

01;03

## Заряд и сила, действующая на сферическое тело у плоского электрода в поляризующейся проводящей среде

© А.А. Шутов

Филиал научно-исследовательского физико-химического института им. Л.Я. Карпова,  
249030 Обнинск, Россия  
e-mail: fci@meteo.ru

(Поступило в Редакцию 12 августа 2002 г. В окончательной редакции 3 декабря 2002 г.)

Предложен метод расчета электрических полей в проводящих поляризующихся средах с границами раздела. Выведено интегральное уравнение для поверхностной плотности заряда, индуцированной на межфазной границе, с помощью этой плотности определяется поле во всем объеме. Для сферического тела, касающегося плоского электрода, вычислены полный индуцированный заряд на границе и сила, действующая на тело. Найдено, что суммарный заряд и сила являются знакопеременными функциями относительной проводимости сред, т.е. в зависимости от проводимости возможно как отталкивание, так и притяжение к электроду. Выполнены экспериментальные исследования силы, действующей у электрода на твердые частицы, пузырьки и капли в несмешивающейся жидкости.

### Введение

Взаимодействие с электродами и электризация тел являются определяющими факторами в электротехнологических процессах фильтрации, осаждения, сепарации, контактной зарядки частиц [1–3]. Фильтрация включает процесс осаждения, для которого существуют различные физико-химические механизмы [1], и проблему удержания частиц на фильтрующих элементах. Принято считать, что после достижения осадительной поверхности частица не покидает ее. Эмпирические данные свидетельствуют, что надежно связываются с поверхностью мелкие частицы диаметром  $< 0.1 \mu\text{m}$ , для которых велико влияние сил Ван-дер-Ваальса. Более крупные частицы после зарядки могут отрываться от электрода. Экспериментальные наблюдения показывают, что существенными здесь являются как проводимость тел, так и параметры окружающей среды. В частности, по данным [2,3], частицы отталкиваются от электродов, если проводимость тел превышает величину  $\sim 10^{-2} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . В противном случае электроды удерживают осажденные частицы. Однако количественные соотношения, определяющие условия притяжения (отталкивания) тел к электродам, отсутствуют.

Для описания зарядки и взаимодействия частиц с электродами в проводящей среде недостаточен электростатический подход идеальных проводников с индуцированием поверхностного заряда, или диэлектриков с индуцированием поляризационного заряда. Здесь определение электрического поля в проводящих, поляризующихся средах будет проведено на основе одновременного включения в рассмотрение и свободных и поляризационных зарядов, плотность которых регулируется токопереносом в среде.

### Постановка задачи

Рассмотрим стационарную задачу переноса заряда через поверхность ограниченного тела, помещенного в электрическое поле. Полагаем, что среды внутри и вне тела имеют различные значения проводимости и диэлектрической проницаемости. Процесс переноса заряда описывается уравнением [4]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\varphi_e = \varphi_i, \quad (3)$$

$$D_{ne} - D_{ni} = \sigma, \quad (4)$$

$$\lambda_e E_{ne} = \lambda_i E_{ni}. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\mathbf{D}_{i,e} = \varepsilon_0 \varepsilon_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}$ ,  $\mathbf{j}_{i,e} = \lambda_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}$ ,  $\rho$  — плотность объемного заряда,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на границе раздела сред,  $\lambda$  — проводимость,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая константа. Символ  $n$  у поля или индукции обозначает проекцию на нормаль, внешнюю по отношению к телу. Индексы  $i$  и  $e$  относятся к средам внутри и вне тела соответственно. В соответствии с условиями (3), (4) задача рассматривается для простого слоя зарядов.

В общем случае неоднородных сред проводимость и диэлектрическая проницаемость являются функциями координат. Тогда из условия совместности уравнений (1) и (2) с необходимостью вытекает появление в задаче объемного заряда. Напротив, в однородных

средах перенос электрического тока протекает в отсутствие объемного заряда, и для потенциального поля соотношения (1) и (2) заменяются уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (6)$$

Однако при наличии границ раздела на межфазной поверхности в любом случае индуцируется поверхностный заряд, величина которого определяется уравнением (4). Если предметом исследования является только величина переносимого электрического тока, то достаточно рассматривать постановку, включающую соотношения (3), (5), (6) [4].

Решение задачи (3)–(6) в однородных средах будем искать с использованием метода Гринберга, согласно которому решение электростатической задачи (3), (4), (6) в точке  $\mathbf{r}$  можно представить в виде [5]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{\text{tot}}(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (7)$$

где  $\varphi_0$  — потенциал внешнего поля в отсутствие тела.

Полная поверхностная плотность заряда  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_p + \sigma$  складывается из плотности поляризационных (связанных)  $\sigma_p$  и физических (свободных)  $\sigma$  зарядов. Интегрирование в (7) выполняется по точкам  $\mathbf{r}'$  поверхности тела. Метод Гринберга основан на возможности двойственного описания электрического поля в поляризующихся средах [5,6]. Это можно сделать путем введения диэлектрической проницаемости с постулированием соответствующей связи между векторами напряженности и индукции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  либо путем введения дополнительного электрического поля с помощью вектора поляризации (поляризационных зарядов). Оба способа описания равноценны и отличаются только явным или неявным способами учета  $\epsilon$ . Например, потенциал (7) не включает  $\epsilon$ , поскольку среда здесь описывается с помощью поляризационных зарядов. Нормальные компоненты напряженности поля на элементе поверхности раздела равны

$$E_{ne} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\epsilon_0} + E_n, \quad E_{ni} = -\frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\epsilon_0} + E_n, \quad (8)$$

где  $E_n$  — нормальная компонента суммарного поля, являющегося суперпозицией напряженности внешнего поля и поля зарядов поверхности раздела.

Подставляя (8) в (4), находим

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\sigma}{\epsilon_i + \epsilon_e} + \frac{2\epsilon_0(\epsilon_i - \epsilon_e)}{\epsilon_i + \epsilon_e} E_n. \quad (9)$$

Вычисляя градиент  $\varphi$  выражения (7) и подставляя в (9)  $E_n = -(\mathbf{n}\nabla\varphi)$ , имеем следующее интегральное

уравнение для полной плотности зарядов:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\sigma}{\epsilon_i + \epsilon_e} + \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + \epsilon_e} \left( 2\epsilon_0 E_n^0 + \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{\sigma_{\text{tot}}(\mathbf{n}\nabla r_{NM})}{r_{NM}^2} dS \right), \quad (10)$$

где  $r_{NM} = |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M|$ ,  $\mathbf{r}_N$  и  $\mathbf{r}_M$  есть точки поверхности тела — наблюдения и текущая точки соответственно,  $E_n^0 = -(\mathbf{n}\nabla\varphi_0)$ .

В задачах электростатики диэлектриков в отличие от рассматриваемой плотность свободных зарядов  $\sigma$  считается заданной. Здесь соотношение (5) дает дополнительное соотношение между плотностями заряда. Подставляя  $E_n$  из (9) в (8), имеем

$$E_{ne} = \frac{\epsilon_i \sigma_{\text{tot}} - \sigma}{\epsilon_0(\epsilon_i - \epsilon_e)}, \quad E_{ni} = \frac{\epsilon_e \sigma_{\text{tot}} - \sigma}{\epsilon_0(\epsilon_i - \epsilon_e)}. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (5) дает следующую связь полной плотности с плотностью свободных зарядов:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma \frac{\lambda_e - \lambda_i}{\lambda_e \epsilon_i - \lambda_i \epsilon_e}. \quad (12)$$

С учетом (12) имеем следующее соотношение между нормальными компонентами напряженности и физической плотностью заряда:

$$E_{ne} = \frac{\lambda_i \sigma}{\epsilon_0(\lambda_i \epsilon_e - \lambda_e \epsilon_i)}, \quad E_{ni} = \frac{\lambda_e \sigma}{\epsilon_0(\lambda_i \epsilon_e - \lambda_e \epsilon_i)}. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получаем интегральное уравнение для плотности свободных зарядов

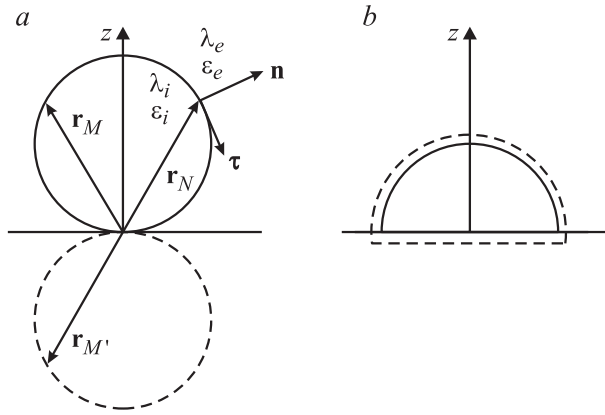
$$\sigma(\mathbf{r}_N) = \frac{\lambda_i \epsilon_e - \lambda_e \epsilon_i}{\lambda_i + \lambda_e} 2\epsilon_0 E_n^0(\mathbf{r}_N) + \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + \lambda_e} \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}_M)(\mathbf{n}\nabla r_{NM})}{r_{NM}^2} dS. \quad (14)$$

Из соотношений (12) и (14) находим, что при  $\lambda_i = \lambda_e$  равна нулю полная плотность, причем  $\sigma = -\sigma_p = (1 - \epsilon)\epsilon_0 E_n^0$ . При  $\lambda_e \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_e$  равна нулю физическая плотность и распределение заряда становится чисто поляризационным. При построении этого решения удовлетворены все условия (3)–(5). Таким образом, решение уравнения (14) с учетом связи (12) определяется потенциал поля исходной задачи. Физический смысл построенного решения заключается в том, что процесс переноса заряда при наличии межфазных границ сопровождается индуцированием как свободных, так и поляризационных зарядов на поверхности раздела.

Суммарный заряд на теле  $Q$  определяется интегралом

$$Q = \oint \sigma dS. \quad (15)$$

Сила, действующая на недеформируемое тело, определяется тензором электрических натяжений на внешней



**Рис. 1.** *a* — уравнение сферы единичного радиуса  $f(z) = \sqrt{1 - (z - 1)^2}$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Векторы  $\mathbf{r}_M$  и  $\mathbf{r}_{M'}$  отмечают зеркальные точки сферы относительно плоскости  $z = 0$ . *b* — уравнение поверхности  $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Штриховой отмечен контур интегрирования на полусфере. В основании контура поле равно нулю.

стороне поверхности тела [6,7]. Тогда сила на единицу поверхности равна [7]

$$\mathcal{F} = D_{ne} \mathbf{E}_e - \frac{D_e E_e \mathbf{n}}{2}. \quad (16)$$

Результирующая электрическая сила, действующая на тело в направлении  $d$ , определяется интегралом

$$F_d = \oint_S \mathcal{F} dS. \quad (17)$$

Рассмотрим задачу переноса заряда для сферы радиуса  $r_0$ , касающейся плоскости электрода, в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  (рис. 1, *a*). Вектор напряженности внешнего однородного поля  $\mathbf{E}_0$  параллелен оси  $z$ ,  $\varphi_0 = -E_0 z$ . На плоскости размещения электрода  $z = 0$  ставится условие эквипотенциальности

$$z = 0 \quad : \quad \varphi = 0.$$

Для выполнения этого условия в интеграле выражения (7) следует провести замену

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}''$  есть зеркальный образ точки сферы  $\mathbf{r}'$  относительно плоскости  $z = 0$ .

Соответствующим образом модифицируется ядро интегральных уравнений (10) и (14)

$$\frac{\mathbf{n} \nabla r_{NM}}{r_{NM}^2} \rightarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{n} \nabla r_{NM}}{r_{NM}^2} - \frac{\mathbf{n} \nabla r_{NM'}}{r_{NM'}^2}. \quad (18)$$

Далее рассмотрим задачу в следующих безразмерных переменных:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{E_0 r_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_0},$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\epsilon_e \epsilon_0 E_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{\epsilon_e \epsilon_0 E_0 r_0^2},$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}}{\epsilon_e \epsilon_0 E_0^2}, \quad \bar{F} = \frac{F}{\epsilon_e \epsilon_0 E_0^2 r_0^2}, \quad \lambda = \frac{\lambda_e}{\lambda_i}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_e}.$$

Поскольку уравнение поверхности  $r = f(z)$  не содержит  $\Theta$ , то задача имеет осевую симметрию и в (14) можно выполнить интегрирование по азимутальному углу. В результате уравнение (14) имеет следующий безразмерный вид:

$$\sigma(z) = \frac{1 - \lambda \epsilon}{\lambda + 1} 2n_z + \frac{1 - \lambda}{2\pi(\lambda + 1)} \int_0^{f_M} \sigma(z') g(z, z') dz', \quad (19)$$

$$g(z, z') = \int_0^{2\pi} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Theta'.$$

Здесь и далее знак черты у безразмерных величин опущен,  $n_z$  есть  $z$ -компонента вектора  $\mathbf{n} = (n_r, n_z) = (1, -f')/\sqrt{1 + f'^2}$ ,  $f'(z) = df/dz$ ,  $f_M$  — максимальный размер тела вдоль оси  $z$ . Натяжение (16) равно

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z &= D_{ne} E_{ze} - \frac{D_{ne} E_{ne} + D_r E_r}{2} n_z \\ &= \left( \frac{\sigma^2}{2(1 - \lambda \epsilon)^2} - \frac{E_r^2}{2} \right) n_z + \frac{\sigma E_r}{1 - \lambda \epsilon} \tau_z. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь использовано выражение (13) и соотношение  $E_z = E_n n_z + E_r \tau_z$ , где вектор касательной к поверхности равен  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_r, \tau_z) = (f', 1)/\sqrt{1 + f'^2}$ . Касательное к поверхности сферы поле, согласно (7) и (13), равно

$$E_r = \tau_z + \frac{\lambda - 1}{4\pi(\lambda \epsilon - 1)} \oint_S \sigma \left( \frac{(\boldsymbol{\tau} \nabla r_{NM})}{r_{NM}^2} - \frac{(\boldsymbol{\tau} \nabla r_{NM'})}{r_{NM'}^2} \right) dS.$$

Для сферической поверхности выражения суммарного свободного заряда (15) и результирующей  $z$ -силы (17) имеют вид

$$Q = 2\pi \int_0^{f_M} \sigma(z) dz, \quad (21)$$

$$F_z = 2\pi \int_0^{f_M} \mathcal{F}_z dz. \quad (22)$$

## Решение задачи

Известное решение [8] для идеально проводящего шарика у плоскости дает следующие результаты для зарядовой плотности, суммарного заряда и результирующей силы:

$$\sigma(z) = \frac{1}{(2z)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{v^2 J_0(v\sqrt{(2-z)/4z})}{\text{sh}(v/2)} dv, \quad (23)$$

$$Q = 4\pi\xi(2) \simeq 20.68, \quad F_z = 4\pi\left(\xi(3) + \frac{1}{6}\right) \simeq 17.20, \quad (24)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя,  $\xi(t)$  — дзета-функция Римана.

Положительность  $Q$  и  $F_z$  означает, что знаки зарядов шарика и электрода совпадают, а сила направлена от электрода в положительном направлении  $z$  (отталкивание от электрода).

Рассмотрим задачу для полусферы радиуса  $r = 1$ , лежащей на плоском электроде в поляризующейся среде (рис.1, b). Решение задачи (3)–(6) имеет вид

$$\varphi_i = -\frac{3\lambda}{2\lambda+1}z, \quad \varphi_e = -z + \frac{1-\lambda}{2\lambda+1} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\sigma = 3z \frac{1-\lambda\varepsilon}{2\lambda+1}. \quad (25)$$

Это решение совпадает с решением для целой сферы, помещенной в однородное поле, и интересно двумя обстоятельствами. Во-первых, потенциалы и поля, а значит, и сила (20) не зависят от диэлектрической проницаемости. Этого следовало ожидать, поскольку по постановке задачи соотношение (4) служит лишь для определения  $\sigma$ . Во-вторых, в поляризующейся среде становится возможным инверсное распределение заряда на теле при  $\lambda\varepsilon > 1$  в сравнении с аналогичной электростатической задачей идеального проводника или диэлектрика. Это означает, что при отрыве тела от электрода знак заряда тела может не совпадать со знаком заряда электрода. Вычисление силы и заряда на полусфере дает

$$F_z = \frac{9\pi(1+2\lambda-\lambda^2)}{4(2\lambda+1)^2}, \quad (26)$$

$$Q = \pi \frac{1-\lambda\varepsilon}{2\lambda+1}. \quad (27)$$

При вычислении силы учтено, что интеграл по основанию полусферы равен нулю, поскольку во внешности этой области поле равно нулю. Из соотношения (26) видно, что при  $\lambda > 1 + \sqrt{2}$  отталкивание от электрода меняется на притяжение. При  $\lambda \rightarrow 0$   $F_z = 9\pi/4$ , а при  $\lambda \rightarrow \infty$   $F_z = -9\pi/16$ . Заряд меняет знак при  $\lambda\varepsilon = 1$ . Из сравнения координат точек перемены знака в (26) и (27) находим, что при условии  $1/\varepsilon < \lambda < 1 + \sqrt{2}$  возможен

отрыв полусферы с зарядом, противоположным по знаку заряда электрода. Зависимость (26) приведена на рис. 2.

Интегральное уравнение (19) для сферы (рис. 1, a) решалось численно путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений. Поскольку исходное уравнение имеет слабую особенность в точке  $z = z'$  [9,10], то численно реализовывалось уравнение, эквивалентное (19),

$$\sigma(z) = \frac{1-\lambda\varepsilon}{\lambda+1} 2n_z(z) + \sigma(z) \frac{1-\lambda}{2\pi(\lambda+1)} \int_0^{f_M} g(z, z') t dz'$$

$$+ \frac{1-\lambda}{2\pi(\lambda+1)} \int_0^{f_M} g(z, z') (\sigma(z') - \sigma(z)) dz'. \quad (28)$$

Предполагается, что в результате такой модификации подынтегральная функция в последнем интеграле будет непрерывной и станет возможной ее интерполяция. Первый интеграл в (28) от разрывной функции вычисляется по формуле численного интегрирования на неравномерной сетке, точки которой определяются нулями полинома Чебышева [11]. Второй интеграл аппроксимировался квадратурной формулой Эйлера на равномерной сетке

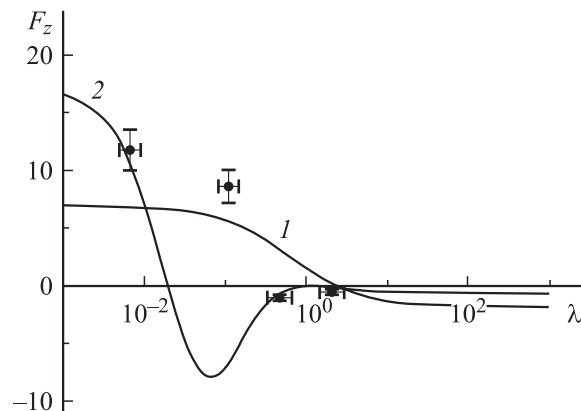
$$\int_a^b y dz = h \left( \frac{y_0}{2} + y_z + \dots + y_{m-1} + \frac{y_m}{2} \right)$$

$$+ \frac{h^2}{12} (y'_0 - y'_m) - \frac{h^4}{720} (y'''_0 - y'''_m),$$

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad y_0 = y(a), \quad y_m = y(b)$$

с остаточным членом  $\sim h^6$  [11]. Эта вычислительная схема воспроизводит не менее четырех правильных знаков в аналитических результатах (23)–(27) на сетке с  $m = 100$  точками.

На рис. 2 приведена зависимость силы  $F_z$  от относительной проводимости  $\lambda$ , вычисленной по (22).



**Рис. 2.** Зависимость электрической силы от относительной проводимости. 1 — полусфера, лежащая основанием на электроде; 2 — сфера.

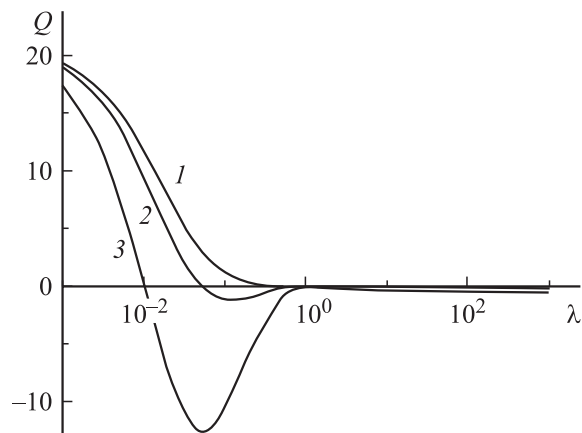


Рис. 3. Зависимость заряда на сфере у плоскости от относительной проводимости.  $\varepsilon$ : 1 — 0.05, 2 — 20, 3 — 100.

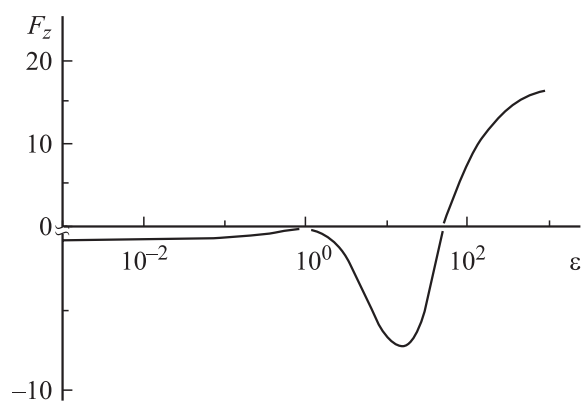


Рис. 4. Зависимость электрической силы от относительной диэлектрической проницаемости. Среда и тело — идеальные диэлектрики. Масштаб отрицательных значений силы увеличен вдвое. Пересечение с горизонтальной осью при  $\varepsilon \simeq 51$ , в точке  $\varepsilon = 1$  касание оси.

Так же, как в случае полусферы, здесь отсутствует зависимость силы от  $\varepsilon$  и на графике есть точка, в которой  $F_z$  меняет знак, координата которой для сферы равна  $\lambda = 0.0196$ . Зависимость суммарного заряда сферы от  $\lambda$ , вычисленного по соотношению (21), приведена на рис. 3. Кривые при промежуточных значениях  $\varepsilon$  диапазона  $0.05 < \varepsilon < 100$  лежат в области между двумя кривыми. С увеличением  $\varepsilon$  увеличивается диапазон значений  $\lambda$ , при которых заряд сферы противоположен заряду электрода. Увеличивается также и абсолютная величина отрицательного заряда. Точка  $\lambda = 1$  для зависимостей  $F_z(\lambda)$  и  $Q(\lambda)$  является точкой касания кривых с осями  $F_z = 0$  и  $Q = 0$ . Кривая  $Q(\lambda)$  пересекает ось в точке  $\lambda = 1/\varepsilon$ .

Случай идеально проводящей сферы соответствует значению параметра  $\lambda = 0$ , и данные численного решения согласуются с (23), (24). Другой электростатический предел идеального незаряженного диэлектрика не является частным случаем рассматриваемой зада-

чи. Например, предел  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствует системе диэлектрическая сфера в проводящей среде, однако в этом случае на границе раздела индуцируется свободный заряд. Формально лишь при условии  $\lambda\varepsilon = 1$  в системе среда–тело индуцируется только поляризационный заряд, причем  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_p$ . Для диэлектрической сферы у плоского электрода соотношения (10), (16), записанные в безразмерных величинах, имеют вид

$$\sigma_p(z) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \left( 2n_z(z) + \int_0^{f_M} dz' g(z, z') \sigma_p(z') \right),$$

$$\mathcal{F}_z = \left( \frac{\varepsilon^2 \sigma_p^2}{(\varepsilon - 1)^2} - \frac{E_r^2}{2} \right) n_z + \frac{\varepsilon \sigma_p E_r}{\varepsilon - 1} \tau_z.$$

Здесь в отличие от задачи переноса заряда в нормировку поляризационной плотности не входит  $\varepsilon_e$ :  $\bar{\sigma}_p = \sigma_p / \varepsilon_0 E_0$ . Зависимость силы от  $\varepsilon$ , действующей на диэлектрическую сферу, приведена на рис. 4. Вследствие эквивалентности постановок электростатической задачи для незаряженных диэлектриков и задачи переноса заряда в проводящих средах решение первой задачи должно совпадать в решении второй при формальной замене  $\varepsilon \rightarrow 1/\lambda$  [4]. Эта эквивалентность касается только распределения потенциала и напряженности. Поскольку сила вычислена исходя из тензора электрических напряжений вне тела, то совпадают также и силовые данные рис. 3 (кривая 2) и 4 при замене  $\varepsilon \rightarrow 1/\lambda$ . В то же время эта аналогия нарушается для зарядовых плотностей и сил на деформируемое тело, распределение которых характеризуется скачком тензора напряжений на межфазной границе, например в жидкостях.

## Эксперимент и обсуждение

Эксперименты проводились с твердыми частицами в воздухе, а также пузырьками и каплями в жидкой среде. Поле создавалось источником постоянного напряжения в зазоре между двумя плоскопараллельными электродами, расположенными друг от друга на расстоянии 1–2 см. Диаметр исследуемых частиц не превышал 1 mm.

В экспериментах на воздухе на нижнем электроде размещались испытываемые частицы. В повышении напряжения они заряжались. Если частица отрывалась, то после попадания на противоэлектрод происходила ее перезарядка с последующим отрывом от верхней плоскости. В результате частицы совершают колебательное движение между электродами.

Условием отрыва тела от нижнего электрода является равенство силы тяжести и результирующей электрической силы

$$\varepsilon_0 E_0^2 r_0^2 F_z = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \gamma g,$$

где  $E_0$  — напряженность отрыва,  $\gamma$  — плотность вещества частицы,  $g$  — ускорение свободного падения.

Таблица 1. Свойства твердых сферических тел

Вещество	Плотность, g/cm <sup>3</sup>	Проводимость, Ω <sup>-1</sup> · cm <sup>-1</sup>	Радиус, mm	F <sub>z</sub> <sup>exp</sup>	F <sub>z</sub>
Полистирол	1.05	10 <sup>-15</sup> –10 <sup>-16</sup>	0.5	9.93	-6.95–16.6
Стекло молибденовое	2.5	10 <sup>-14</sup>	0.5	18.9	16.6–17.1
Графит	2.25	2.5 · 10 <sup>4</sup>	0.25	17.5	17.2
NaCl	2.19	10 <sup>-10</sup> –10 <sup>-11</sup>	0.5	16.2	17.2
Сахар	1.59	–	0.25	11.8	–

Из последнего соотношения по измеренным значениям  $E_0$ ,  $r_0$ ,  $\gamma$  можно определить экспериментальную величину безразмерной электрической силы

$$F_z^{\text{exp}} = \frac{4\pi r_0 \gamma g}{3\epsilon_0 E_0^2}. \quad (29)$$

Свойства использованных в эксперименте частиц приведены в табл. 1. Плотность и проводимость взяты из справочных данных [12,13]. Отрыв от плоскости наблюдался при напряженностях  $E_0$ , равных  $5 \cdot 10^5$ ,  $5.6 \cdot 10^5$  и  $3.5 \cdot 10^5$  V/m, для полистирольных гранул, стеклянных шариков и графитовых сфер соответственно. Аналогичные величины для шариков соли и сахара равны  $4 \cdot 10^5$  V/m. В качестве  $E_0$  взято среднее значение напряженности по результатам отрыва 10 частиц каждого вещества. Максимальное отклонение измеренной величины  $E_0$  от среднего значения составляет 5%. Суммарная погрешность  $F_z^{\text{exp}}$ , вычисленной по (29), равна 10%.

Согласно [12,13], проводимость воздуха при нормальных условиях имеет порядок  $10^{-17}$ – $10^{-18}$  Ω<sup>-1</sup> · m<sup>-1</sup>. Тогда безразмерный параметр  $\lambda$  для полистирола заключен в пределах  $10^{-3} < \lambda < 10^{-1}$ . Следовательно, величина силы, вычисленной по (22), расположена в диапазоне  $-6.95 < F_z^{\text{exp}} < 16.6$ . Расчетные значения  $F_z$  приведены в последней колонке табл. 1. В пределах погрешности экспериментальные и расчетные данные согласуются.

Наблюдение отрыва частиц пластинчато-игольчатой формы проводилось на полидисперсных порошках полистирола, поливинилхлорида, корунда и угла. Частицы имели средний размер  $10$ – $50$  μm, их проводимость охватывала весь рассматриваемый диапазон  $10^{-16}$ – $10^4$  Ω<sup>-1</sup> · m<sup>-1</sup>. Для каждого вещества наблюдался отрыв отдельных частиц, имевших форму, близкую к сферической. Однако в каждом порошке, нанесенном на нижний электрод, всегда находились частицы, которые не отрывались от плоскости вплоть до пробойной напряженности.

Определение электрической силы, действующей на каплю, помещенную в несмешиваемую жидкость, проводилось в прямоугольной ячейке. Постоянное напряжение подавалось на металлические основания сечением  $4 \times 4$  см. Боковые стеклянные стенки имели высоту 1.2 см. Электрическое поле вызывает конвективное движение в замкнутом объеме ячейки, и капля может переноситься внешней средой. Чем выше поле, тем

интенсивнее движение. Поэтому электрическое воздействие рассчитывалось по отрыву капли от капилляра при небольших разностях потенциала до 1 kV. Для погружающейся (всплывающей) капли капилляр располагался в центре верхнего (нижнего) электрода. Длина выдвигаемой в межэлектродный промежуток части капилляра подбиралась таким образом, чтобы в момент отрыва капля лишь касалась электрода, но не растекалась по нему (рис. 5). В момент отрыва должны быть сбалансированы силы тяжести, архимедова, электрическая и поверхностное натяжение

$$\frac{4\pi}{3} (\gamma_i - \gamma_e) g r_0^3 = \epsilon_0 \epsilon_e E_0^2 r_0^2 F_z + 2\pi r_k T, \quad (30)$$

где  $r_k$  — радиус капилляра,  $T$  — межфазное поверхностное натяжение.

Здесь предполагается, что отрыв капли происходит по шейке, радиус которой равен внешнему радиусу капилляра. Поверхностное натяжение вычислялось по (30) при  $E_0 = 0$  по измеренным значениям радиуса отрывающейся капли. Если в поле радиус оторвавшейся капли увеличивался, то это свидетельствовало о притягивающей к электроду силе  $F_z < 0$ . В противном случае электрическая сила является отталкивающей  $F_z > 0$ . Поле изменялось в пределах  $E_0 \sim 7$ – $10 \cdot 10^4$  V/m. Использовались капилляры с внешним радиусом 0.11

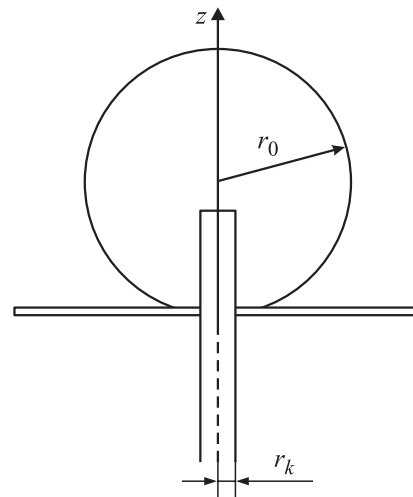


Рис. 5. Ось  $z$  направлена в сторону противоиэлектрода. В момент отрыва капля касается электрода.

Таблица 2. Свойства жидких систем капля + среда

Система	$\gamma_i$ , g/cm <sup>3</sup>	$\lambda_i$ , $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\lambda$	$\varepsilon$	$T$ , dyn/cm	$E_z^{\text{exp}}$
СМ+СК	1.1	$1.43 \cdot 10^{-12}$	0.47	1.95	1.54	-0.95
ВМ+СК	0.87	$6 \cdot 10^{-14}$	0.11	1.95	1.07	8.65
КМ+СМ	0.97	$2.1 \cdot 10^{-10}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	2.69	1.21	11.8
СК+СМ	0.98	$6.7 \cdot 10^{-13}$	2.13	2.69	1.54	-0.49

и 0.23 mm. Радиус отрывающихся капель составлял 0.6–0.7 mm.

Пара жидкой системы капля–среда выбиралась из четырех взаимно несмешивающихся жидкостей: силиконовое масло (СМ), силиконовый каучук (СК), веретенное масло (ВМ) и касторовое масло (КМ). Параметры некоторых систем приведены в табл. 2, где в комбинации капля + среда первой указана капля. Значения  $F_z$  вычислены в соответствии с формулой (30), погрешность ее определения равна 15%. Проводимость измерялась с точностью 15%, отсюда погрешность параметра  $\lambda$  составляет 30%. Экспериментальные точки нанесены на график рис. 2. Значительное отклонение от расчетной кривой 2, вероятно, может быть обусловлено конвекцией жидкостей капли и среды, а также изменением формы капли под действием поля. Еще одной возможностью отрыва является эмиссия мелких капелек с вершины деформированной электрическим полем исходной капли. Например, капля силиконового каучука в силиконовом масле сплющивается с ростом поля, растекаясь по электроду. При некотором значении напряженности на поверхности капли образуется острый выступ, с которого происходит эмиссия капелек. Тот же механизм возможен для хорошо проводящих крупных капель, трансформирующихся в вытянутый по полю сфероид.

В пузырьках ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) и поверхностная плотность, и касательное поле всегда отличны от нуля. Из уравнения (19) видно, что  $\sigma(z)$  пропорционально  $\varepsilon$ , а касательное поле от  $\varepsilon$  не зависит. На рис. 6 приведены зависимости  $\sigma(z)$  при  $\varepsilon = 0.5$  и  $E_\tau(z)$ . Для сравнения показано распределение заряда (23) на идеально проводящей сфере (кривая 3). На поверхности пузырька

$$E_{ne} = 0, \quad E_{ni} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_\tau \neq 0.$$

Это означает, что снаружи силовые линии поля входят в поверхность по касательной и преломляются внутри в соответствии с соотношением между  $E_{ni}$  и  $E_\tau$ . Качественная картина распределения силовых линий для пузырька приведена на рис. 7. Если пренебречь касательными натяжениями, т.е. циркуляцией жидкости вокруг пузырька, то результирующая электрическая сила является силой притяжения к электроду, равная  $F_z = -0.655$ . В экспериментах с жидкостями из табл. 2 отрыв пузырьков диаметром 0.1–1 mm не наблюдался даже в условиях сильно развитой конвекции. В этих

же условиях не происходило эмиссии мелких пузырьков из исходного. В работе [14] показано, что удержание пузырьков возможно также и вблизи нижнего электрода, если пузырек поместить в неоднородное поле отверстия в электроде.

Под действием электрического поля возможны как отрыв, так и удержание частиц на электродах. Существенными факторами здесь являются отношение проводимости среды и тела, а также форма последнего. Расчеты показали, что отрыв шарика в однородном поле возможен только, если соотношение проводимостей меньше 0.0196. Для полусферы, лежащей основанием на электроде, аналогичная граница равна  $1 + \sqrt{2}$ . Эксперименты выполнялись с твердыми веществами и каплями как неорганического, так и органического происхождения, а также с пузырьками. В отдельных случаях среды обладали анизотропией. Диапазон проводимостей включал как самые плохие (полистирол, поливинилхлорид), так и очень хорошие проводники.

Эксперименты с порошками частиц неправильной формы показали, что имеются объекты, которые удерживаются при всех проводимостях, хотя частицы большего размера отрываются от электрода. В то же время в согласии с расчетами удержать частицу использованных веществ правильной сферической формы невозможно.

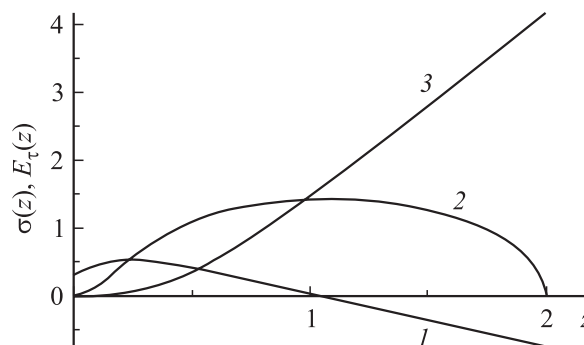


Рис. 6. Зависимость плотности заряда и касательной напряженности поля на пузырьке от расстояния при  $\varepsilon = 0.5$ . 1 —  $\sigma(z)$ , 2 —  $E_\tau(z)$ , 3 —  $\sigma(z)$  идеально проводящей сферы.

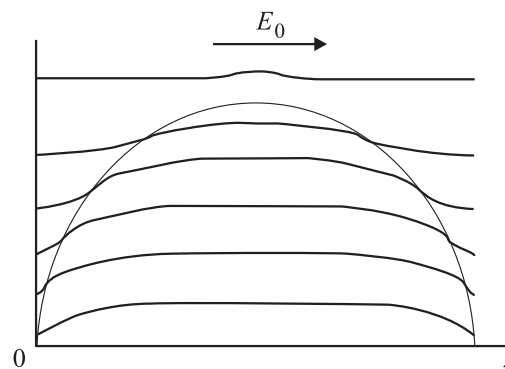


Рис. 7. Распределение силовых линий для пузырька.

Тенденцию к отрыву от электрода проявляют капли, помещенные в менее проводящую среду. Очень плохо проводящие пузырьки удерживаются электрическим полем. В промежуточной области проводимостей возрастает роль касательных натяжений на межфазной границе. В этом случае часть энергии поля затрачивается на возбуждение конвекции в капле и среде, а вопрос о взаимодействии с электродом необходимо решать в рамках электрогидродинамической постановки.

Протекание электрического тока в однородных средах может сопровождаться зарядкой только межфазных границ. Величина и знак свободного заряда регулируются самосогласованным процессом переноса заряда в эффективном поле, включающем исходное поле и индуцированные поля физических и поляризационных зарядов. Знаки зарядов сферы и электрода совпадают, только если произведение относительной проводимости и проницаемости  $\lambda\varepsilon < 1$ . Обратное неравенство приводит к обращению знака заряда сферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Калужской области (проект № 02-01-96035).

## Список литературы

- [1] Духин С.С., Эстрела-Льопес В.Р., Жолковский Э.К. Электроповерхностные явления и электрофильтрация. Киев: Наукова думка, 1985. 288 с.
- [2] Лившиц М.Н., Моисеев В.М. Электрические явления в аэрозолях и их применение. М.: Энергия, 1965. 224 с.
- [3] Уайт П., Смит С. Высокоэффективная очистка воздуха. М.: Атомиздат, 1967. 311 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
- [5] Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.
- [6] Миролубов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 416 с.
- [7] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
- [8] Лебедев Н.Н., Скальская И.П. // ЖТФ. 1962. Т. 32. Вып. 3. С. 375–378.
- [9] Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
- [10] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИТТЛ, 1950. 696 с.
- [11] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966. 632 с.
- [12] Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [13] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
- [14] Братухин Ю.К., Семенов В.А. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 6 (12). С. 2170–2175.