

01;03

О нелинейных осцилляциях заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде одномодового начального возбуждения

© А.Н. Жаров, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 6 декабря 2002 г.)

В третьем порядке приближений по амплитуде начального возмущения исследованы нелинейные осесимметричные движения свободной поверхности заряженной капли идеальной жидкости при одномодовой начальной деформации ее равновесной формы. Получено аналитическое выражение для образующей формы капли. Впервые найдены нелинейные поправки к частотам осцилляций для начального возмущения произвольной моды. Исследовано влияние нелинейности осцилляций на условия реализации неустойчивости по отношению к собственному заряду капли.

1. Задача об исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли представляет значительный интерес для различных разделов технической физики, научного приборостроения, геофизики и химической технологии (см., например, [1]) и указанную там литературу). В этой связи в последние два десятилетия она неоднократно решалась как теоретически, так и экспериментально в постановках различной строгости [2–10].

Наиболее ранние исследования, касающиеся теоретического описания нелинейной динамики поверхности заряженной капли, были выполнены в [2], где авторы получили выражения для образующей поверхности капли при осесимметричных колебаниях формы, а также выражения для поправок к частотам капиллярных колебаний поверхности капли в трех частных случаях, когда начальное возмущение поверхности содержит только одну моду: вторую, третью, или четвертую.

Экспериментальное исследование нелинейной динамики заряженной поверхности свободной капли было проведено в [3], где в условиях микрогравитации удалось выделить сдвиг частот, обусловленный нелинейностью. Авторы [3] указывают на хорошее согласие между полученным ими сдвигом частот для случая не очень больших амплитуд и малых вязкостей жидкости капли и значениями, рассчитанными в [2].

Предпринятые попытки численного анализа обсуждаемого феномена [9,10] указали на весьма высокую степень нелинейности процессов, происходящих при формировании поверхности осциллирующей заряженной капли.

Основные идеи, высказанные в [2], получили дальнейшее развитие в работах [4,5], где проводилось аналитическое исследование динамики поверхности жидкой капли во втором порядке малости по величине начального возмущения поверхности для случая начального возмущения, описываемого произвольной модой порядка m . В [4,5] показано, что колебания поверхности капли происходят не в окрестности сферы, а в окрестности фигуры, напоминающей сфероид вращения, и нели-

нейное взаимодействие мод в задаче второго порядка малости приводит к возбуждению всех четных мод из диапазона $[0; 2m]$.

Обобщением работ [2,4,5] являются работы [6–8], где анализируется нелинейная динамика поверхности жидкой капли во втором порядке малости по величине начального возмущения в случае, когда начальное возмущение поверхности представлено в виде суперпозиции нескольких мод. Выяснилось, что взаимодействие мод приводит к внутренним нелинейным резонансам и может стать причиной потери капель устойчивости [6]; начальное возбуждение двух соседних мод приводит к возбуждению первой (трансляционной) моды [7,8], что превращает нелинейную осциллирующую каплю в источник дипольного электромагнитного и акустического излучения.

Тем не менее очевидно, что нелинейная динамика свободной поверхности заряженной капли нуждается в дальнейшем теоретическом исследовании. Например, поскольку в работах [4–8] аналитические расчеты для произвольной формы начального возмущения выполнены только во втором порядке малости по величине его амплитуды, то за рамками исследования остался вопрос о виде нелинейных поправок к частотам осцилляций поверхности капли.

В связи с вышесказанным представляет интерес рассмотреть нелинейную динамику поверхности заряженной капли в третьем порядке малости по величине начального возмущения, пропорционального полиному Лежандра порядка m .

2. Рассмотрим осцилляции в вакууме капли радиуса R идеальной идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , несущей заряд Q . Движение жидкости в капле примем потенциальным с потенциалом скорости ψ . Потенциал электрического поля в окрестности капли обозначим ϕ . Форму капли будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Решение задачи проведем в сферической системе коор-

динат (r, ϑ, φ) , связанной с центром масс капли. Уравнение поверхности капли в безразмерных переменных, в которых $\rho = 1, R = 1, \sigma = 1$, запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0. \quad (1)$$

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных капиллярных колебаний поверхности заряженной капли содержит [8,11,12] уравнения Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля

$$\Delta\psi = 0; \quad \Delta\phi = 0; \quad (2)$$

условия ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad \psi \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi \rightarrow 0, \quad (4)$$

кинематическое и динамическое граничные условия

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \frac{dF}{dt} = 0; \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \partial_t\psi + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 = p + p_q - p_{am} - p_\sigma; \quad (6)$$

условие неизменности объема капли

$$\int_V r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3}; \quad (7)$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \leq r \leq 1 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

условие неподвижности центра масс

$$\int_V \mathbf{r} r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0; \quad (8)$$

условие постоянства полного заряда

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \int_V \mathbf{n} \cdot \nabla\phi dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = 1 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \quad (9)$$

условие постоянства электрического потенциала вдоль поверхности

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \phi = \phi_S(t); \quad (10)$$

начальные условия

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \xi_1 P_1(\cos\vartheta) + \varepsilon P_m(\cos\vartheta); \\ \partial_t \xi = 0. \quad (11)$$

В выражениях (2)–(11) p, p_q, p_{am}, p_σ — давления: гидродинамическое, электрического поля, атмосферное и капиллярное; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности капли; ϕ_S — электрический потенциал поверхности капли; ε — малый параметр, характеризующий величину

начальной деформации; $P_m(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра; ξ_0, ξ_1 — величины, определенные так, чтобы интегральные условия (7) и (8) выполнялись в начальный момент времени; символ ∂_t означает частную производную по переменной t .

3. Для решения задачи (1)–(11) применим метод многих масштабов [13]. Для этого введем три различных временных масштаба $T_k = \varepsilon^k t$; $k = 0, 1, 2$, а искомые величины задачи представим в виде разложений

$$\phi = \phi^{(0)} + \varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \varepsilon^3\phi^{(3)} + O(\varepsilon^4); \quad (12)$$

$$\phi_S = \phi_S^{(0)} + \varepsilon\phi_S^{(1)} + \varepsilon^2\phi_S^{(2)} + \varepsilon^3\phi_S^{(3)} + O(\varepsilon^4); \quad (13)$$

$$\psi = \varepsilon\psi^{(1)} + \varepsilon^2\psi^{(2)} + \varepsilon^3\psi^{(3)} + O(\varepsilon^4); \quad (14)$$

$$\xi = \varepsilon\xi^{(1)} + \varepsilon^2\xi^{(2)} + \varepsilon^3\xi^{(3)} + O(\varepsilon^4), \quad (15)$$

где $\phi^{(0)} = Q/r, \phi_S^{(0)} = Q$ — решения нулевого порядка малости, т. е. для равновесной сферической поверхности капли.

Подставляя (12)–(15) в (1)–(11), получим задачи различных порядков малости. Задача первого порядка малости будет иметь вид

$$\Delta\psi^{(1)} = 0; \quad \Delta\phi^{(1)} = 0; \quad (16)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi^{(1)} \rightarrow 0; \quad (17)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi^{(1)} \rightarrow 0; \quad (18)$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(1)}; \quad (19)$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\psi^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \partial_r\phi^{(0)} \left(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)} \right) \\ + 2\xi^{(1)} + \Delta_\Omega\xi^{(1)}; \quad (20)$$

$$\int_{-1}^1 \xi^{(1)} d(\cos\vartheta) = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi^{(1)} P_1 d(\cos\vartheta) = 0; \quad (21)$$

$$r = 1: \quad \int_{-1}^1 \left\{ \partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)} \left(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)} \right) \right\} d(\cos\vartheta) = 0; \quad (22)$$

$$r = 1: \quad \phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t); \quad (23)$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = P_m(\cos\vartheta); \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = 0. \quad (24)$$

Во втором порядке малости получим краевую задачу вида

$$\Delta\psi^{(2)} = 0; \quad \Delta\phi^{(2)} = 0; \quad (25)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi^{(2)} \rightarrow 0; \quad (26)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi^{(2)} \rightarrow 0; \quad (27)$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)} \\ - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \partial_{T_0} \psi^{(2)} + \partial_{T_1} \psi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_{rT_0} \psi^{(1)} + \frac{1}{2} (\partial_r \psi^{(1)})^2 \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\vartheta \psi^{(1)})^2 = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2\xi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rr} \phi^{(0)} \right. \\
& + (\xi^{(1)})^2 ((\partial_{rr} \phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(0)}) \\
& + (\partial_\vartheta \phi^{(1)})^2 + (\partial_r \phi^{(1)})^2 + 2\partial_r \phi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} \\
& \left. + 2\xi^{(1)} (\partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(1)} + \partial_{rr} \phi^{(1)} \partial_r \phi^{(0)}) \right\} \\
& + 2\xi^{(2)} + \Delta_\Omega \xi^{(2)} - 2(\xi^{(1)})^2 - 2\xi^{(1)} \Delta_\Omega \xi^{(1)}; \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2) d(\cos \vartheta) = 0; \quad (30)$$

$$\int_{-1}^1 (2\xi^{(2)} + 3(\xi^{(1)})^2) P_1 d(\cos \vartheta) = 0; \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \int_{-1}^1 \left\{ \partial_r \phi^{(2)} + \xi^{(1)} (\partial_{rr} \phi^{(1)} + 2\partial_r \phi^{(1)}) \right. \\
& + \xi^{(2)} (\partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) \\
& + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{rrr} \phi^{(0)} + 2\partial_{rr} \phi^{(0)} + \partial_r \phi^{(0)} \right) \\
& \left. - \partial_\vartheta \xi^{(1)} \partial_\vartheta \phi^{(1)} \right\} d(\cos \vartheta) = 0; \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \phi^{(2)} + \xi^{(1)} \partial_r \phi^{(1)} + \xi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} \\
& + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{rr} \phi^{(0)} = \phi_S^{(2)}(t); \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = 0 : \quad & \xi^{(2)} = -\frac{1}{2m+1} P_0(\cos \vartheta); \\
& \partial_{T_0} \xi^{(2)} + \partial_{T_1} \xi^{(1)} = 0. \quad (34)
\end{aligned}$$

В третьем порядке малости получим задачу (см. Приложения А и В)

$$\Delta \psi^{(3)} = 0; \quad \Delta \phi^{(3)} = 0; \quad (35)$$

$$r \rightarrow 0 : \quad \psi^{(3)} \rightarrow 0; \quad (36)$$

$$r \rightarrow +\infty : \quad \nabla \phi^{(3)} \rightarrow 0; \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \partial_{T_0} \xi^{(3)} + \partial_{T_1} \xi^{(2)} + \partial_{T_2} \xi^{(1)} = \partial_r \psi^{(3)} \\
& - \partial_\vartheta \xi^{(2)} \partial_\vartheta \psi^{(1)} - \partial_\vartheta \xi^{(1)} \partial_\vartheta \psi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_{rr} \psi^{(1)} \\
& + \xi^{(1)} (\partial_\vartheta \xi^{(1)} (2\partial_\vartheta \psi^{(1)} - \partial_{r\vartheta} \psi^{(1)}) + \partial_{rr} \psi^{(2)}) \\
& + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{rrr} \psi^{(1)}; \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \partial_{T_0} \psi^{(3)} + \partial_{T_2} \psi^{(1)} + \partial_{T_1} \psi^{(2)} + \xi^{(1)} \partial_{rT_1} \psi^{(1)} \\
& + \partial_\vartheta \psi^{(1)} \partial_\vartheta \psi^{(2)} + \partial_r \psi^{(1)} \partial_r \psi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_{rT_0} \psi^{(1)} \\
& + \xi^{(1)} (\partial_{rT_0} \psi^{(2)} + \partial_\vartheta \psi^{(1)} (\partial_{r\vartheta} \psi^{(1)} - \partial_\vartheta \psi^{(1)})) \\
& + \partial_r \psi^{(1)} \partial_{rr} \psi^{(1)} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{rrT_0} \psi^{(1)} \\
& = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2\xi^{(3)} \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rr} \phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^3 (\partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_{rrr} \phi^{(0)} \right. \\
& + \frac{1}{3} \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rrrr} \phi^{(0)}) + 2(\partial_\vartheta \phi^{(1)} \partial_\vartheta \phi^{(2)} + \partial_r \phi^{(1)} \\
& \times (\xi^{(2)} \partial_{rr} \phi^{(0)} + \partial_r \phi^{(2)}) + \partial_r \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(3)} + \xi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rr} \phi^{(1)}) \\
& + 2\xi^{(1)} (\xi^{(2)} ((\partial_{rr} \phi^{(0)})^2 + \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rrr} \phi^{(0)}) \\
& + \partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(2)} + \partial_\vartheta \phi^{(1)} (\partial_{r\vartheta} \phi^{(1)} - \partial_\vartheta \phi^{(1)})) \\
& + \partial_r \phi^{(1)} \partial_{rr} \phi^{(1)} + \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rr} \phi^{(2)}) + (\xi^{(1)})^2 \\
& \left. \times (\partial_{rrr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(1)} + 2\partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_{rr} \phi^{(1)} + \partial_r \phi^{(0)} \partial_{rrr} \phi^{(1)}) \right\} \\
& + (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(3)} + 2\xi^{(1)} ((\xi^{(1)})^2 - (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)}) \\
& - 2\xi^{(2)} \Delta_\Omega \xi^{(1)} + 3(\xi^{(1)})^2 \Delta_\Omega \xi^{(1)} - (\partial_\vartheta \xi^{(1)})^2 \partial_\vartheta \psi^{(1)} \\
& - \frac{1}{2} (\partial_\vartheta \xi^{(1)})^2 \Delta_\Omega \xi^{(1)}; \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (3\xi^{(3)} + 6\xi^{(1)} \xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^3) d(\cos \vartheta) = 0; \quad (40)$$

$$\int_{-1}^1 (\xi^{(3)} + 3\xi^{(1)} \xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^3) P_1(\cos \vartheta) d(\cos \vartheta) = 0; \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
r = 1 : \quad & \int_{-1}^1 \left\{ \partial_r \phi^{(3)} + \xi^{(3)} (\partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) \right. \\
& + \xi^{(2)} (\partial_{rr} \phi^{(1)} + 2\partial_r \phi^{(1)}) \\
& + (\xi^{(1)})^3 \left(\frac{1}{6} \partial_{rrrr} \phi^{(0)} + \partial_{rrr} \phi^{(0)} + \partial_{rr} \phi^{(0)} \right) \\
& + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{rrr} \phi^{(1)} + 2\partial_{rr} \phi^{(1)} + \partial_r \phi^{(1)} \right) \\
& + \xi^{(1)} (\xi^{(2)} (\partial_{rrr} \phi^{(0)} + 4\partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) \\
& + 2\partial_r \phi^{(2)} + \partial_{rr} \phi^{(2)} - \partial_\vartheta \xi^{(1)} \partial_{r\vartheta} \phi^{(1)}) \\
& \left. - \partial_\vartheta \xi^{(2)} \partial_\vartheta \phi^{(1)} - \partial_\vartheta \xi^{(1)} \partial_\vartheta \phi^{(2)} \right\} d(\cos \vartheta) = 0; \quad (42)
\end{aligned}$$

$$r = 1: \quad \phi^{(3)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)} + \frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + \frac{1}{6}(\xi^{(1)})^3\partial_{rrr}\phi^{(0)} = \phi_S^{(3)}(t); \quad (43)$$

$$t = 0: \quad \xi^{(3)} = -\frac{K_{mmm}}{3(2m+1)}P_0(\cos\vartheta) - \sum_{g=0}^{\infty} K_{mmg}K_{gm1}P_1(\cos\vartheta);$$

$$t = 0: \quad \partial_{T_0}\xi^{(3)} + \partial_{T_1}\xi^{(2)} + \partial_{T_2}\xi^{(1)} = 0, \quad (44)$$

где $K_{mln} = (C_{m0l0}^{n0})^2$, а C_{m0l0}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана [14].

4. Решения уравнений Лапласа для потенциалов поля скоростей и электрического поля (16), (25), (35), удовлетворяющие условиям ограниченности (17), (18), (26), (27), (36), (37), запишем в виде

$$\psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n D_n^{(k)}(t) P_n(\cos\vartheta); \quad k = 1, 2, 3; \quad (45)$$

$$\phi^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(k)}(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta); \quad k = 1, 2, 3. \quad (46)$$

Заметим, что в уравнении (45) суммирование начинается с $n = 1$, поскольку, как известно, потенциал определяется с точностью до произвольной функции времени, что позволяет принять $D_0^{(k)} = 0$.

Функцию, описывающую отклонение формы поверхности капли от сферической, представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)}(t) P_n(\cos\vartheta); \quad k = 1, 2, 3. \quad (47)$$

Подставляя разложения (45)–(47) в системы (19)–(24), (28)–(34) и (38)–(44), найдем выражения для коэффициентов разложений (45)–(47).

Решение задачи 1-го порядка малости (16)–(24) позволяет определить зависимость коэффициентов 1-го порядка $M_n^{(1)}(t)$, $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$ от быстрого временного масштаба $T_0 = t$

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nm} \cos(\omega_m T_0); \quad (48)$$

$$D_n^{(1)} = \frac{1}{n} \partial_{T_0} M_n^{(1)}; \quad F_n^{(1)} = Q M_n^{(1)}. \quad (49)$$

В (48) m — номер изначально возбужденной моды, $\omega_n = \sqrt{n(n-1)(n+2-W)}$ — частота n -й моды капиллярных колебаний капли, $W = Q^2/(4\pi)$ — параметр Рэлея.

Анализ задачи (16)–(34) позволяет выяснить зависимость коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$, $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$ от времени $T_1 = \varepsilon t$ и коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$, $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$ от времени $T_0 = t$.

Оказалось, что функции $M_n^{(1)}(t)$, $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$ не зависят от временного масштаба T_1 , и выражения (48)–(49) для них остаются справедливыми и во втором порядке малости, а коэффициенты $M_n^{(2)}(t)$, $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$ имеют вид

$$M_0^{(2)} = -\frac{1}{2m+1} \cos^2(\omega_m T_0); \quad M_1^{(2)} = 0;$$

$$M_n^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\lambda_{mmm}^{(+)} \cos(2\omega_m T_0) + \lambda_{mmm}^{(-)} - (\lambda_{mmm}^{(+)} + \lambda_{mmm}^{(-)}) \cos(\omega_n T_0) \right]; \quad n \geq 2; \quad (50)$$

$$F_0^{(2)} = 0; \quad F_n^{(2)} = Q M_n^{(2)} + Q m K_{mmm} \cos^2(\omega_m T_0); \quad n \geq 1;$$

$$D_n^{(2)} = \frac{1}{n} \left(\partial_{T_0} M_n^{(2)} + (m(m-1)K_{mmm} - \alpha_{mmm}) \times \frac{\omega_m}{m} \sin(\omega_m T_0) \cos(\omega_m T_0) \right); \quad n \geq 1, \quad (51)$$

где

$$\lambda_{mln}^{(\pm)} = (\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}) / (\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2);$$

$$\alpha_{mln} = -C_{m0l0}^{n0} C_{m(-)l1}^{n0} \sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$\gamma_{mln} = K_{mln} \left[\omega_m^2 (n-m+1) + 2n(l(l+1)-1) + (l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)nW/2 \right] + \alpha_{mln} \left[\omega_m^2/m + nW/2 \right];$$

$$\eta_{mln} = K_{mln} (n/2 - m + 1) + \alpha_{mln} (1 + n/(2l))/m.$$

Исследование задачи (16)–(44) в третьем порядке малости дает возможность выявить зависимость коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$, $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$ от времени $T_2 = \varepsilon^2 t$, коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$, $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$ от времени $T_1 = \varepsilon t$ и коэффициентов $M_n^{(3)}(t)$, $D_n^{(3)}(t)$, $F_n^{(3)}(t)$ от времени $T_0 = t$. Оказалось, что коэффициенты $M_n^{(2)}(t)$, $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$ не зависят от временного масштаба T_1 , и выражения (50), (51) для них сохраняют свою справедливость.

Изменение коэффициентов $M_n^{(1)}$ во времени характеризуется уже двумя временными масштабами T_0 и T_2

$$M_n^{(1)} = \delta_{mn} \cos(\omega_n T_0 + b_n T_2); \quad (52)$$

где

$$b_n = \frac{1}{8\omega_n} \left\{ \frac{1}{(2n+1)} \left(2(n-1)\omega_n^2 + 3\varepsilon_n \right) - \left[H_{mmm}^{1(-)(+)} + H_{mmm}^{2(-)(-)} + H_{mmm}^{2(+)(+)} \right] \right\}. \quad (53)$$

Коэффициенты $H_{nmn}^{1(-)(+)}$, $H_{nmn}^{2(-)(-)}$, $H_{nmn}^{2(+)(+)}$, Ξ_n определены в Приложении С.

Соответствующие выражения для $D_n^{(1)}$ и $F_n^{(1)}$ могут быть получены по формулам (49), а коэффициенты $M_n^{(3)}(t)$, $D_n^{(3)}(t)$ и $F_n^{(3)}(t)$ имеют вид

$$M_0^{(3)} = -\frac{2}{2m+1} M_m^{(2)} \cos(\omega_m T_0) - \frac{K_{mnm}}{3(2m+1)} \cos^3(\omega_m T_0);$$

$$M_1^{(3)} = -3 \sum_{k=0}^{\infty} K_{km1} M_k^{(2)} \cos(\omega_m T_0) - \sum_{g=0}^{\infty} K_{mng} K_{gm1} \cos^3(\omega_m T_0);$$

$$M_n^{(3)} = -\frac{\delta_{nm}}{32\omega_m^2(2m+1)} (2(m-1)\omega_m^2 - \Xi_m) \times (\cos(3\omega_m T_0) - \cos(\omega_m T_0)) - \sum_{g=2}^{\infty} \frac{H_{mgn}^{0(+)}}{4(\omega_n^2 - (\omega_m + \omega_g)^2)} \times (\cos((\omega_m + \omega_g)T_0) - \cos(\omega_n T_0)) - \sum_{g=2}^{\infty} \frac{H_{mgn}^{0(-)}}{4(\omega_n^2 - (\omega_m - \omega_g)^2)} \times (\cos((\omega_m - \omega_g)T_0) - \cos(\omega_n T_0)) + \frac{1}{4} \frac{H_{mnmn}^{1(+)(-)}}{\omega_n^2 - 9\omega_m^2} (\cos(3\omega_m T_0) - \cos(\omega_n T_0)) + \frac{1 - \delta_{mn}}{4(\omega_n^2 - \omega_m^2)} (H_{mnmn}^{1(-)(+)} + H_{mnmn}^{2(+)(+)} + H_{mnmn}^{2(-)(-)}) \times (\cos(\omega_m T_0) - \cos(\omega_n T_0)); \quad n \geq 2 \quad (54)$$

$$F_0^{(3)} = Q \frac{m+1}{2m+1} \times \left(\alpha_{mnm} - \frac{m(m+1)}{2} K_{mnm} \right) \cos^3(\omega_m T_0); \quad (55)$$

$$F_n^{(3)} = Q M_n^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) K_{kmn} F_k^{(2)} \cos(\omega_m T_0) + Q \sum_{k=0}^{\infty} (m-1) K_{mkn} M_k^{(2)} \cos(\omega_m T_0) - Q \sum_{g=0}^{\infty} \frac{m(m+3)}{2} K_{mng} K_{gm1} \cos^3(\omega_m T_0); \quad n \geq 1;$$

$$D_n^{(3)} = \frac{1}{n} \partial_{T_0} M_n^{(3)} - \frac{1 - \delta_{n1}}{n} \delta_{mn} b_m \sin(\omega_m T_0) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) K_{kmn} - \alpha_{kmn}) D_k^{(2)} \cos(\omega_m T_0) + \frac{\omega_m}{mn} \sum_{k=0}^{\infty} (m(m-1) K_{mkn} - \alpha_{mkn}) M_k^{(2)} \sin(\omega_m T_0) + \frac{\omega_m}{mn} \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2} K_{mng} - (m-2) \alpha_{mng} \right) \times K_{gm1} \sin(\omega_m T_0) \cos^2(\omega_m T_0); \quad n \geq 1.$$

Подставляя выражения (15) и (47) в (1) запишем выражение для образующей формы нелинейно осциллирующей капли

$$r(\vartheta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\cos \vartheta) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (M_n^{(2)}(t) + \varepsilon M_n^{(3)}(t)) P_n(\cos \vartheta), \quad (56)$$

где коэффициенты $M_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ определяются выражениями (50), (52), (54).

5. Если в (56) положить $t = 0$, то получим выражение для формы поверхности в начальный момент времени (см. (11)) с поправками ξ_0 и ξ_1 , следующими из условий неизменности объема капли (7) и неподвижности ее центра масс (8),

$$r(\vartheta) = 1 + \varepsilon P_m(\cos \vartheta) - \frac{\varepsilon^2}{2m+1} - \varepsilon^3 \left(\frac{K_{mnm}}{3(2m+1)} P_0(\cos \vartheta) + P_1(\cos \vartheta) \sum_{g=m-1}^{m+1} K_{mng} K_{gm1} \right). \quad (57)$$

Из выражения (57) видно, что в начальный момент времени в капле генерируются поправки к нулевой моде второго и третьего порядков малости, препятствующие изменению объема капли. Кроме того, из требования неподвижности центра масс появляется поправка третьего порядка малости к первой (трансляционной) моде, в то время как в задаче второго порядка малости такой поправки не возникало [5].

Для начального возбуждения второй, третьей и четвертой мод ($m = 2, 3, 4$) (именно такая ситуация была проанализирована в [2]) выражение (57) принимает вид

$$r(\vartheta) = 1 + \varepsilon P_2(\cos \vartheta) - \frac{1}{5} \varepsilon^2 - \frac{2}{105} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad \text{при } m = 2;$$

$$r(\vartheta) = 1 + \varepsilon P_3(\cos \vartheta) - \frac{1}{7} \varepsilon^2 - \frac{36}{385} \varepsilon^3 P_1(\cos \vartheta) + O(\varepsilon^4) \quad \text{при } m = 3;$$

$$r(\vartheta) = 1 + \varepsilon P_4(\cos \vartheta) - \frac{1}{9} \varepsilon^2 - \frac{6}{1001} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad \text{при } m = 4. \quad (58)$$

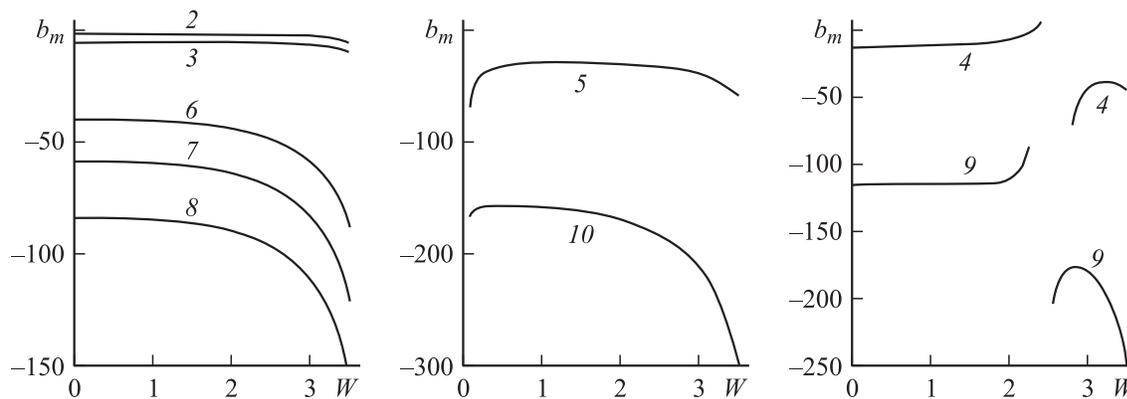


Рис. 1. Зависимости коэффициента b_m от параметра Рэлея $W = Q^2/4\pi$. Номер кривой совпадает с номером изначально возбужденной моды.

Несложно видеть, что, согласно (57), (58), поправки третьего порядка малости к начальным условиям различны для четных и нечетных мод: при начальном возбуждении четных мод поправка третьего порядка малости формируется на основе условия сохранения объема и дает вклад в ξ_0 ; начальное возбуждение нечетной моды, не сказываясь в третьем порядке малости на величине моды с $n = 0$, из условия неподвижности центра масс дает поправку третьего порядка малости к первой (трансляционной) моде $n = 1$. Отметим, что в [2], где впервые были рассчитаны поправки к нулевой моде, в постановке задачи не учитывалось условие неподвижности центра масс, поэтому поправка к трансляционной моде найдена не была.

Из выражений (52), (53) видно, что учет величин третьего порядка малости позволяет определить поправку к частоте m -й моды $\varepsilon^2 b_m$, зависящую от величины заряда капли (рис. 1). Отметим, что найденное общее выражение для поправки к частоте в частных случаях начального возбуждения только второй, третьей и четвертой мод ($m = 2, 3, 4$) совпадает с результатами, приведенными в [2] (с точностью до опечаток). Наблюдаемые для зависимостей $b_4(W)$ и $b_9(W)$ ($W = Q^2/4\pi$) разрывы связаны с наличием внутренних нелинейных вырожденных резонансов, когда при некоторых значениях параметра W , меньших рэлеевского предела устойчивости, выполняются соотношения $2\omega_4 = \omega_6$ и $2\omega_9 = \omega_{14}$. При значениях W в окрестности резонансов выражения (53) становятся непригодными, поскольку резонансные ситуации требуют отдельного анализа (см., например, [15]).

Наличие поправок к частотам приводит к изменению критических условий реализации неустойчивости m -й моды капиллярных колебаний по отношению к собственному заряду капли. По мере увеличения заряда квадрат частоты уменьшается и при некотором критическом (для данной моды) значении обращается в нуль. Дальнейшее увеличение заряда приводит к тому, что частота становится мнимой, а это соответствует экспоненциальному нарастанию со временем амплитуды m -й моды, т.е. к ее неустойчивости [16]. Критическое

условие реализации неустойчивости m -й моды с учетом нелинейной поправки можно записать в виде

$$(\omega_m + \varepsilon^2 b_m)^2 \cong \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 \omega_m b_m + O(\varepsilon^4) = 0.$$

Устойчивость капли как целого определяется критическими условиями реализации неустойчивости наиболее легко возбуждаемой моды, каковой является основная мода ($m = 2$). На рис. 2 приведены зависимости от параметра W (характеризующего величину заряда капли) квадрата частоты основной моды с учетом полученных поправок (кривая 1) и без их учета (кривая 2). Хорошо видна тенденция к снижению критического значения параметра W . Так, при амплитуде начального возмущения основной моды $\varepsilon = 0.1$ численные оценки приводят к критическому значению $W_{cr} = 3.85$, а при $\varepsilon = 0.3$ — $W_{cr} = 3.54$ (напомним, что рэлеевский предел устойчивости капли соответствует значению $W_{cr} = 4$ [17]). Однако полученные численные оценки являются качественными, поскольку в области значений параметра W , близких к W_{cr} , величина малой поправки $\varepsilon^2 b_m$ становится сравнимой с величиной

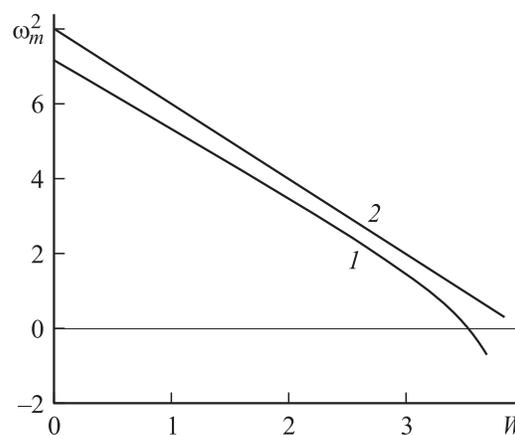


Рис. 2. Зависимости квадрата частоты основной моды $m = 2$ от параметра Рэлея: 1 — с учетом поправки $\varepsilon^2 b_m$ для $\varepsilon = 0.3$, 2 — без учета поправки.

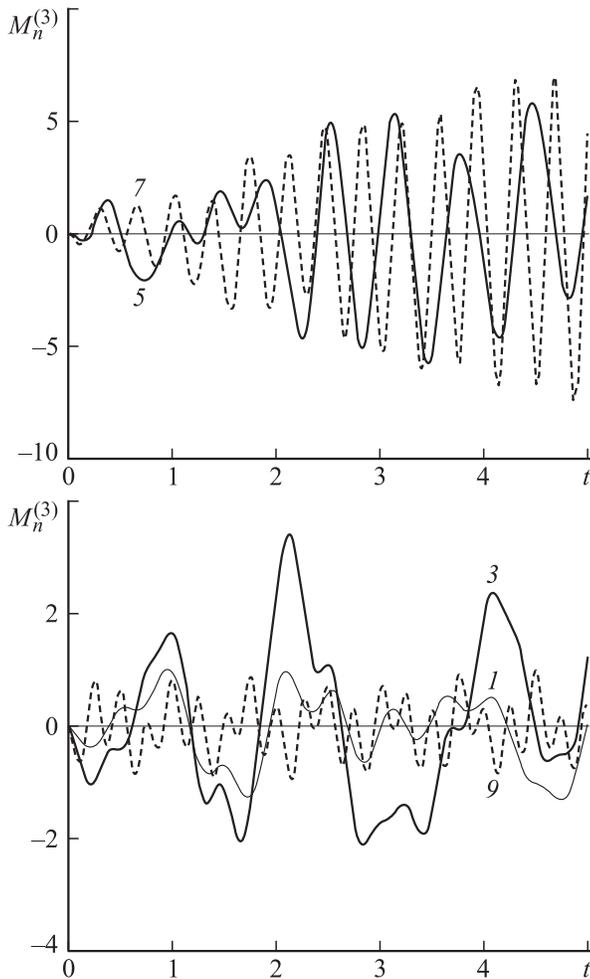


Рис. 3. Зависимости от времени t поправок к амплитудам мод третьего порядка малости при $W = 2.2$ и начальном возбуждении третьей моды. Номер кривой совпадает с номером изначально возбужденной моды.

частоты, т.е. использованное разложение теряет свою равномерность.

Из проведенного анализа следует, что нелинейное взаимодействие мод в задаче третьего порядка малости по амплитуде начального возмущения приводит к расширению спектра мод, вовлеченных в формирование свободной поверхности капли. В частности, если номер изначально возбужденной моды m является нечетным, то в первом порядке малости возбуждается только мода с номером m , во втором порядке малости возбуждается нулевая мода и все четные моды с номерами до $2m$ включительно, в третьем же порядке возбуждаются все нечетные моды с номерами до $3m$ включительно. Таким образом, поверхность формируется всеми модами с номерами из интервала $0, \dots, 2m$ и нечетными модами с номерами от $2m + 1$ до $3m$. Если же номер изначально возбужденной моды m является четным, то в первом порядке малости возбуждается мода с номером m , во втором порядке — нулевая и все четные до $2m$ вклю-

чительно, в третьем порядке — нулевая и все четные до $3m$ включительно. Таким образом, в формировании поверхности оказываются вовлеченными нулевая мода и все четные моды с номерами до $3m$ включительно.

При численном анализе выражений для амплитуд капиллярных колебаний (50), (54) выяснилось, что среди поправок к амплитудам третьего порядка малости $M_n^{(3)}(t)$ наибольших величин может достигать не поправка к амплитуде моды с номером m , а поправки к амплитудам мод с другими, более высокими номерами (рис. 3). Среди поправок же второго порядка малости к амплитудам $M_n^{(2)}(t)$ наибольшую величину всегда имеет поправка ко второй (основной) моде капиллярных колебаний (рис. 4).

Численный анализ выражения (56) указывает на то, что наибольшим отклонениям от равновесного состояния подвергаются элементы поверхности капли, располагающиеся в окрестности полярной оси сферической системы координат (рис. 5). Поскольку только при ϑ , близких к $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, наблюдается сложение колебаний отдельных мод. Вдали от этих значений ϑ формируется более гладкая волнообразная поверхность. Указанная тенденция тем выше, чем больше значение m изначально возбужденной моды (рис. 5, *b*). Для наглядности на рис. 5 формы поверхности капли приведены для большого значения амплитуды начального возмущения $\varepsilon = 0.3$, поэтому кривые 4 построены уже при явном нарушении равномерности разложения по ε . Это проявляется в очевидном несохранении первоначального объема для капель с образующими, обозначенными цифрой 4.

Интересно отметить, что в задаче 3-го порядка малости при одномодовой начальной деформации за счет расширения спектра нелинейно возбужденных мод возможно появление внутренних нелинейных резонансов, не обнаруживаемых при расчетах второго порядка малости. К таковым относится вырожденный четырехмодо-

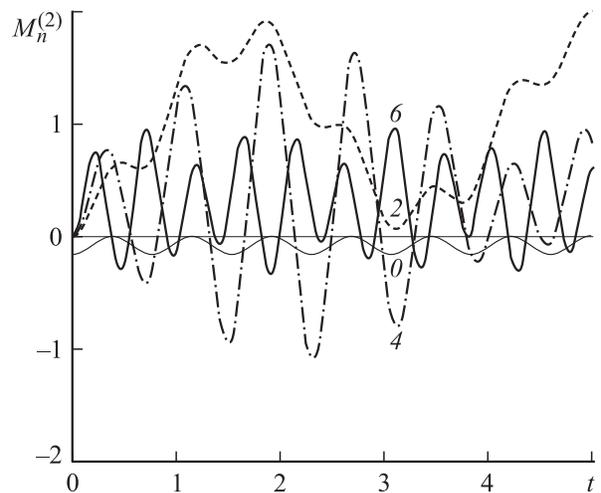


Рис. 4. То же, что на рис. 3, применительно к амплитудам мод второго порядка малости.

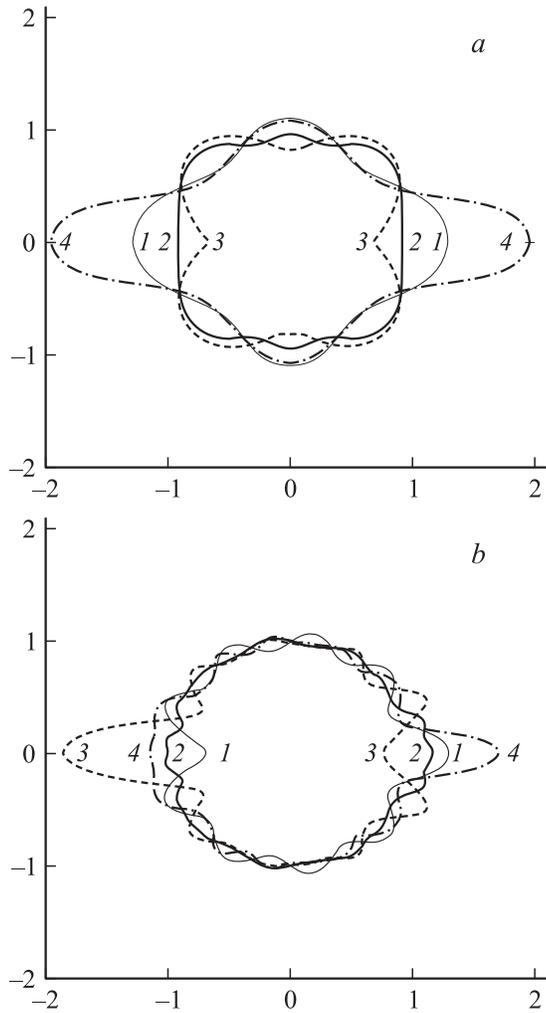


Рис. 5. Контур образующей капли при начальном возбуждении четвертой (а) и девятой моды (b). Для четвертой моды $\varepsilon = 0.3, W = 2.5; t = 0$ (1), 0.5 (2), 0.9 (3), 1.1 (4). Для девятой моды $\varepsilon = 0.3, W = 2.2; t = 0$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4).

вый резонанс вида $3\omega_m = \omega_n$. В этом случае начальное возбуждение моды с номером m приводит к раскату моды с более высоким номером n .

Заключение

Учет поправок третьего порядка малости по величине начального возбуждения в задаче о расчете нелинейных осцилляций заряженной капли приводит к существенному расширению спектра мод, вовлеченных в формирование поверхности капли, появлению новых нелинейных резонансов, сдвигу частот колебаний поверхности капли в сторону их уменьшения, указывает на тенденцию к снижению критических условий реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному заряду при увеличении амплитуды начального возмущения и на тенденцию формирования эмиссионных

выступов посредством суперпозиции высоких мод в окрестности полюсов заряженной капли.

Приложение А

Капиллярное давление на поверхность капли в третьем порядке малости

Если поверхность капли описывается функцией вида

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0,$$

то нормаль к поверхности будет иметь вид

$$r = 1 + \xi: \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = n_r \mathbf{e}_r + n_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta,$$

где

$$n_r = r (r^2 + (\partial_\vartheta \xi)^2)^{-1/2};$$

$$n_\vartheta = -\partial_\vartheta \xi (r^2 + (\partial_\vartheta \xi)^2)^{-1/2}. \quad (1A)$$

Используя (1A), найдем гауссову кривизну поверхности

$$r = 1 + \xi: \quad H = \nabla \mathbf{n} = \frac{2}{r} n_r + \partial_r n_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta n_\vartheta + \frac{n_\vartheta}{r} \text{ctg } \vartheta. \quad (2A)$$

Разложения выражений, входящих в (2A), имеют вид

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{2}{r} n_r = 2 - 2\xi + 2\xi^2 - (\partial_\vartheta \xi)^2 - 2\xi^3 + 3\xi(\partial_\vartheta \xi)^2 + O(\xi^4); \quad (3A)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \partial_r n_r = (\partial_\vartheta \xi)^2 - 3\xi(\partial_\vartheta \xi)^2 + O(\xi^4); \quad (4A)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{1}{r} \partial_\vartheta n_\vartheta = -\partial_\vartheta \partial_\vartheta \xi + 2\xi \partial_\vartheta \partial_\vartheta \xi - 3\xi^2 \partial_\vartheta \partial_\vartheta \xi + \frac{3}{2} (\partial_\vartheta \xi)^2 \partial_\vartheta \partial_\vartheta \xi + O(\xi^4); \quad (5A)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{n_\vartheta}{r} = -\partial_\vartheta \xi + 2\xi \partial_\vartheta \xi - 3\xi^2 \partial_\vartheta \xi + \frac{1}{2} (\partial_\vartheta \xi)^3 + O(\xi^4). \quad (6A)$$

Подставляя (3A)–(6A) в (2A), найдем гауссову кривизну поверхности

$$H = 2 - (2 + \Delta_\Omega)\xi + 2\xi(1 + \Delta_\Omega)\xi - \xi^2(2 + 3\Delta_\Omega)\xi + (\partial_\vartheta \xi)^2 \left(\partial_\vartheta \partial_\vartheta \xi + \frac{1}{2} \Delta_\Omega \xi \right) + O(\xi^4), \quad (7A)$$

где $\Delta_\Omega \equiv \partial_\vartheta \partial_\vartheta + \text{ctg } \vartheta \partial_\vartheta$.

Если возмущение поверхности ξ представить в виде ряда

$$\xi = \varepsilon \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \xi^{(2)} + \varepsilon^3 \xi^{(3)} + O(\varepsilon^4), \quad (8A)$$

то, подставляя его в (7А), для лапласовского давления получим выражение

$$\begin{aligned}
 P_\sigma = H = & 2 - \varepsilon(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)} - \varepsilon^2(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(2)} \\
 & + 2\varepsilon^2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)} - \varepsilon^3(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(3)} \\
 & - 2\varepsilon^3\xi^{(1)}\left(\left(\xi^{(1)}\right)^2 - (2 + \Delta_\Omega)\xi^{(2)}\right) + 2\varepsilon^3\xi^{(2)}\Delta_\Omega\xi^{(1)} \\
 & - 3\varepsilon^3\left(\xi^{(1)}\right)^2\delta_\Omega\xi^{(1)} + \varepsilon^3\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\right)^2\partial_\vartheta\vartheta\xi^{(1)} \\
 & + \varepsilon^3\frac{1}{2}\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\right)^2\Delta_\Omega\xi^{(1)} + O(\varepsilon^4).
 \end{aligned}$$

Приложение В

Расчет давления электрического поля на поверхность заряженной капли с точностью до слагаемых третьего порядка малости

Давление электрического поля на поверхность жидкости определяется выражением

$$\begin{aligned}
 r = 1 + \xi: \quad P_q &= \frac{1}{8\pi} (\nabla\phi)^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left[(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\vartheta\phi)^2 \right]. \quad (1B)
 \end{aligned}$$

Производные, входящие в (1B), разложим в ряд в окрестности сферы, учитывая, что ϕ и $\partial_r\phi$ являются величинами нулевого порядка малости, а $\partial_\vartheta\phi$ — первого порядка малости (поскольку потенциал в окрестности заряженной сферической капли определяется выражением $\phi^{(0)} = Q/r$),

$$\begin{aligned}
 \partial_r\phi|_{r=1+\xi} &= \partial_r\phi|_{r=1} + \xi\partial_{rr}\phi|_{r=1} + \frac{\xi^2}{2}\partial_{rrr}\phi|_{r=1} \\
 &+ \frac{\xi^3}{6}\partial_{rrrr}\phi|_{r=1} + O(\xi^4); \quad (2B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_\vartheta\phi|_{r=1+\xi} &= \partial_\vartheta\phi|_{r=1} + \xi\partial_{r\vartheta}\phi|_{r=1} \\
 &+ \frac{\xi^2}{2}\partial_{rr\vartheta}\phi|_{r=1} + O(\xi^4). \quad (3B)
 \end{aligned}$$

Используя (2B) и (3B), найдем

$$\begin{aligned}
 (\partial_r\phi)^2|_{r=1+\xi} &= (\partial_r\phi)^2|_{r=1} + 2\xi\partial_r\phi|_{r=1}\partial_{rr}\phi|_{r=1} \\
 &+ \xi^2\partial_r\phi|_{r=1}\partial_{rrr}\phi|_{r=1} + \frac{1}{3}\xi^3\partial_r\phi|_{r=1}\partial_{rrrr}\phi|_{r=1} \\
 &+ \xi^2(\partial_{rr}\phi)^2|_{r=1} + \xi^3\partial_{rr}\phi|_{r=1}\partial_{rrr}\phi|_{r=1} + O(\xi^4); \quad (4B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^2}(\partial_\vartheta\phi)^2|_{r=1+\xi} &= (\partial_\vartheta\phi)^2|_{r=1} + 2\xi\partial_\vartheta\phi|_{r=1}\partial_{r\vartheta}\phi|_{r=1} \\
 &- 2\xi(\partial_\vartheta\phi)^2|_{r=1} + O(\xi^4). \quad (5B)
 \end{aligned}$$

Подставляя (4B) и (5B) в (1B), получим

$$\begin{aligned}
 r = 1: \quad P_q &= \frac{1}{8\pi} \left[(\partial_r\phi)^2 + 2\xi\partial_r\phi\partial_{rr}\phi \right. \\
 &+ \xi^2\partial_r\phi\partial_{rrr}\phi + \frac{1}{3}\xi^3\partial_r\phi\partial_{rrrr}\phi \\
 &+ \xi^2(\partial_{rr}\phi)^2 + \xi^3\partial_{rr}\phi\partial_{rrr}\phi + (\partial_\vartheta\phi)^2 \\
 &\left. + 2\xi\partial_\vartheta\phi\partial_{r\vartheta}\phi - 2\xi(\partial_\vartheta\phi)^2 \right] + O(\xi^4). \quad (6B)
 \end{aligned}$$

Потенциал электрического поля представим в виде разложения

$$\phi = \phi^{(0)} + \varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \varepsilon^3\phi^{(3)} + O(\varepsilon^4). \quad (7B)$$

Подставляя (7B) и (8A) в (6B) и учитывая, что $\partial_\vartheta\phi^{(0)} = 0$, для давления электрического поля на поверхность капли получим выражение

$$\begin{aligned}
 r = 1: \quad P_q &= \frac{1}{8\pi} (\partial_r\phi^{(0)})^2 + \frac{\varepsilon}{4\pi} \partial_r\phi^{(0)} \left(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)} \right) \\
 &+ \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \left\{ 2\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^2 \right. \\
 &\times \left((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)} \right) + (\partial_\vartheta\phi^{(1)})^2 \\
 &+ (\partial_r\phi^{(1)}) + 2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + 2\xi^{(1)} \left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)} \right. \\
 &+ \left. \partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} \right) \left. \right\} + \frac{\varepsilon^3}{8\pi} \left\{ 2\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^3 \right. \\
 &\times \left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)} + \frac{1}{3}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrrr}\phi^{(0)} \right) \\
 &+ 2 \left(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)} + \partial_r\phi^{(1)}(\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(2)}) \right. \\
 &+ \left. \partial_r\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(3)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)} \right) \\
 &+ 2\xi^{(1)} \left(\xi^{(2)} \left((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)} \right) \right. \\
 &+ \left. \partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(2)} + \partial_\vartheta\phi^{(1)}(\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)} - \partial_\vartheta\phi^{(1)}) \right. \\
 &+ \left. \partial_r\phi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(1)} + \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(2)} \right) + (\xi^{(1)})^2 \\
 &\left. \times (\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + 2\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)} + \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(1)}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Приложение С

Выражение для коэффициентов, через которые определено найденное решение

$$\begin{aligned}
 H_{kmln}^{1(+)(-)} &= \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{1(+)} \lambda_{img}^{(+)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(-)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(-)}; \\
 H_{kmln}^{1(-)(+)} &= \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{1(-)} \lambda_{img}^{(-)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(+)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(+)}; \\
 H_{kmln}^{2(+)(+)} &= \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{2(+)} \lambda_{img}^{(+)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(+)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(+)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{kmln}^{2(-)(-)} &= \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{2(-)} \lambda_{lmg}^{(-)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(-)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(-)}; \\
 H_{mgn}^{0(+)} &= (\Pi_{mgn}^0 - \Pi_{mgn}^1 \omega_m \omega_g - \Pi_{mgn}^2 \omega_g^2) (\lambda_{nmg}^{(+)} + \lambda_{nmg}^{(-)}); \\
 H_{mgn}^{0(-)} &= (\Pi_{mgn}^0 + \Pi_{mgn}^1 \omega_m \omega_g - \Pi_{mgn}^2 \omega_g^2) (\lambda_{nmg}^{(+)} + \lambda_{nmg}^{(-)}); \\
 \beta_{kmgln}^{1(+)} &= \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l + \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l + \omega_m)^2; \\
 \beta_{kmgln}^{1(-)} &= \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l - \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l - \omega_m)^2; \\
 \beta_{kmgln}^{2(+)} &= \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l + \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l + \omega_m)^2; \\
 \beta_{kmgln}^{2(-)} &= \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l - \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l - \omega_m)^2; \\
 \mu_{kmgln}^{1(-)} &= \Lambda_{kmgln}^1 - \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k; \\
 \mu_{kmgln}^{1(+)} &= \Lambda_{kmgln}^1 + \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k; \\
 \mu_{kmgln}^{0(-)} &= \Lambda_{kmgln}^0 - \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k; \\
 \mu_{kmgln}^{0(+)} &= \Lambda_{kmgln}^0 + \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k; \\
 \Lambda_{kmgln}^0 &= \frac{1}{2k} \left\{ K_{gln} (\alpha_{kmg} (kn(l + 3l^2 - 2(k + 2)W) \right. \\
 &\quad + 2(k - 2)\omega_k^2) + K_{kmg} (kn(4 - 6k(k + 1) \\
 &\quad + (k^3 - 2(m + 1)(m + 2) - k^2(n - 9) \\
 &\quad - k(3n + 2m(m + 3) - 22))W) \\
 &\quad \left. - (k - 1)k(k - n - 2)\omega_k^2) \right\}; \\
 &\quad - 2kn\alpha_{kmg} \sum_{v=1}^{\lfloor l/2 \rfloor} (2l - 4v + 1)K_{g,l-2v,n} \Big\}; \\
 \Lambda_{kmgln}^1 &= ((g - n - 1)K_{gln} - \alpha_{gln}/g) \\
 &\quad \times ((m - 1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m)\omega_m^2 \\
 &\quad + Wnk((g + 1)(l + n - g - 2)K_{gln} + \alpha_{gln})K_{kmg}; \\
 \Gamma_{kmgln}^0 &= ((k - 1)(k - 2(n + 1))K_{kmg}/2 \\
 &\quad - ((k - 1)(m + n) - m)\alpha_{kmg}/(km))K_{gln} \\
 &\quad + ((k - 1)(k - 2)K_{klg}/2 - (k - 2)\alpha_{klg}/k)K_{gmn}; \\
 \Gamma_{kmgln}^1 &= -((g - n - 1)K_{gkn} - (n + k)\alpha_{gkn}/(kg)) \\
 &\quad \times ((m - 1)K_{lmg} - \alpha_{lmg}/m) \\
 &\quad - ((g - n - 1)K_{gln} - \alpha_{gln}/g) \\
 &\quad \times ((m - 1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{kmn}^0 &= \left(\omega_k^2(n - k + 1) + 2kn(k + 1) + 2mn(m + 1) - 4n \right. \\
 &\quad \left. + nW((n - k - 5)(k - 1) + (m + 1) \right. \\
 &\quad \left. \times (k + n - m - 2)) \right) K_{kmn} + (\omega_k^2/k + nW)\alpha_{kmn}; \\
 \Pi_{kmn}^1 &= (m + k - n - 2)K_{kmn} - (n + k + m)\alpha_{kmn}/(mk); \\
 \Pi_{kmn}^2 &= (m - n - 1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}/m; \\
 \Xi_k &= \omega_k^2 + 2k^2(k + 1) - 4k - 5k(k - 1)W.
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Tsamopolous J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [3] Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 308. P. 1–14.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
- [5] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [6] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
- [7] Ширяева С.О. // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [8] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [9] Pelekasis N.A., Tsamopolous J.A., Manolis G.D. // Phys. Fluids. A. 1990. Vol. 2. N 8. P. 1328–1340.
- [10] Горшков В.Н., Чабан М.Г. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [13] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [14] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [15] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [16] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [17] Rayleigh // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.