$

3. Потенциалы скоростей внутри и вне капли, возмущение поверхности капли и электрический потенциал будем искать в виде разложений

$$\psi_1 = \psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)}; \quad \psi_2 = \psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2)}; \quad \xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)};$$

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}, \qquad (1)$$

где верхний индекс в скобках означает порядок малости по α/R.

Поскольку $\phi^{(0)}$ представляет собой электрический потенциал невозмущенной сферической капли, то он должен быть равен $\phi^{(0)} = Q/\varepsilon r$, тогда разложение для электрического потенциала ϕ можно записать в виде

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon r} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}. \qquad (2)$$

Учитывая (1), (2) и разложив граничные условия в ряд по α/R вблизи невозмущенной поверхности капли $r = R$ с сохранением членов разложения до второго порядка малости включительно, приведем математические формулировки задач первого и второго порядков малости, на которые разобъется исходная задача.

Первое приближение

$$\Delta\phi^{(1)} = 0; \quad \Delta\psi_1^{(1)} = 0; \quad \Delta\psi_2^{(1)} + k^2\psi_2^{(1)} = 0;$$

$$r = R: \quad \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial r}; \quad \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial t};$$

$$-\rho_1\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial t} + P_e^{(1)} = P_L^{(1)};$$

$$P_e^{(1)} = -\frac{Q}{4\pi R^2}\left[\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r} + 2\xi^{(1)}\frac{Q}{\varepsilon R^2}\right];$$

$$P_L^{(1)} = \gamma\left[-\frac{2\xi^{(1)}}{R^2} - \frac{1}{R^2}\Delta_\Omega\xi^{(1)}\right];$$

$$\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial r} = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon\left[R^2\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r}\right]\sin\theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$r \to \infty: \quad \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial r} + ik\psi_2^{(1)} = o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = \alpha\cdot P_2(\mu); \quad \psi_1^{(1)} = 0.$$

Второе приближение

$$\Delta\phi^{(2)} = 0; \quad \Delta\psi_1^{(2)} = 0; \quad \Delta\psi_2^{(2)} + k^2\psi_2^{(2)} = 0;$$

$$r = R: \quad \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}$$

$$= \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r^2} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\theta};$$

$$-\rho_1\left[\frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial t} + \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r\partial t}\right] - \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\psi_1^{(1)})^2$$

$$+\rho_2\left[\frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial t} + \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_2^{(1)}}{\partial r\partial t}\right] - \frac{\rho_2}{2c^2}\left(\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial t}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\rho_2(\nabla\psi_2^{(1)})^2 + P_e^{(2)} = P_L^{(2)};$$

$$P_e^{(2)} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r}\right)^2 - \frac{Q}{4\pi R^2}\left[\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial r} + 2\xi^{(2)}\frac{Q}{\varepsilon R^3}\right]$$

$$+\frac{5Q^2}{4\pi\varepsilon R^6}\xi^{(1)^2} + 2\xi^{(1)}\frac{Q}{4\pi R^3}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r}$$

$$-\xi^{(1)}\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon}{8\pi R^2}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta}\right)^2;$$

$$P_L^{(2)} = -\gamma\frac{2\xi^{(2)}}{R^2} - \gamma\frac{1}{R^2}\Delta_\Omega\xi^{(2)}$$

$$+\gamma\frac{2}{R^3}\xi^{(1)}\left(\xi^{(1)} + \Delta_\Omega\xi^{(1)}\right);$$

$$\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r} - \xi^{(2)}\frac{Q}{\varepsilon R^2} + \xi^{(1)^2}\frac{Q}{\varepsilon R^3} = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon\left[R^2\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial r} + R^2\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(1)}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta} + 2R\xi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r}\right]\sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$r \to \infty: \quad \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial r} + ik\psi_2^{(2)} = o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$t = 0: \quad \xi^{(2)} = -\frac{1}{5}\frac{\alpha^2}{R}; \quad \psi_1^{(2)} = 0,$$

Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа.

4. Решение задачи первого порядка малости сложности не представляет [11], ищется в форме разложений

$$\psi_1^{(1)} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu);$$

$$\psi_2^{(1)} = B_0 h_0^{(2)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu);$$

$$\phi^{(1)} = F + \frac{F_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\xi^{(1)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\mu),$$

где $h_n^{(2)}(x)$ — сферические функции Ханкеля второго рода, и имеет окончательный вид [2]

$$\xi^{(1)} = \varkappa_2 \exp(-\omega_2^* t)\cos(\omega_2 t + \beta_2) P_2(\mu);$$

$$\psi_1^{(1)} = -\frac{1}{2R}\varkappa_2 \exp(-\omega_2^* t)\big[\omega_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2) + \omega_2^* \cos(\omega_2 t + \beta_2)\big] r^2 P_2(\mu);$$

$$\psi_2^{(1)} = \varkappa_2 \exp(-\omega_2^* t)\big\{M \cos[\omega_2 t + \beta_2 - k(r-R)] + X \sin[\omega_2 t + \beta_2 - k(r-R)]\big\} P_2(\mu) + \big\{\big[\beta_2 - k(r-R)\big]\big\} P_2(\mu);$$

$$\phi^{(1)} = \varkappa_2 \frac{QR}{\varepsilon r^3} \exp(-\omega_2^* t)\cos(\omega_2 t + \beta_2) P_2(\mu).$$

Выражения для коэффициентов $\varkappa_2$, ω_2, ω_2^*, β_2, M, X, зависящих от физических параметров задачи, приведены в Приложении 1.

5. Решение задачи во втором приближении будем искать путем прямого разложения [12]. Подставим $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, $\xi^{(1)}$, найденные в результате решения задачи первого приближения, в граничные условия задачи второго приближения и получим систему неоднородных граничных условий

$$\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} = \varkappa_2^2 \exp(-2\omega_2^* t)\big\{[K_0 + K_0\cos(\Theta) + K_1 \sin(\Theta)] + [K_2 + K_2 \cos(\Theta) + K_3 \sin(\Theta)] P_2(\mu) + [K_4 + K_4\cos(\Theta) + K_5 \sin(\Theta)] P_4(\mu)\big\}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial t} = \frac{1}{2R}\varkappa_2^2 \exp(-2\omega_2^* t)\big[\omega_2 \sin(\Theta) + \omega_2^* + \omega_2^* \cos(\Theta)\big]\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{7}P_2(\mu) + \frac{54}{35}P_4(\mu)\right);$$

$$\Theta = (2\omega_2 t + 2\beta_2); \tag{4}$$

$$-\rho_1 \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial t} - \frac{Q}{4\pi R^2}\left[\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial r} + 2\xi^{(2)}\frac{Q}{\varepsilon R^3}\right] + \gamma \frac{2\xi^{(2)}}{R^2} + \gamma \frac{1}{R^2}\Delta_\Omega \xi^{(2)} = \varkappa_2^2 \exp(-2\omega_2^* t)$$
$$\times \left\{\frac{1}{5}\big[\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1\cos(\Theta) + \mathfrak{B}_2 \sin(\Theta)\big] + \frac{1}{7}\big[\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4\cos(\Theta) + \mathfrak{B}_5 \sin(\Theta)\big] P_2(\mu) + \frac{1}{35}\big[\mathfrak{B}_6 + \mathfrak{B}_7\cos(\Theta) + \mathfrak{B}_6 \sin(\Theta)\big] P_4(\mu)\right\};$$

$$\phi^{(2)} - \xi^{(2)}\frac{Q}{\varepsilon R^2} = \varkappa_2^2 \frac{Q}{\varepsilon R^3}\exp(-2\omega_2^* t)[1 + \cos(\Theta)] \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7}P_2(\mu) + \frac{18}{35}P_4(\mu)\right); \tag{5}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\left[R^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial r}\right]\sin(\theta)\,d\theta\, d\varphi = 0. \tag{6}$$

Выражения для коэффициентов K_0–K_5, $\mathfrak{B}_0$–$\mathfrak{B}_8$ приведены в Приложении 2.

Решения для поправок второго порядка $\psi_1^{(2)}$, $\psi_2^{(2)}$, $\xi^{(2)}$, $\phi^{(2)}$ будем искать в том же виде, что и в задаче первого приближения,

$$\psi_1^{(2)} = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} r^n P_n(\mu);$$

$$\psi_2^{(2)} = B_0^{(2)} h_0^{(2)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu);$$

$$\phi^{(2)} = F^{(2)} + \frac{F_0^{(2)}}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)} r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\xi^{(2)} = a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} P_n(\mu). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (3)–(6) с учетом условия излучения и начального условия задачи второго приближения, получим систему уравнений относительно коэффициентов $A_0^{(2)}$, $A_n^{(2)}$, $B_0^{(2)}$, $B_n^{(2)}$, $F^{(2)}$, $F_0^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $a_0^{(2)}$, $a_n^{(2)}$, решение которой дает выражение для образующей колеблющейся осесимметричной капли в зависимости от времени

$$\xi^{(2)}(\mu, t) = a_0^{(2)}(t) P_0(\mu) + a_2^{(2)}(t) P_2(\mu) + a_4^{(2)}(t) P_4(\mu);$$

$$a_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{10R}\varkappa_2^2 \exp(-2\omega_2^* t)[1 + \cos(\Theta)] + \frac{1}{10R}\big[-2\alpha^2 + \varkappa_2^2 \cdot \cos(2\beta_2) + \varkappa_2^2\big];$$

$$a_2^{(2)}(t) = \varkappa_2^{(2)} \exp(-\omega_2^* t)\cos(\omega_2 t + \beta_2^{(2)}) - \varkappa_2^{(2)} \exp(-2\omega_2^* t)\big[N + L\cos(\Theta) + M \sin(\Theta)\big];$$

$$a_4^{(2)}(t) = \varkappa_4^{(2)} \exp(-\omega_4^* t) \cos(\omega_4 t + \beta_4^{(2)}) - \varkappa_2^{(2)} \exp(-2\omega_2^* t)\left[\mathfrak{N} + \mathfrak{L}\cos(2\omega_2 t + \beta_2) + \mathfrak{E}\sin(2\omega_2 t + \beta_2)\right]. \tag{8}$$

Выражения для коэффициентов $\varkappa_2^{(2)}$, $\beta_2^{(2)}$, $\varkappa_4^{(2)}$, $\beta_4^{(2)}$, N, L, M, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{E}$ приведены в Приложении 2.

Несложно видеть, что при начальном возмущении основной моды за счет взаимодействия мод во втором порядке малости возбуждаются также нулевая и четвертая моды. Наиболее интересным в смысле исследования акустического излучения колеблющейся капли является факт зависимости от времени амплитуды нулевой моды, что превращает каплю несжимаемой жидкости в акустический излучатель монопольного типа. Зависимость амплитуды нулевой моды от времени является следствием условия неизменности объема колеблющейся капли.

6. Из приведенных выражений (8) видно, в частности, что амплитуда нулевой моды квадратична по малому параметру α, т.е. возбуждение этой моды происходит за счет взаимодействия мод лишь во втором порядке малости, а при решении задачи в линейном по α приближении амплитуда нулевой моды постоянна. Также видно, что периодически зависящая от времени часть амплитуды, с которой связано акустическое излучение, затухает со временем с декрементом ω^*. Затухание определяется потерями энергии капиллярных осцилляций на генерацию акустического излучения.

Для численных оценок примем, как это было принято при численных оценках в [2,3], что $\rho_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$; $\rho_2 = 1.3\cdot10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$; $\gamma = 73\,\mathrm{dyn/cm}$; $\alpha = 0.1R$; $kR \ll 1$; $R = 250\,\mu\mathrm{m}$, концентрация дождевых капель указанного размера $N = 0.3\,\mathrm{cm^{-3}}$. Примем также, что заряд капли много меньше предельного в смысле устойчивости по Рэлею ($W \ll 1$) [8,13].

Выражение для мощности J акустического излучения от сферы, пульсирующей с амплитудой a_0, имеет вид [12]

$$J = \frac{2\pi\rho_2 R^4 \omega^4 a_0^2}{c(1 + \omega^2 R^2/c^2)}. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, что $a_0 \approx 10^{-3}R$, а мощность монопольного акустического излучения от единичной капли с вышеприведенными характеристиками, идущего на частоте $\omega \approx 6\cdot10^3\,\mathrm{s^{-1}}$, имеет порядок величины $10^{-7}\,\mathrm{erg/s}$. Мощность же акустического излучения из пространства объемом $1\,\mathrm{km^3}$, занятого дождем, равна $\approx 3\,\mathrm{W}$, т.е. существенно превышает как мощность дипольного акустического излучения, связанного с возбуждением трансляционной моды [3], так и мощность квадрупольного акустического излучения, генерируемого в линейном по амплитуде осцилляций приближении основной модой [2]. Интегральное монопольное излучение звука из такого облака будет иметь на его границе громкость $\approx 60\,\mathrm{dB}$ (что соответствует громкости нормальной человеческой речи). Роль заряда капли, согласно (8), сводится в основном к понижению частоты акустического излучения.

Заключение

При решении задачи о нелинейных капиллярных осцилляциях капли во втором порядке малости по амплитуде начального отклонения формы капли идеальной несжимаемой жидкости в сжимаемой идеальной среде от равновесной сферической выяснилось, что в спектре мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, присутствует и нулевая мода. Это превращает каплю в излучатель акустических волн монопольного типа. Интенсивность монопольного акустического излучения в звуковом диапазоне частот существенно превышает интенсивность ее акустического излучения, связанную с возбуждением высоких мод осцилляций, рассчитанную в линейном приближении, и, следовательно, играет определяющую роль в интегральной интенсивности акустического излучения жидкокапельных систем, например пространства, занятого дождем.

Приложение 1. Коэффициенты, через которые записывается решение задачи первого порядка малости:

$$\omega_n^2 = (n-1)(n+2)\frac{\gamma}{R^3}(1 - W_n) \times \left[\frac{\rho_1}{n} - \frac{\rho_2 h_n^{(2)}(rR)}{kRh_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1)h_n^{(2)}(kR)}\right];$$

$$W_n = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^3(n+2)\gamma}; \quad \omega_n = \mathrm{Re}\left(\sqrt{\tau_n + i\tau_n^*}\right);$$

$$\omega_n^* = \mathrm{Im}\left(\sqrt{\tau_n + i\tau_n^*}\right) \quad (n = 2, 4);$$

$$\tau_2 = \mathrm{Re}\,(\omega_n^2) = \frac{4\gamma(1 - W_2)}{R^3}\left[2\rho_1\Lambda_1 + 4\rho_2\Lambda_2\right] \times \left[\Lambda_1\rho_1^2 + 4\Lambda_2\rho_1\rho_2 + 4\Lambda_3\rho_2^2\right]^{-1};$$

$$\tau_2^* = \mathrm{Im}\,(\omega_n^2) = \frac{4\gamma(1 - W_2)}{R^3}\left[4\rho_2 k^5 R^5\right] \times \left[\Lambda_1\rho_1^2 + 4\Lambda_2\rho_1\rho_2 + 4\Lambda_3\rho_2^2\right]^{-1};$$

$$\Lambda_1 = (81 + 9k^2R^2 - 2k^4R^4 + k^6R^6);$$

$$\Lambda_2 = (27 + 6k^2R^2 + k^4R^4);$$

$$\Lambda_3 = (9 + 3k^2R^2 + k^4R^4);$$

$$\varkappa_2 = \alpha^2\sqrt{1 + (\omega_2^*/\omega_2)^2}; \quad \beta_2 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega_2^*}{\omega_2}\right);$$

$$M = (\Lambda_4\omega_2 + \Lambda_5\omega_2^*)\Lambda_6^{-1};$$

$$X = (\Lambda_5\omega_2 - \Lambda_4\omega_2^*)\Lambda_6^{-1};$$

$$\Lambda_4 = (3k^3R^3 - k^5r^2R^3 - 27kR + 9k^3r^2R - 12k^3rR^2 + 27kr);$$

$$\Lambda_5 = (-12k^2R^2 + 4k^4r^2R^2 + 27 - 9k^2r^2 - 3k^4rR^3 + 27k^2rR);$$

$$\Lambda_6 = \left[k^8r^3R^4\left(\frac{1}{k^2R^2} - \frac{2}{k^4R^4} + \frac{9}{k^6R^6} + \frac{81}{k^8R^8}\right)\right].$$

Приложение 2. Коэффициенты, через которые выписывается решение задачи второго порядка малости:

$$K_0=\left(\frac{1}{10}\,\mathfrak{U}-\frac{6}{10R^2}\,\mathfrak{M}-\frac{2}{10R}\,\omega_2^*\right);$$

$$K_1=\left(\frac{1}{10}\,\mathfrak{R}-\frac{6}{10R^2}\,\mathfrak{Z}-\frac{2}{10R}\,\omega_2^*\right);$$

$$K_2=\left(\frac{1}{7}\,\mathfrak{U}-\frac{3}{7R^2}\,\mathfrak{M}-\frac{1}{14R}\,\omega_2^*\right);$$

$$K_3=\left(\frac{1}{7}\,\mathfrak{R}-\frac{3}{7R^2}\,\mathfrak{Z}-\frac{1}{14R}\,\omega_2\right);$$

$$K_4=\left(\frac{9}{35}\,\mathfrak{U}+\frac{36}{35R^2}\,\mathfrak{M}+\frac{27}{35R}\,\omega_2^*\right);$$

$$K_5=\left(\frac{9}{35}\,\mathfrak{R}+\frac{36}{35R^2}\,\mathfrak{Z}+\frac{27}{35R}\,\omega_2\right);$$

$$\mathfrak{B}_0=\left(\frac{1}{2}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{1}{4}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^2+\omega_2^{*2})\right.$$
$$+\frac{11Q^2}{16\pi\varepsilon R^6}-\gamma\,\frac{5}{R^3}+\frac{\rho_2}{4c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2+\frac{\rho_2}{4c^2}$$
$$\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2+\frac{6}{16}\,\rho_1(\omega_2^2+\omega_2^{*2})$$
$$\left.-\frac{6}{4R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_1=\left(\frac{3}{4}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{11Q^2}{16\pi\varepsilon R^6}-\gamma\,\frac{5}{R^3}\right.$$
$$+\frac{\rho_2}{4c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2-\frac{\rho_2}{4c^2}\,(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2$$
$$\left.-\frac{6}{16\rho_1}\,(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)-\frac{6}{4R^2}\,\rho_2\,(\mathfrak{M}^2-\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_2=\left(\frac{3}{4}\,(\rho_1-\rho_2)2\omega_2^*\omega_2-\frac{\rho_2}{4c^2}\,2(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})\right.$$
$$\left.\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})+\frac{6}{16}\,\rho_1 2\omega_2\omega_2^*-\frac{6}{4R^2}\,\rho_2 2\mathfrak{M}\mathfrak{Z}\right);$$

$$\mathfrak{B}_3=\left((\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{1}{2}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^2+\omega_2^{*2})\right.$$
$$+\frac{14Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\gamma\,\frac{10}{R^3}+\frac{\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2+\frac{\rho_2}{2c^2}$$
$$\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2+\frac{6}{16}\,\rho_1(\omega_2^2+\omega_2^{*2})$$
$$\left.-\frac{6}{4R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_4=\left(\frac{3}{2}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{14Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\gamma\,\frac{10}{R^3}\right.$$
$$+\frac{\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2-\frac{\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2$$
$$\left.+\frac{6}{16}\,\rho_1\,(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)-\frac{6}{4R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2-\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_5=\left(3(\rho_1-\rho_2)\omega_2^*\omega_2-\frac{\rho_2}{c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})\right.$$
$$\left.\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})+\frac{3}{4}\,\rho_1\omega_2\omega_2^*-\frac{3}{R^2}\,\rho_2\mathfrak{M}\mathfrak{Z}\right);$$

$$\mathfrak{B}_6=\left(9(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{9}{2}\,(\omega_2^2+\omega_2^{*2})(\rho_1-\rho_2)\right.$$
$$+\frac{189Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\gamma\,\frac{90}{R^3}+\frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2+\frac{9\rho_2}{2c^2}$$
$$\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2-\frac{9}{2}\,\rho_1(\omega_2^2+\omega_2^{*2})$$
$$\left.+\frac{18}{R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_7=\left(\frac{27}{2}\,(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{189Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\frac{90\gamma}{R^3}\right.$$
$$+\frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2-\frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2$$
$$\left.-\frac{9}{2}\,\rho_1(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{18}{R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2-\mathfrak{Z}^2)\right);$$

$$\mathfrak{B}_8=\Big[27(\rho_1-\rho_2)\omega_2^*\omega_2-\frac{9\rho_2}{c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})$$
$$\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})-9\rho_1\omega_2\omega_2^*+\frac{36}{R^2}\,\rho_2\mathfrak{M}\mathfrak{Z}\Big];$$

$$N=\frac{Z_i\tau_2^*+Z_r(\tau_2+4\omega_2^{*2})}{\tau_2^{*2}+(\tau_2+4\omega_2^{*2})^2};$$

$$\mathfrak{U}=\frac{\begin{array}{r}-6k^5R^5\omega_2+k^7R^7\omega_2+324\omega_2^*+\\+27k^2R^2\omega_2^*-4k^4R^4\omega_2^*+k^6R^6\omega_2^*\end{array}}{R(81+9k^2R^2-2k^4R^4+k^6R^6)};$$

$$\mathfrak{R}=\frac{\begin{array}{r}324\omega_2+27k^2R^2\omega_2-4k^4R^4\omega_2+\\+k^6R^6\omega_2+6k^5R^5\omega_2^*-k^7R^7\omega_2^*\end{array}}{R(81+9k^2R^2-2k^4R^4+k^6R^6)};$$

$$\mathfrak{M}=\frac{-k^5R^6\omega_2+27R\omega_2^*+6k^2R^3\omega_2^*+k^4R^5\omega_2^*}{81+9k^2R^2-2k^4R^4+k^6R^6};$$

$$\mathfrak{Z}=\frac{27R\omega_2+6k^2R^3\omega_2+k^4R^5\omega_2+k^5R^6\omega_2^*}{81+9k^2R^2-2k^4R^4+k^6R^6};$$

$$L=\big[-\tau_2^{*3}T_i+\tau_2^{*2}(-\tau_2T_r+4T_r\omega_2^2+8S_r\omega_2\omega_2^*-4T_r\omega_2^{*2})$$
$$-(\tau_2T_r-4T_r\omega_2^2+8S_r\omega_2\omega_2^*+4T_r\omega_2^{*2})(\tau_2^2-8\tau_2\omega_2^2$$
$$+16\omega_2^4+8\tau_2\omega_2^{*2}+32\omega_2^2\omega_2^{*2}+16\omega_2^{*4})-\tau_2^*$$
$$\times(\tau_2^2T_i-8\tau_2T_i\omega_2^2+16T_i\omega_2^4+16S_i\tau_2\omega_2\omega_2^*-64S_i\omega_2^3\omega_2^*$$
$$+8\tau_2T_i\omega_2^{*2}-96T_i\omega_2^2\omega_2^{*2}+64S_i\omega_2\omega_2^{*3}+16T_i\omega_2^{*4})\big]\Lambda_7^{-1};$$

$$M=\big[-S_i\tau_2^*(\tau_2^{*2}+\tau_2^2-8\tau_2\omega_2^2+16\omega_2^4+8\tau_2\omega_2^{*2}-96\omega_2^2\omega_2^{*2}$$
$$+16\omega_2^{*4})-S_r(\tau_2-4\omega_2^2+4\omega_2^{*2})(\tau_2^{*2}+\tau_2^2-8\tau_2\omega_2^2$$
$$+16\omega_2^4+8\tau_2\omega_2^{*2}+32\omega_2^2\omega_2^{*2}+16\omega_2^{*4})+8\omega_2\omega_2^*$$
$$\times(2\tau_2^*\tau_2T_i-\tau_2^{*2}T_r+\tau_2^2T_r-8\tau_2^*T_i\omega_2^2-8\tau_2T_r\omega_2^2$$
$$+16T_r\omega_2^4+8\tau_2^*T_i\omega_2^{*2}+8\tau_2T_r\omega_2^{*2}$$
$$+32T_r\omega_2^2\omega_2^{*2}+16T_r\omega_2^{*4})\big]\Lambda_7^{-1};$$

$$\Lambda_7=\big[(\tau_2^{*2}+\tau_2^2-8\tau_2\omega_2^2+16\omega_2^4-16\tau_2^*\omega_2\omega_2^*$$
$$+8\tau_2\omega_2^{*2}+32\omega_2^2\omega_2^{*2}+16\omega_2^{*4})(\tau_2^{*2}+\tau_2^2-8\tau_2\omega_2^2$$
$$+16\omega_2^4+16\tau_2^*\omega_2\omega_2^*+8\tau_2\omega_2^{*2}+32\omega_2^2\omega_2^{*2}+16\omega_2^{*4})\big];$$

$$\Lambda_8=\frac{\rho_1\omega_2\omega_2^*}{7}+\frac{1}{7}\left[3(\rho_1-\rho_2)\omega_2^*\omega_2-\frac{\rho_2}{c^2}(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})\right.$$
$$\left.\times(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})+\frac{6}{8}\rho_1\omega_2\omega_2^*-\frac{6}{2R^2}\rho_2\mathfrak{M}\mathfrak{Z}\right];$$

$$S_r=\mathfrak{A}\Lambda_8-\mathscr{B}\Lambda_9;\quad S_i=\mathfrak{A}^*\Lambda_8-\mathfrak{B}^*\Lambda_9;$$

$$\Lambda_9=\frac{\rho_2 2\omega_2\omega_2^*}{7Rk}+\frac{\rho_2}{k}\left[2\omega_2^*\left(\frac{1}{7}\mathfrak{R}-\frac{3}{7R^2}\mathfrak{Z}-\frac{1}{14R}\omega_2\right)\right.$$
$$\left.+2\omega_2\left(\frac{1}{7}\mathfrak{U}-\frac{3}{7R^2}\mathfrak{M}-\frac{1}{14R}\omega_2^*\right)\right];$$

$$T_r=\mathfrak{A}\Lambda_{10}-\mathfrak{B}\Lambda_{11};\quad T_i=\mathfrak{A}^*\Lambda_{10}-\mathfrak{B}^*\Lambda_{11};$$

$$\Lambda_{10}=\frac{\rho_1(2\omega_2^{*2}-2\omega_2^2)}{28}-\frac{3Q^2}{14\pi\varepsilon R^6}+\frac{1}{7}\left[\frac{3}{2}(\rho_1-\rho_2)\right.$$
$$\times(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)+\frac{14Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\gamma\frac{10}{R^3}+\frac{\rho_2}{2c^2}$$
$$\times(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2-\frac{\rho_2}{2c^2}(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2$$
$$\left.+\frac{6}{16}\rho_1(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)-\frac{6}{4R^2}\rho_2(\mathfrak{M}^2-\mathfrak{Z}^2)\right];$$

$$\Lambda_{11}=\frac{2\rho_2(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)}{14Rk}+\frac{\rho_2}{k}\left[2\omega_2^*\left(\frac{1}{7}\mathfrak{U}-\frac{3}{7R^2}\mathfrak{M}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{14R}\omega_2^*\right)-2\omega_2\left(\frac{1}{7}\mathfrak{R}-\frac{3}{7R^2}\mathfrak{Z}-\frac{1}{14R}\omega_2\right)\right];$$

$$Z_r=\mathfrak{A}\Lambda_{12}-\mathfrak{B}\Lambda_{13};\quad Z_i=\mathfrak{A}^*\Lambda_{12}-\mathfrak{B}^*\Lambda_{13};$$

$$\Lambda_{12}=\rho_1\frac{2\omega_2^{*2}}{28}-\frac{3Q^2}{14\pi\varepsilon R^6}+\frac{1}{7}\left[(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^{*2}-\omega_2^2)\right.$$
$$+\frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2)(\omega_2^2+\omega_2^{*2})+\frac{14Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}-\gamma\frac{10}{R^3}+\frac{\rho_2}{2c^2}$$
$$\times(\omega_2\mathfrak{Z}-\omega_2^*\mathfrak{M})^2+\frac{\rho_2}{2c}(\omega_2^*\mathfrak{Z}+\omega_2\mathfrak{M})^2$$
$$\left.+\frac{6}{16}\rho_1(\omega_2^2+\omega_2^{*2})-\frac{6}{4R^2}\rho_2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{Z}^2)\right];$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2\rho_2\omega_2^{*2}}{14Rk}+\frac{2\rho_2\omega_2^*}{k}\left(\frac{1}{7}\mathfrak{U}-\frac{3}{7R^2}\mathfrak{M}-\frac{1}{14R}\omega_2^*\right);$$

$$\mathfrak{A}=(\rho_1\Lambda_{13}+4\rho_2\Lambda_{14})(R\rho_1^2\Lambda_{13}+4R\rho_1\rho_2\Lambda_{14}+4R\rho_2^2\Lambda_{15})^{-1};$$

$$\mathfrak{A}^*=(4k^5R^4\rho_2)(\rho_1^2\Lambda_{13}+4\rho_1\rho_2\Lambda_{14}+4\rho_2^2\Lambda_{15})^{-1};$$

$$\mathfrak{B}=-(2k\rho_1\Lambda_{14}+4k\rho_2\Lambda_{15})(\rho_1^2\Lambda_{13}+4\rho_1\rho_2\Lambda_{14}+4\rho_2^2\Lambda_{15})^{-1};$$

$$\mathfrak{B}^*=(2k^6R^5\rho_1)(\rho_1^2\Lambda_{13}+4\rho_1\rho_2\Lambda_{14}+4\rho_2^2\Lambda_{15})^{-1};$$

$$\Lambda_{13}=(81+9k^2R^2-2k^4R^4+k^6R^6);$$

$$\Lambda_{14}=(27+6k^2R^2+k^4R^4);$$

$$\Lambda_{15}=(9+3k^2R^2+k^4R^4);$$

$$\varkappa_2^{(2)}=\varkappa_2^2$$
$$+\left[1+\left(\frac{N(\omega_2^*\omega_2^2+\omega_2^{*3})+L(3\omega_2^*\omega_2^2+\omega_2^{*3})+2M\omega_2^3}{(\omega_2^3+\omega_2^{*2}\omega_2)N-L(\omega_2^3-\omega_2^{*2}\omega_2)+2M\omega_2^*\omega_2^2}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$\times\left(N-L\,\frac{\omega_2^2-\omega_2^{*2}}{\omega_2^2+\omega_2^{*2}}+M\,\frac{2\omega_2^*\omega_2}{\omega_2^2+\omega_2^{*2}}\right);$$

$$\mathfrak{N}=\frac{G_i\tau_4^*+G_r\tau_4+4G_r\omega_2^{*2}}{\tau_4^{*2}+\tau_4^2+8\tau_4\omega_2^{*2}+16\omega_2^{*4}};$$

$$\mathrm{tg}(\beta_2^{(2)})=\frac{N(\omega_2^*\omega_2^2+\omega_2^{*3})+L(3\omega_2^*\omega_2^2+\omega_2^{*3})+2M\omega_2^3}{(\omega_2^3+\omega_2^{*2}\omega_2)N-L(\omega_2^3-\omega_2^{*2}\omega_2)+2M\omega_2^*\omega_2^2};$$

$$\mathfrak{L}=-\big[-\tau_4^{*3}H_i-\tau_4^*\tau_4^2H_i-\tau_4^{*2}\tau_4H_r-\tau_4^3H_r$$
$$+8\tau_4^*\tau_4H_i\omega_2^2+4\tau_4^{*2}H_r\omega_2^2+12\tau_4^2H_r\omega_2^2$$
$$-16\tau_4^*H_i\omega_2^4-48\tau_4H_r\omega_2^4+64H_r\omega_2^6+8U_r\tau_4^{*2}\omega_2\omega_2^*$$
$$-16U_i\tau_4^*\tau_4\omega_2\omega_2^*-8U_r\tau_4^2\omega_2\omega_2^*+64U_i\tau_4^*\omega_2^3\omega_2^*$$
$$+64U_r\tau_4\omega_2^3\omega_2^*-128U_r\omega_2\omega_2^5\omega_2^*-8\tau_4^*\tau_4H_i\omega_2^{*2}$$
$$-4\tau_4^{*2}H_r\omega_2^{*2}-12\tau_4^2H_r\omega_2^{*2}+96\tau_4^*H_i\omega_2^2\omega_2^{*2}$$
$$+32\tau_4H_r\omega_2^2\omega_2^{*2}+64H_r\omega_2^4\omega_2^{*2}-64U_i\tau_4^*\omega_2\omega_2^{*3}$$
$$-64U_r\tau_4\omega_2\omega_2^{*3}-256U_r\omega_2^3\omega_2^{*3}-16\tau_4^*H_i\omega_2^{*4}$$
$$-48\tau_4H_r\omega_2^{*4}-64H_r\omega_2^2\omega_2^{*4}-128U_r\omega_2\omega_2^{*5}$$
$$-64H_r\omega_2^{*6}\big]\Lambda_{16}^{-1};$$

$$\mathfrak{E} = -\big[-U_i\tau_4^{*3} - U_r\tau_4^{*2}\tau_4 - U_i\tau_4^{*}\tau_4^2 - U_r\tau_4^3 + 4U_r\tau_4^{*2}\omega_2^2$$
$$+ 8U_i\tau_4^{*}\tau_4\omega_2^2 + 12U_r\tau_4^2\omega_2^2 - 16U_i\tau_4^{*}\omega_2^4 - 48U_r\tau_4\omega_2^4$$
$$+ 64U_r\omega_2^6 + 16\tau_4^{*}\tau_4H_i\omega_2\omega_2^{*} - 8\tau_4^{*2}H_r\omega_2\omega_2^{*}$$
$$+ 8\tau_4^2H_r\omega_2\omega_2^{*} - 64\tau_4^{*}H_i\omega_2^3\omega_2^{*} - 64\tau_4H_r\omega_2^3\omega_2^{*}$$
$$+ 128H_r\omega_2^5\omega_2^{*} - 4U_r\tau_4^{*2}\omega_2^{*2} - 8U_i\tau_4^{*}\tau_4\omega_2^{*2}$$
$$- 12U_r\tau_4^2\omega_2^{*2} + 96U_i\tau_4^{*}\omega_2^2\omega_2^{*2} + 32U_r\tau_4\omega_2^2\omega_2^{*2}$$
$$+ 64U_r\omega_2^4\omega_2^{*2} + 64\tau_4^{*}H_i\omega_2\omega_2^{*3} + 64\tau_4H_r\omega_2\omega_2^{*3}$$
$$+ 256H_r\omega_2^3\omega_2^{*3} - 16U_i\tau_4^{*}\omega_2^{*4} - 48U_r\tau_4\omega_2\omega_2^{*4}$$
$$- 64U_r\omega_2^2\omega_2^{*4} + 128H_r\omega_2\omega_2^{*5} - 64U_r\omega_2^{*6}\big]\Lambda_{16}^{-1};$$

$$\Lambda_{16} = \Big[256\omega_2^8 + 256\omega_2^6(-\tau_4 + 4\omega_2^{*2}) + (\tau_4^{*2} + \tau_4^2 + 8\tau_4\omega_2^{*2}$$
$$+ 16\omega_2^{*4})^2 + 32\omega_2^4(\tau_4^{*2} + 3\tau_4^2 - 8\tau_4\omega_2^{*2} + 48\omega_2^{*4})$$
$$+ 16\omega_2^2(-\tau_4^{*2}\tau_4 - \tau_4^3 - 12\tau_4^{*2}\omega_2^{*2} - 4\tau_4^2\omega_2^{*2}$$
$$+ 16\tau_4\omega_2^{*4} + 64\omega_2^{*6})\Big];$$

$$U_r = \mathfrak{R}\Lambda_{17} + \mathfrak{F}\Lambda_{18}; \quad U_i = -\mathfrak{R}^*\Lambda_{17} + \mathfrak{F}^*\Lambda_{18};$$
$$H_r = -\mathfrak{R}\Lambda_{19} + \mathfrak{F}\Lambda_{20};$$
$$H_i = -\mathfrak{R}^*\Lambda_{19} + \mathfrak{F}^*\Lambda_{20};$$

$$\Lambda_{17} = \frac{2\rho_2}{k}\left[\frac{9}{35}\,(\omega_2^*\mathfrak{R} + \omega_2\mathfrak{U}) + \frac{36}{35R^2}\,(\mathfrak{Z}\omega_2^* + \mathfrak{M}\omega_2)\right];$$

$$\Lambda_{18} = \frac{1}{35}\Big[-9(\rho_1 + 3\rho_2)\omega_2\omega_2^* - \frac{9\rho_2}{c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z} - \omega_2^*\mathfrak{M})$$
$$\times (\omega_2^*\mathfrak{Z} + \omega_2\mathfrak{M}) + \frac{36}{R^2}\,\rho_2\mathfrak{M}\mathfrak{Z}\Big];$$

$$\Lambda_{19} = \frac{2\rho_2}{k}\left[\frac{9}{35}\,(\omega_2^*\mathfrak{U} - \omega_2\mathfrak{R}) + \frac{36}{35R^2}\,(\omega_2^*\mathfrak{M} - \omega_2\mathfrak{Z})\right];$$

$$\Lambda_{20} = \frac{1}{35}\Big[\frac{9}{2}\,(\rho_1 + 3\rho_2)(\omega_2^2 - \omega_2^{*2}) + \frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}$$
$$- \frac{90\gamma}{R^3} + \frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z} - \omega_2^*\mathfrak{M})^2 - \frac{9\rho_2}{2c^2}$$
$$\times (\omega_2^*\mathfrak{Z} + \omega_2\mathfrak{M})^2 + \frac{18}{R^2}\,\rho(\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{Z}^2)\Big];$$

$$G_r = -\mathfrak{R}\Lambda_{21} + \mathfrak{F}\Lambda_{22};$$

$$G_i = -\mathfrak{R}^*\Lambda_{21} + \mathfrak{F}^*\Lambda_{22}; \quad \Lambda_{21} = \frac{2\rho_2}{k}\,\omega_2\left(\frac{9}{35}\,\mathfrak{U} + \frac{36}{35R^2}\,\mathfrak{M}\right);$$

$$\Lambda_{22} = \frac{1}{35}\Big[-\frac{9}{2}\,\rho_1(2\omega_2^2 + \omega_2^{*2}) - \frac{9}{2}\,\rho_2(3\omega_2^{*2} - \omega_2^2)$$
$$+ \frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} - \frac{90\gamma}{R^3} + \frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2\mathfrak{Z} - \omega_2^*\mathfrak{M})^2$$
$$+ \frac{9\rho_2}{2c^2}\,(\omega_2^*\mathfrak{Z} + \omega_2\mathfrak{M})^2 + \frac{18}{R^2}\,\rho_2(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{Z}^2)\Big];$$

$$\mathfrak{F} = (4\Lambda_{23}\rho_1 + 16\Lambda_{24}\rho_2)$$
$$\times (\Lambda_{23}R\rho_1^2 + \Lambda_{24}8R\rho_1\rho_2 + \Lambda_{25}16R\rho_2^2)^{-1};$$

$$\mathfrak{F}^* = (16k^9R^8\rho_2)(\Lambda_{23}\rho_1^2 + \Lambda_{24}8\rho_1\rho_2 + \Lambda_{25}16\rho_2^2)^{-1};$$

$$\mathfrak{R} = -(4k\rho_1\Lambda_{24} + 16k\rho_2\lambda_{25})$$
$$\times (\Lambda_{23}\rho_1^2 + \Lambda_{24}8\rho_1\rho_2 + \Lambda_{25}16\rho_2^2)^{-1};$$

$$\mathfrak{R}^* = (4k^{10}R^9\rho_1)(\Lambda_{23}\rho_1^2 + \Lambda_{24}8\rho_1\rho_2 + \Lambda_{25}16\rho_2^2)^{-1};$$

$$\tau_4 = \frac{18\gamma(1 - W_4)}{R^3}\big[(1102500k^2R^2 + 94500k^4R^4$$
$$+ 3600k^6R^6 - 20k^8R^8 - 36k^{10}R^{10} + 4k^{12}R^{12})\rho_1$$
$$+ (882000k^2R^2 + 100800k^4R^4 + 6480k^6R^6$$
$$+ 320k^8R^8 + 16k^{10}R^{10})\rho_2\big]$$
$$\times \left(\Lambda_{23}k^2R^2\rho_1^2 + \Lambda_{26}\rho_1\rho_2 + \Lambda_{27}\rho_2^2\right)^{-1};$$

$$\tau_4^* = \frac{18\gamma(1 - W_4)}{R^3}\,(16k^{11}R^{11}\rho_2)$$
$$\times (\Lambda_{23}k^2R^2\rho_1^2 + \Lambda_{26}\rho_1\rho_2 + \Lambda_{27}\rho_2^2)^{-1};$$

$$\Lambda_{23} = (275625 + 23625k^2R^2 + 900k^4R^4$$
$$- 5k^6R^6 - 9k^8R^8 + k^{10}R^{10});$$

$$\Lambda_{24} = (55125 + 6300k^2R^2 + 405k^4R^4 + 20k^6R^6 + k^8R^8);$$

$$\Lambda_{25} = (11025 + 1575k^2R^2 + 135k^4R^4 + 10k^6R^6 + k^8R^8);$$

$$\Lambda_{26} = (441000k^2R^2 + 50400k^4R^4$$
$$+ 3240k^6R^6 + 160k^8R^8 + 8k^{10}R^{10});$$

$$\Lambda_{27} = (176400k^2R^2 + 25200k^4R^4$$
$$+ 2160k^6R^6 + 160k^8R^8 + 16k^{10}R^{10});$$

$$\varkappa_4^{(2)} = \varkappa_2^2\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\beta_4^{(2)})}\left[\mathfrak{N} - \mathfrak{L}\,\frac{\omega_2^2 - \omega_2^{*2}}{\omega_2^2 + \omega_2^{*2}} + \mathfrak{E}\,\frac{2\omega_2^*\omega_2}{\omega_2^2 + \omega_2^{*2}}\right];$$

$$\mathrm{tg}(\beta_4^{(2)}) = \big[\mathfrak{N}(\omega_4^*\omega_2^2 + \omega_4^*\omega_2^{*2} - 2\omega_2^*\omega_2^2 - 2\omega_2^{*3})$$
$$+ \mathfrak{L}(-2\omega_2^*\omega_2^2 - \omega_4^*\omega_2^2 - 2\omega_2^{*3} + \omega_4^*\omega_2^{*2})$$
$$+ \mathfrak{E}(-2\omega_2^3 - 2\omega_2\omega_2^{*2} + 2\omega_4^*\omega_2^*\omega_2)\big]$$
$$\times \big[-\mathfrak{N}(\omega_4\omega_2^2 + \omega_4\omega_2^{*2}) + \mathfrak{L}(\omega_4\omega_2^2 - \omega_4\omega_2^{*2})$$
$$- 2\mathfrak{E}\omega_4\omega_2^*\omega_2\big]^{-1}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[2] *Григорьев А.И., Гаибов А.Р.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 6–11.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Гаибов А.Р., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 21. Вып. 22. С. 7–13.
[4] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
[5] *Won-Kyu Rhim, Song Kun Chung, Hyson M.T.* et al. // IEEE Transaction on Industry Applications. 1987. Vol. IA-23. N 6. P. 975–979.
[6] *Шагапов В.Ш.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 506–512.
[7] *Trinh E.H., Holt R.G., Thiessen D.B.* // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. № 1. P. 43–61.
[8] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
[10] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
[11] *Лепендин Л.Ф.* Акустика М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
[12] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[13] Hendricks C.D., Schneider J.M. // Amer. Phys. 1963. Vol. 1. N 6. P. 450–453.