01;07;09

Поверхностные электромагнитные волны в фарадеевских средах

© А.Н. Фурс, Л.М. Барковский

Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия
e-mail: Barkovsky@bsu.by

(Поступило в Редакцию 10 июля 2002 г.)

Предсказывается эффект однонаправленного распространения поверхностных электромагнитных волн на границе раздела изотропной фарадеевской среды и изотропной оптически неактивной среды. Такие волны могут быть возбуждены, когда напряженность внешнего магнитного поля превышает некоторое пороговое значение. Проводится анализ решений дисперсионного уравнения и устанавливаются условия существования поверхностных волн.

Введение

В последние годы наряду с исследованиями поверхностных электромагнитных волн в поверхностно активных средах с отрицательными диэлектрическими проницаемостями (металлах, плазме и т. п. [1]) интенсивно изучается новый тип поверхностных волн — бездисперсионные поляритоны, существование которых обусловлено анизотропией одной или двух пограничных сред [2–5]. Такие волны могут возникать на границах раздела положительного одноосного кристалла и изотропной среды, одинаковых положительных одноосных кристаллов со скрещенными осями, двухосного кристалла и изотропной среды. Общие условия существования поверхностных волн такого типа на границе раздела анизотропной и изотропной диэлектрических сред с положительно определенными тензорами диэлектрических проницаемостей были найдены в работе [6], а условия их резонансного возбуждения в структурах изотропный слой–анизотропная подложка рассматривались в [7]. Характерной особенностью бездисперсионных поверхностных волн является то, что они могут распространяться лишь в некоторых направлениях вдоль границы раздела. Угловая ширина разрешенных направлений тем больше, чем выше степень анизотропии пограничных сред.

Использование в качестве пограничных сред параметрических материалов, анизотропия которых может наводиться и перестраиваться внешними полями, открывает широкие возможности управления бездисперсионными поверхностными поляритонами. В данной работе мы исследуем проблему магнитооптического управления поверхностными волнами на границе раздела фарадеевской и оптически неактивной изотропной среды, когда внешнее магнитное поле приложено вдоль границы раздела. С помощью формализма тензоров поверхностных импедансов мы выводим дисперсионное уравнение, исследуем симметрии его решений и находим необходимые и достаточные условия существования поверхностных электромагнитных волн, из которых следует, что граница оптически активной и неактивной сред проявляет вентильные свойства по отношению к таким волнам. Рассматривается также частный случай распространения поверхностных волн в направлении, перпендикулярном к направлению внешнего магнитного поля. Вывод выражений для тензоров поверхностных импедансов, необходимых для построения дисперсионного уравнения, вынесен в Приложение.

Дисперсионное уравнение для поверхностных волн на границе раздела фарадеевской и изотропной неактивной среды

Для монохроматических волн с частотой ω в прозрачных фарадеевских оптических активных средах уравнения связи имеют вид [8]

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B},$$

где обратный тензор диэлектрической проницаемости ε^{-1} (тензор диэлектрической проницаемости) линейно зависит от напряженности внешнего магнитного поля $\mathfrak{H}$

$$\varepsilon^{-1}_{ik} = (\varepsilon^0)^{-1}_{ik} + ie_{ikl}F_{lm}\mathfrak{H}_m. \tag{1}$$

В (1) $F = (F_{ik})$ — тензор Фарадея, e_{ikl} — полностью антисимметричный псевдотензор третьего ранга (псевдотензор Леви–Чивита), по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Далее мы рассматриваем оптически изоропные фарадеевские среды, для которых тензоры $(\varepsilon^0)^{-1}$ и F пропорциональны единичному $(\varepsilon^0)^{-1}_{ik} = a\delta_{ik}$, $F_{ik} = f\delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера, a и f скаляры. Для таких сред соотношение (1) принимает вид

$$\varepsilon^{-1} = a + ib\mathbf{c}^{\times}, \tag{2}$$

где b — скаляр, линейно зависящий от модуля $\mathfrak{H}$ напряжености внешнего поля; $\mathbf{c}^{\times}$ — тензор, дуальный [9,10] единичному вектору $\mathbf{c}$, при этом вектор $\mathbf{c}$ параллелен $\mathfrak{H}$.

Искусственная оптическая активность проявляется во вращении плоскости поляризации линейно поляризованного света (эффект Фарадея). Параметры a и b, входящие в (2), выражаются через показатель преломления

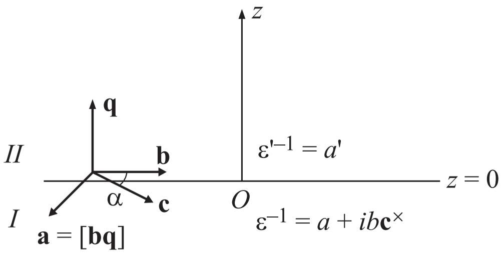


Рис. 1. Граница раздела фарадеевской и изотропной оптически неактивной среды.

n_0 лнейно поляризованой волны, распространяющейся вдоль $\mathbf{c}$, длину этой волны в вакууме $\chi_0 = 2\pi c/\omega$ и постоянную Верде V следующим образом [8]

$$a = \frac{1}{n_0^2}, \qquad b = \frac{V\chi_o\mathfrak{H}}{\pi n_0^3}. \tag{3}$$

Не теряя общности, далее мы считаем, что $0 \le b < a$, выбирая единичный вектор $\mathbf{c}$ сонаправленным с вектором $\mathfrak{H}$ для фарадеевских сред с положительным вращением ($V > 0$) и противоположно направленным вектору $\mathfrak{H}$ для сред с отрицательным вращением ($V < 0$).

Пусть изотропная фарадеевская среда I ($z < 0$) с тензором диэлектрической непроницаемости ε^{-1} (2) граничит с изотропной оптически неактивной средой II ($x > 0$, рис. 1) с диэлектрической непроницаемостью $a' = 1/\varepsilon' > 0$, при этом внешнее магнитное поле приложено вдоль границы раздела (вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен единичному вектору $\mathbf{q}$ нормали к границе, направленному вдоль оси Oz). Ниже мы показываем, что при выполнении условий

$$b > a - a' \ \ (a' < a), \qquad b > \sqrt{a'(a' - a)} \ \ (a' > a)$$

в такой системе возможно возбуждение поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль определенных направлений $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}^2 = 1$) по отношению к вектору $\mathbf{c}$.

Уравнения поверхностной электромагнитной волны в среде I представляются в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1}^{2} C_s \mathbf{H}_s^0 \exp[ik(\mathbf{b} - i\eta_s\mathbf{q})\mathbf{r} - i\omega t],$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1}^{2} C_s \mathbf{E}_s^0 \exp[ik(\mathbf{b} - i\eta_s\mathbf{q})\mathbf{r} - i\omega t], \tag{4}$$

где k — проекция волнового вектора на направление $\mathbf{b}$; $\mathbf{H}_s^0$ и $\mathbf{E}_s^0$ — амплитуды неоднородных парциальных волн на границе раздела; η_s — комплексные коэффициенты, характеризующие затухание этих волн при удалении от границы раздела ($\mathrm{Re}\eta_s > 0$); C_s — весовые коэффициенты.

Поля во второй среде описываются аналогичными уравнениями, в которые входят амплитуды $\mathbf{H}_s'^0$, $\mathbf{E}_s'^0$ и коэффициенты C_s', η_s', при этом $\mathrm{Re}\,\eta_s' < 0$. Величины $\mathbf{H}_s^0$, $\mathbf{E}_s^0$, η_s, $\mathbf{H}_s'^0$, $\mathbf{E}_s'^0$, η_s' можно найти, подставляя (4) в уравнения Максвелла и уравнения связи, а проекция волнового вектора k и весовые коэффициенты C_s, C_s' определяются из условий непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе (граничных условий). Тангенциальные составляющие результирующих амплитуд магнитного и электрического полей на границе

$$\mathbf{H}_\tau^0 = \sum_{s=1}^{2} \mathbf{H}_{s\tau}^0, \qquad \mathbf{H}_\tau'^0 = \sum_{s=1}^{2} \mathbf{H}_{s\tau}'^0,$$

$$[\mathbf{q}\mathbf{E}^0] = \sum_{s=1}^{2} [\mathbf{q}\mathbf{E}_s^0], \qquad [\mathbf{q}\mathbf{E}'^0] = \sum_{s=1}^{2} [\mathbf{q}\mathbf{E}_s'^0]$$

связаны между собой с помощью тензоров поверхностных импедансов γ и γ' пограничных сред [11]

$$[\mathbf{q}\mathbf{E}^0] = \gamma\mathbf{H}_\tau^0, \qquad [\mathbf{q}\mathbf{E}'^0] = \gamma'\mathbf{H}_\tau'^0. \tag{5}$$

Из уравнений (5) и граничных условий $\mathbf{H}_\tau^0 = \mathbf{H}_\tau'^0$, $[\mathbf{q}\mathbf{E}^0] = [\mathbf{q}\mathbf{E}'^0]$ следует, что

$$(\Gamma - \Gamma')\mathbf{H}_\tau^0 = 0, \tag{6}$$

где $\Gamma = -i\nu\gamma$, $\Gamma' = -i\nu\gamma'$ и $\nu = \omega/(ck)$ — безразмерная приведенная частота (фазовая скорость волны в единицах скорости света в вакууме).

Полагая, что (6) имеет нетривиальные решения $\mathbf{H}_\tau^0 \ne 0$, получаем дисперсионное уравнение

$$(\overline{\Gamma - \Gamma'})_t = 0. \tag{7}$$

В (7) черта сверху обозначает тензор, взаимный к $\Gamma - \Gamma'$, а индекс t — след этого тензора [9,10].

Для поверхностных электромагнитных волн вида (4) в прозрачных средах тензоры Γ и Γ' эрмитовы и могут быть рассчитаны с помощью общих формул, полученных в работах [5,6]. Для фарадеевской среды (см. Приложение)

$$\Gamma = \frac{1}{a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2} \times \Big\{\nu^2 a(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} - \nu^2 b\cos\alpha(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} + \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) + [b\sin\alpha(a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2) - a^2\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2)]\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\Big\}, \tag{8}$$

где $\mathbf{a} = [\mathbf{b}\mathbf{q}]$ ($\mathbf{a}^2 = 1$), α — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} = \mathbf{b}\cos\alpha + \mathbf{a}\sin\alpha$), а коэффициенты затухания парциальных волн $\eta_1\eta_2$ даются формулой

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{a}\left[a(a - \nu^2) - \frac{1}{2}b^2\cos^2\alpha \pm \frac{1}{2}b\cos\alpha\sqrt{4a\nu^2 + b^2\cos^2\alpha}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Для изотропной среды

$$\Gamma' = -\nu^2 \sqrt{\frac{a'}{a' - \nu^2}}\, \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \sqrt{a'(a' - \nu^2)}\, \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \qquad (10)$$

и

$$\eta'_{1,2} = -\sqrt{\frac{a' - \nu^2}{a'}}. \qquad (11)$$

Подставляя выражения (8) и (10) в (7), получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн, распространяющихся на границе раздела фарадеевской и изотропной сред,

$$G(\nu, \alpha) = 0, \qquad (12)$$

где

$$G(\nu, \alpha) = \frac{(\eta_1 + \eta_2) a b \sin\alpha}{a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2} - \frac{a^3\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2)^2 + \nu^2 b^2 \cos^2\alpha}{(a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2)^2} + \left[b\sin\alpha - \frac{a^2\eta_1\eta_2(\eta_1 - \eta_2)}{a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2}\right]\sqrt{\frac{a'}{a' - \nu^2}} - \frac{a(\eta_1 + \eta_2)}{a - \nu^2 + a\eta_1\eta_2}\sqrt{a'(a' - \nu^2)} - a'. \qquad (13)$$

При заданных параметрах a, b, a', α из соотношений (12), (13), (9) определяется приведенная частота $\nu = \nu_S$ и, следовательно, проекция $k = k_S$ волнового вектора поверхностной волны на направление $\mathbf{b}$. При этом предполагается, что

$$0 \le \nu_S < \hat{\nu}_L = \min(\nu_L, \nu'_L), \qquad (14)$$

где $\nu_L = \sqrt{a - b|\cos\alpha|}$, $\nu'_L = \sqrt{a'}$ — предельные частоты волн в фарадеевской и изотропной средах (см. также (A8)).

Условие (14) соответствует тому, что энергия поля электромагнитной волны локализована вблизи границы раздела как в одной, так и в другой пограничной среде, т. е. волна по сути является поверхностной. Отсутствие решений уравнения (12) в интервале $[0, \hat{\nu}_L)$, называемом субсветовым интервалом [6], означает невозможность возбуждения поверхностной волны вдоль заданного направления $\mathbf{b}$.

Анализ решений дисперсионного уравнения. Условия существования поверхностных волн

Дисперсионное уравнение (12) сохраняет свой вид при замене угла α на $\pi - \alpha$, при этом $\eta_1(\pi - \alpha) = \eta_2(\alpha)$, $\eta_2(\pi - \alpha) = \eta_1(\alpha)$. Таким образом, если поверхностная волна может распространяться вдоль направления, задаваемого некоторым вектором $\mathbf{b}$, то она может распространяться и вдоль направления, зеркально отраженного в плоскости с нормалью $\mathbf{c}$.

В то же время дисперсионное уравнение неинвариантно относительно замены $\alpha \to \alpha - \pi$ (изменения направления распространения на противоположное $\mathbf{b} \to -\mathbf{b}$) при условии, что коэффициенты η_1, η_2 остаются положительными, а η'_1, η'_2 — отрицательными. Это означает, что в общем случае отсутствует обратимость хода поверхностных электромагнитных волн на границе фарадеевской и изотропной неактивной среды и такая граница проявляет вентильные свойства. Хотя при наличии решения $\nu = \nu_S$ у уравнения (12) имеется также решение $\nu = -\nu_S$, замена $\nu_S \to -\nu_S$ (или $k_S \to -k_S$) неэквивалентна замене $\mathbf{b} \to -\mathbf{b}$ и соответствует не только обращению хода волны, но и экспоненциальному росту ее амплитуды при удалении от границы раздела (см. (4)). Такая волна физически нереализуема.

На левой границе $\nu = 0$ субсветового интервала коэффициенты η_1 и η_2 (9) равны

$$\eta_1(0) = 1, \qquad \eta_2(0) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2\cos^2\alpha}$$

и функция $G(\nu, \alpha)$, входящая в дисперсионное уравнение, отрицательна

$$G(0, \alpha) = 2\left(b\sin\alpha - \sqrt{a^2 - b^2\cos^2\alpha} - a'\right) < 0.$$

Если решение дисперсионного уравнения существует, то оно единственно [6]. Следовательно, уравнение (12) имеет решение, если на правой границе $\nu = \hat{\nu}_L$ субсветового интервала функция G положительна

$$G_L = (\alpha) = \lim_{\nu \to \hat{\nu}_L} G(\nu, \alpha) > 0. \qquad (15)$$

Условие (15) является необходимым и достаточным условием существования поверхностных электромагнитных волн на границе раздела фарадеевской и изотропной неактивной среды.

В (15) $G(\nu\alpha)$ можно заменить на функцию $R(\nu, \alpha) = \sqrt{a' - \nu^2}G(\nu, \alpha)$, конечную при $\nu = \sqrt{a'}$. На рис. 2 приведены зависимости $R_L(\alpha) = R(\hat{\nu}_L, \alpha)$ для разных значений материальных параметров a, b, a'. На осях абсцисс выделены те интервалы углов α, для которых дисперсионное уравнение (12) имеет решения, и определяющие направления, вдоль которых могут распространяться поверхностные электромагнитные волны. В зависимости от значений параметров реализуется один из трех случаев: а) в плоскости раздела сред нет направлений, вдоль которых могут распространяться поверхностные волны (рис. 2, a); б) распространение волн возможно, если α принадлежит одному из интервалов (α_1, α_2) или $(\pi - \alpha_2, \pi - \alpha_1)$, при этом $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$ (рис. 2, b); в) разрешенные направления распространения определяются значениями α, лежащими в интервале $(\alpha_1, \pi - \alpha_1)$, при этом $0 < \alpha_1 < \pi/2$ (рис. 2, c). Иными словами, эти направления лежат внутри угла шириной $\pi - 2\alpha_1$ с биссектрисой, перпендикулярной $\mathbf{c}$.

В случаях б и в проявляется упомянутая выше необратимость распространения поверхностных электромагнитных волн, выражающаяся в отсутствии интервалов

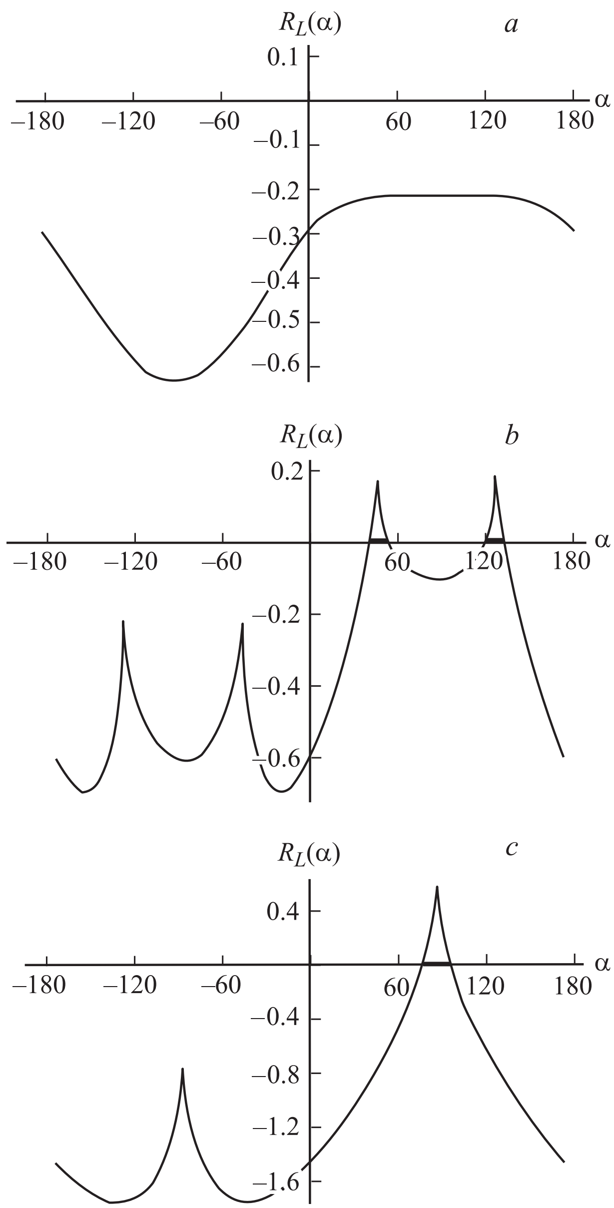


Рис. 2. Графики зависимостей $R_L = R_L(\alpha)$ и интервалы углов α существования поверхностных электромагнитных волн. *a*: $a = 0.9$, $b = 0.3$, $a' = 0.5$; *b*: $a = 0.9$, $b = 0.3$, $a' = 0.7$; *c*: $a = 0.9$, $b = 0.3$, $a' = 0.9$.

с отрицательными α, соответствующих обратному ходу волн. При этом все векторы **b**, определяющие разрешенные направления распространения поверхностных волн, лежат в плоскости раздела по одну сторону от вектора **c** так, что

$$[\mathbf{bq}]\mathbf{c} > 0. \qquad (16)$$

Используя соотношение (15), ниже мы получаем выражения для граничных углов интервалов α_1 и α_2 и устанавливаем условия, при которых реализуется каждый из перечисленных выше случаев.

Так как дисперсионное уравнение сохраняет свой вид при замене $\alpha \to \pi - \alpha$, то можно считать, что $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Пусть угол α таков, что $a - b\cos\alpha < a'$. Тогда $\hat{\nu}_L = \nu_L = \sqrt{a - b\cos\alpha}$ и выражения (9) для η_1, η_2 при $\nu = \hat{\nu}_L$ принимают вид

$$\eta_{1L} = \frac{1}{a}\sqrt{b\cos\alpha(2a - b\cos\alpha)}, \quad \eta_{2L} = 0$$

(обращение в нуль коэффициента η_2 соответствует тому, что одна из парциальных волн в фарадеевской среде становится объемной). В результате условие (15) записывается в виде

$$\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sqrt{a'(a' - a + b\cos\alpha)}}{b\cos\alpha}\right)$$
$$\times\sqrt{b\cos\alpha(2a - b\cos\alpha)} + b\sin\alpha\sqrt{\frac{a'}{a' - a + b\cos\alpha}}$$
$$-(a - b\cos\alpha) - a' > 0. \qquad (17)$$

Если $a - b\cos\alpha > a'$, то $\hat{\nu}_L = \nu'_L = \sqrt{a'}$ и функция $G_L(\alpha)$ становится бесконечно большой из-за наличия расходящегося члена с $(a' - \nu^2)^{-1/2}$. Она положительна, если положителен множитель в квадратных скобках в (13) при $\nu = \sqrt{a'}$. Имеем

$$b\sin\alpha\Big[a - a'$$
$$+\sqrt{(a - a')^2 - b^2\cos^2\alpha}\Big] > \sqrt{(a - a')^2 - b^2\cos^2\alpha}$$
$$\times\left\{\left[a(a-a') - \frac{1}{2}b^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}b\cos\alpha\sqrt{4aa' + b^2\cos^2\alpha}\,\right]^{1/2}\right.$$
$$+\Big[a(a - a') - \frac{1}{2}b^2\cos^2\alpha$$
$$\left.-\frac{1}{2}b\cos\alpha\sqrt{4aa' + b^2\cos^2\alpha}\,\Big]^{1/2}\right\}. \qquad (18)$$

Неравенства (17) и (18) определяют интервалы углов α (совокупность направлений **b** на границе фарадеевской и изотропной среды), для которых возможно возбуждение поверхностных электромагнитных волн. Граничные углы α_1 и α_2 этих интервалов можно найти, записав соотношения (17), (18) в виде равенств. Тогда, избавляясь в (17) от радикалов, получаем

$$c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0, \qquad (19)$$

где $x = \cos\alpha_1$ и

$$c_0 = 4a'^2b^4,$$
$$c_1 = 4a'b^{3[}\big[3(a - a')^2 - b^2\big],$$
$$c_2 = b^2\big[(a - a')^2(a^2 - 18aa' + 9a'^2)$$
$$+ 2(a - a')(a + 3a')b^2 + b^4\big],$$
$$c_3 = 4b(a - a')\big[a'(a - a')^3 - (a - a')(a + 2a')b^2 - b^4\big],$$
$$c_4 = 4(a - a')^2\big[(a - a')a' + b^2\big]^2. \qquad (20)$$

Из (18) находим

$$d_0y^4 + d_2y^2 + d_4 = 0, \tag{21}$$

где $y = \cos\alpha_2$ и

$$\begin{aligned} d_0 &= 4a'^2b^4, \\ d_2 &= b^2\big[(a-a')^2(a^2 - 6aa' - 3a'^2) \\ &\quad - 2(a-a')(a-3a')b^2 + b^4\big], \\ d_4 &= 4a'(a-a')^3\big[a(a-a') - b^2\big]. \end{aligned} \tag{22}$$

При $0 \le b < a$, $a' > 0$ обращению в нуль левой части соотношения (17) соответствует выбор большего вещественного корня x уравнения (19), если $a' < a$, и меньшего вещественного корня в противном случае. Равенство в (18) достигается, если из четырех корней уравнения (21) выбран

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2\sqrt{2}a'b}\Big\{&-(a-a')^2(a^2 - 6aa' - 3a'^2) \\ &+ 2(a-a')(a-3a')b^2 - b^4 - \\ &- \sqrt{[(9a'-a)(a-a') + b^2][b^2 - (a-a')^2]^3}\Big\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, левая граница α_1 интервала существования поверхностных электромагнитных волн находится из уравнения (19) при отделении одного из вещественных корней этого уравнения (большего при $a' < a$ и меньшего при $a' > a$). Правая граница α_2 может быть непосредственно рассчитана с использованием формулы (23).

Рассмотрим, как изменяются углы α_1 и α_2 в зависимости от a' при фиксированных значениях a и b. Если $a' < a - b$, то условия (17) и (18) не выполняются ни при каких значениях α (случай а)). При $a' = a - b$ корнями уравнений (19) и (21) являются $x = 1$ и $y = 1$ ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Далее, при увеличении a' углы α_1 и α_2 монотонно возрастают (рис. 3). Угол α_2

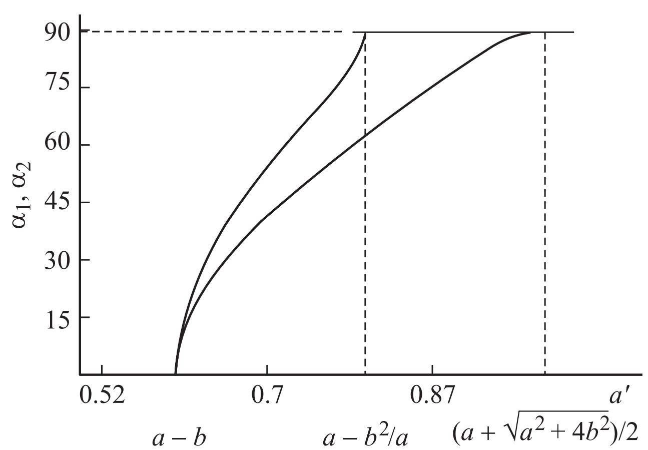


Рис. 3. Графики зависимостей граничных углов α_1, α_2 от параметра a' при $a = 0.9$, $b = 0.3$.

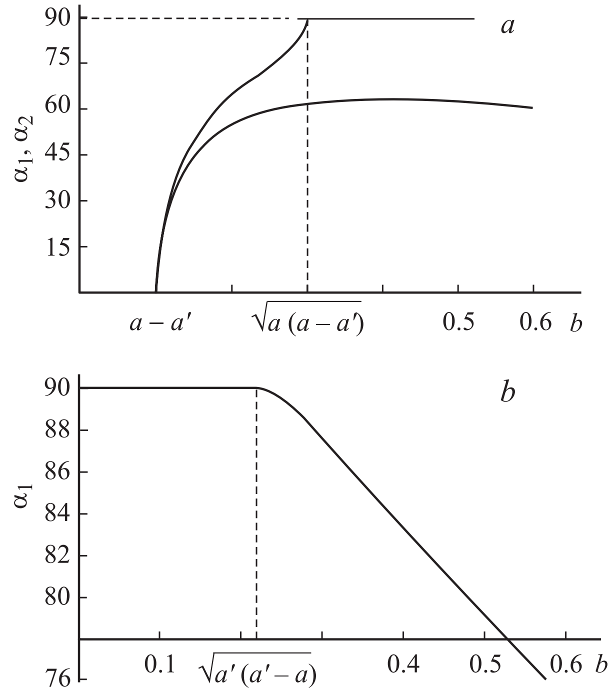


Рис. 4. Графики зависимостей граничных углов α_1, α_2 от параметра b фиксированных a, a'. a: $a = 0.9$, $a' = 0.8$; b: $a = 0.9$; $a' = 0.95$.

становится равным $\pi/2$, когда $y = 0$ и, следовательно, когда равен нулю свободный член d_4 уравнения (21). Это достигается при $a' = a - b^2/a$. Таким образом, при выполнении условия

$$a - b < a' < a - \frac{b^2}{a}$$

реализуется случай б и имеются два интервала (α_1, α_2) и $(\pi - \alpha_2, \pi - \alpha_1)$ значений α, отвечающих существованию поверхностных волн. Наконец, угол α_1 становится равным $\pi/2$, когда равен нулю свободный член c_4 уравнения (19), т.е. при $(a - a')a' + b^2 = 0$. Следовательно, условие

$$a - \frac{b^2}{a} < a' < \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4b^2}\right) \tag{24}$$

соответствует случаю в, когда имеется один интервал $(\alpha_1,\ \pi - \alpha_1)$ существования поверхностных волн, при этом α_1 по-прежнему определяется из уравнения (19). При $a' > (a + \sqrt{a^2 + 4b^2})/2$ поверхностные волны распространяться не могут (случай а).

Характер зависимости граничных углов α_1 и α_2 от b при фиксированных параметрах a и a' существенно различен при $a' < a$ и $a' > a$ (рис. 4), однако в обоих случаях возбуждение поверхностных волн возможно при превышении величиной b некоторого порогового значения. При $a' < a$ этот порог равен

$$b^* = a - a',$$

причем при $b^* < b < \sqrt{a(a - a')}$ реализуется случай б, а при $b > \sqrt{a(a - a')}$ — случай в. Значение

$b = \sqrt{a(a-a')}$ соответствует обращению в нуль коэффициента d_4 (22), при этом $\alpha_2 = \pi/2$.

Пороговое значение b при $a' > a$ определяется из условия $c_4 = 0$ и дается формулой

$$b^* = \sqrt{a'(a'-a)},$$

причем при $b > b^*$ реализуется случай в. С учетом (3) нетрудно отыскать пороговые значения напряжености внешнего магнитного поля

$$\mathfrak{H}^* = \begin{cases} \dfrac{\pi n_0(\varepsilon' - n_0^2)}{V\lambda_0\varepsilon'}, & \varepsilon' > n_0^2, \\ \dfrac{\pi n_0^2\sqrt{n_0^2 - \varepsilon'}}{V\lambda_0\varepsilon'}, & \varepsilon' < n_0^2. \end{cases} \tag{25}$$

При $a' = a$ порог напряженности внешнего магнитного поля отсутствует и при любом значении b реализуется случай в. Из (19), (20) находим, что $\alpha_1 = \arccos(b/2a)$. Следовательно, угловая ширина интервала направлений $\mathbf{b}$, вдоль которых могут распространяться поверхностные волны, равна $\Delta\alpha = 2\arccos(b/2a)$. При $b \ll a$ имеем

$$\Delta\alpha = \frac{b}{a} = \frac{V\lambda_0\mathfrak{H}}{\pi n_0}.$$

Например, при длине волны $\lambda_0 = 496\,\mathrm{nm}$ кристалл титаната стронция $SrTiO_3$ имеет показатель преломления $n_0 = 2.48$ и постоянную Верде $V = 0.31\,\mathrm{min/Oe\cdot cm}$. Если этот кристалл граничит с изотропной неактивной средой с таким же показателем преломления, то при напряженности магнитного поля $\mathfrak{H} = 10^5\,\mathrm{Oe}$ ширина интервала составляет $\Delta\alpha = 12''$.

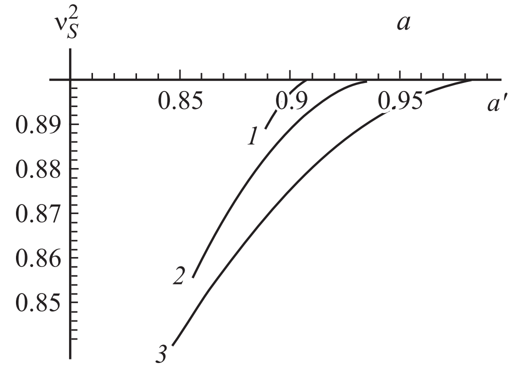
В общем случае при произвольных значениях параметров a, b, a', α дисперсионное уравнение (12), (13) допускает только численное решение. Это уравнение упрощается, когда поверхностная волна распространяется в направлении, перпендикулярном к направлению внешнего магнитного поля ($\alpha = \pi/2$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}$). В этом случае

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{a-\nu^2}{a}}, \quad \nu_L^2 = a, \quad \nu_L'^2 = a' \tag{26}$$

и (12) принимает вид

$$\left[b - \sqrt{a(a-\nu^2)}\right]\sqrt{\frac{a'}{a'-\nu^2}} + \left[b - \sqrt{a'(a'-\nu^2)}\right]\sqrt{\frac{a}{a-\nu^2}} - a - a' = 0. \tag{27}$$

Отметим, что замены $a \leftrightarrow a'$ оставляют уравнение (27) неизменным, т.е. фазовая скорость поверхностной волны, распространяющейся в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{c}$, на границе сред с тензорами непроницаемостей $\varepsilon^{-1} = a' + ib\mathbf{c}^\times$, $\varepsilon'^{-1} = a$ та же, что и для



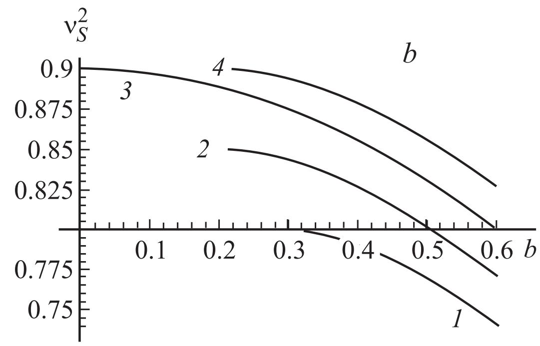


Рис. 5. Решения дисперсионного уравнения при распространении поверхностных волн в направлении, перпендикулярном к $\mathfrak{H}$ ($a = 0.9$). *a*: графики зависимостей $\nu_S^2 = \nu_S^2(a')$ ($b = 0.1$ (*1*), 0.2 (*2*), 0.3 (*3*)); *b*: графики зависимостей $\nu_S^2 = \nu_S^2(b)$ ($a' = 0.8$ (*1*), 0.85 (*2*), 0.9 (*3*), 0.95 (*4*)).

сред с тензорами непроницаемостей $\varepsilon^{-1} = a + ib\mathbf{c}^\times$, $\varepsilon'^{-1} = a'$.

Уравнение (27) с положительными a, b, a' имеет решение, если реализуется случай в. Поэтому при заданных a, b для a' должны выполняться неравенства (24) (см. также рис. 3), а при заданных a, a' для b — неравенства

$$b > \sqrt{a(a-a')} \quad \text{при} \quad a' < a, \tag{28}$$

$$b > \sqrt{a'(a'-a)} \quad \text{при} \quad a' > a \tag{29}$$

(рис. 4). Условия (28), (29) соответствуют положительности сомножителей в квадратных скобках в (27).

Исключая в (27) радикалы, получаем

$$(a-a')^2\nu^4 + 2(a+a')\left[b^2 - (a-a')^2\right]\nu^2 - \left[b^2 - (a-a')^2\right]\left[(a-a')^2 - b^2\right] = 0. \tag{30}$$

Квадрату приведенной частоты ν_S^2 поверхностной волны отвечает положительный корень уравнения (30)

$$\nu_S^2 = \frac{1}{(a-a')^2}\Big\{-(a+a')\left[b^2 - (a-a')^2\right] + 2b\sqrt{aa'\left[b^2 - (a-a')^2\right]}\Big\}. \tag{31}$$

При $a = a'$ из (30) имеем

$$\nu_S^2 = a - \frac{b^2}{4a}.$$

Предельным является случай, соответствующий переходу от неравенства (28) к равенству $b = \sqrt{a(a-a')}$ (или, что то же самое, замене первого знака неравенства в (24) на знак равенства), для которого из (31) получаем $\nu_S^2 = \nu_L'^2 = a'$. Равенство приведенной частоты волны предельной частоте означает, что в изотропной среде *II* распространяется объемная волна (см. (11)), вектор Умова–Пойнтинга которой параллелен границе раздела (предельная электромагнитная волна [6]). Аналогично, переходя к равенству в (29) (заменяя второй знак неравенства в (24) на знак равенства), получаем $\nu_S^2 = \nu_L^2 = a$. В этом случае объемная волна распространяется в фарадеевской среде *I* (см. (26)). На рис. 5, *a* показаны рассчитанные согласно (31) зависимости $\nu_S^2 = \nu_S^2(a')$ для ряда значений параметра b, а на рис. 5, *b* — зависимости $\nu_S^2 = \nu_S^2(b)$ для разных a'. Крайние левые точки кривых на рис. 5, *a* соответствуют распространению предельной волны в изотропной среде, крайние правые — в фарадеевской среде. Соответственно крайние левые точки кривых *1* и *2* на рис. 5, *b* относятся к предельной волне в изотропной среде ($a' < a$), а крайняя левая точка кривой *4* — к предельной волне в фарадеевской среде ($a' > a$).

Заключение

Объемные линейно поляризованные электромагнитные волны всегда могут распространяться в фарадеевских средах как в прямом, так и в обратном направлениях, причем они испытывают удвоенный поворот плоскости поляризации при прохождении через среду туда и обратно. Для поверхностных волн граница фарадеевской и изотропной оптически неактивной среды проявляет вентильные свойства — такие волны либо вообще не могут распространяться ни вдоль направления $\mathbf{b}$, ни вдоль $-\mathbf{b}$, если не выполняются условия (17) или (18), либо их распространение возможно только в положительном направлении $\mathbf{b}$, определяемом условием (16). При этом возбуждение поверхностных волн возможно только при превышении внешним полем пороговых значений, определяемых разностью материальных параметров a и a' (см. также (25)). Таким образом, изменение как интенсивности внешнего магнитного поля, так и его направления позволяет эффективно воздействовать на угловые спектры разрешенных направлений распространения поверхностных волн.

Приложение. Расчет тензоров Γ и Γ'

В работах [5,6] операторный интегральный формализм, разработанный Барнеттом и Лоте [12] для поверхностных акустических волн, был перенесен на поверхностные электромагнитные возбуждения. Развитый в [5,6] подход позволяет единообразно рассчитывать тензоры импедансов поверхностных электромагнитных волн в непоглощающих анизотропных диэлектрических средах и с их помощью получать дисперсионные уравнения для таких волн. Для волн на границе анизотропных материалов с тензорами диэлектрических проницаемостей ε $(z = \mathbf{qr} < 0)$ и ε' $(z > 0)$ дисперсионное уравнение имеет вид (7), при этом

$$\Gamma = -Q^- + iQ^-S, \qquad \Gamma' = Q'^- + iQ'^-S'. \tag{A1}$$

В (A1) индекс $^-$ обозначает псевдообращение планальных тензоров в двумерном подпространстве границы раздела (т. е. $QQ^- = Q^-Q = I$, где $I = -\mathbf{q}^{\times 2} = \mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$ — проективный оператор). Тензоры Q, S имеют интегральное представление

$$Q = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^- d\phi, \quad S = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^-(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) d\phi. \tag{A2}$$

В подынтегральные выражения в (A2) входят тензорные билинейные формы двух векторных аргументов, определяемые для любых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ $(\mathbf{uv} = 0)$ следующим образом:

$$(\mathbf{uv}) = -\frac{\mathbf{u}\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + \nu^2 I\mathbf{u}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{v}^\times I}{\mathbf{a}\varepsilon^{-1}\mathbf{a} - \nu^2} + \nu^2\mathbf{bu}\cdot\mathbf{bv}I, \tag{A3}$$

при этом векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ выражаются через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}\cos\phi + \mathbf{q}\sin\phi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}\sin\phi + \mathbf{q}\cos\phi.$$

В (A3) $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{-1}$ — транспонированный взаимный тензор к ε^{-1} [9,10]; $\mathbf{bu}$, $\mathbf{bv}$ — скалярные произведения векторов.

Тензоры Q', S' также рассчитываются по формулам (A2) и (A3), при этом в (A3) вместо тензора ε входит ε'.

Подставляя выражение (2) для тензора ε^{-1} и $\mathbf{c} = \mathbf{b}\cos\alpha + \mathbf{a}\sin\alpha$ для вектора $\mathbf{c}$ в (A3), найдем Γ для фарадеевской изотропной среды. Мы учитываем, что тензоры вида (A3) планальные и представляем их в виде разложений по диадам-проекторам $\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$. Имеем $\mathbf{a}\varepsilon^{-1}\mathbf{a} = a$, $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{-1} = a^2 - b^2\mathbf{c}\otimes\mathbf{c} + iab\mathbf{c}^\times$ и из (A3) при $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{e}_2$ получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = (a-\nu^2)^{-1}\Big\{&\nu^2(a-\nu^2\sin^2\phi)\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\\ &- i\nu^2 b\cos\alpha\sin\phi\cos\phi(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\\ &- \big[(a-\nu^2)(a-\nu^2\sin^2\phi)\\ &- b^2\cos^2\alpha\sin^2\phi\big]\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\Big\}.\end{aligned} \tag{A4}$$

При $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = (a-\nu^2)^{-1}\Big\{&\nu^4\sin\phi\cos\phi\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\\ &+ i\nu^2 b\cos\alpha\cos^2\phi\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} + i\nu^2 b\cos\alpha\sin^2\phi\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\\ &- \big[\sin\phi\cos\phi\big(\nu^2(a-\nu^2) + b^2\cos^2\alpha\big)\\ &+ ib\sin\alpha(a-\nu^2)\big]\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\Big\}.\end{aligned}$$

Для расчета $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^-$ представляем тензор $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)$ (A4) в виде 2×2-матрицы и обращаем ее

$$(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^- = (a-\nu^2\sin^2\phi - b\cos\alpha\sin\phi)^{-1}$$
$$\times (a-\nu^2\sin^2\phi + b\cos\alpha\sin\phi)^{-1}$$
$$\times\Big\{\frac{1}{\nu^2}\big[(a-\nu^2)(a-\nu^2\sin^2\phi) - b^2\cos^2\alpha\sin^2\phi\big]\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$$
$$- ib\cos\alpha\sin\phi\cos\phi(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$$
$$-(a-\nu^2\sin^2\phi)\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\Big\}. \tag{A5}$$

Находим произведение тензоров $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^-$ и $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$

$$(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)^-(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = (a-\nu^2\sin^2\phi - b\cos\alpha\sin\phi)^{-1}$$
$$\times(a-\nu^2\sin^2\phi + b\cos\alpha\sin\phi)^{-1}$$
$$\times\Big\{\nu^2(a-\nu^2\sin^2\phi)\sin\phi\cos\phi\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$$
$$+ ib\cos\alpha\cos\phi(a\cos\phi + ib\sin\alpha\sin\phi)\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$$
$$- i\nu^2 b\cos\alpha\sin^2\phi\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \big[(\nu^2(a-\nu^2\sin^2\phi)$$
$$+ b^2\cos^2\alpha)\sin\phi\cos\phi$$
$$+ ib\sin\alpha(a-\nu^2\sin^2\phi)\big]\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\Big\}. \tag{A6}$$

Тензоры Q и S (A2), очевидно, выражаются через интегралы

$$J_{(00;\,11;\,20;\,02;\,31)} = \frac{1}{\pi}$$
$$\times\int\limits_0^\pi \frac{(1;\,\sin\phi\cos\phi;\,\sin^2\phi;\,\cos^2\phi;\,\sin^3\phi\cos\phi)d\phi}{(a-\nu^2\sin^2\phi - b\cos\alpha\sin\phi)(a-\nu^2\sin^2\phi + b\cos\alpha\sin\phi)}, \tag{A7}$$

Причем $J_{02} = J_{00} - J_{20}$ и $J_{11} = J_{31} = 0$. Предлполагается, что знаменатель подынтегрального выражения в (A7) не обращается в нуль ни при каких значениях ϕ, т.е. тензоры Q, S, Γ определены при условии

$$0 \le \nu^2 < \nu_L^2 \equiv a - b|\cos\alpha|. \tag{A8}$$

Величина ν_L называется предельной частотой [6]. Физический смысл условия (A8) заключается в том, что каждая из парциальных волн в фарадеевской среде локализована вблизи границы раздела, т.е. не является объемной. Вводя переменную интегрирования $x = \mathrm{ctg}\,\phi$, получим

$$J_{(00;\,20)} = \frac{1}{\pi a^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x^2;\,1)dx}{(x-i\eta_1)(x+i\eta_1)(x-i\eta_2)(x+i\eta_2)},$$

где величины η_1, η_2 даются формулами (9) и представляют собой коэффициенты затухания парциальных волн.

Для J_{00} и J_{20} окончательно находим

$$J_{00} = \frac{1}{a^2(\eta_1+\eta_2)}\left(1 + \frac{1}{\eta_1\eta_2}\right),$$
$$J_{20} = \frac{1}{a^2\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2)}. \tag{A9}$$

Далее, подставляя формулы (A5) и (A6) в (A2) с учетом (A9), получаем выражения для тензоров Q и S

$$Q = \frac{1}{a(\eta_1+\eta_2)}\bigg[-\frac{1}{\nu^2}(a-\nu^2 + a\eta_1\eta_2)\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$$
$$+\left(1 + \frac{a-\nu^2}{a\eta_1\eta_2}\right)\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\bigg], \tag{A10}$$

$$S = \frac{ib}{a(\eta_1+\eta_2)}\bigg[-\cos\alpha\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} + \frac{\nu^2\cos\alpha}{a\eta_1\eta_2}\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$
$$-\sin\alpha\left(1 + \frac{a-\nu^2}{a\eta_1\eta_2}\right)\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\bigg]. \tag{A11}$$

Для тензора Q^- имеем

$$Q^- = \frac{a(\eta_1+\eta_2)}{a-\nu^2 + a\eta_1\eta_2}(-\nu^2\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + a\eta_1\eta_2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}). \tag{A12}$$

Из (A11), (A12) и (A1) получается выражение (8) для тензора Γ фарадеевской оптически активной среды.

Тензор Γ' для другой пограничной среды можно найти, заменив в формулах (9), (A11), (A12) величину a на a' и положив $b = 0$. Тогда

$$Q'^- = -\nu^2\sqrt{\frac{a'}{a'-\nu^2}}\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + \sqrt{a'(a'-\nu^2)}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}, \quad S' = 0,$$

а тензор Γ' совпадает с Q'^-.

Список литературы

[1] Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред / Под ред. В.М. Аграновича. Д.Л. Миллса. М.: Наука, 1985. 526 с.

[2] *Дьяконов М.И.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 4. С. 119–123.

[3] *Аверкиев Н.С., Дьяконов М.И.* // Опт. и спектр. 1990. Т. 68. Вып. 5. С. 1118–1121.

[4] *Даринский А.Н.* // Кристаллография. 2001. Т. 46. № 5. С. 916–918.

[5] *Furs A.N., Barkovsky L.M.* // Microwave and Opt. Technol. Lett. 1997. Vol. 14. P. 301–305.

[6] *Furs A.N., Barkovsky L.M.* // J. Opt. A. 1999. Vol. 1. P. 109–115.

[7] *Фурс А.Н., Барковский Л.М.* // Кристаллография. Т. 46. № 6. С. 1102–1109.

[8] *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.

[9] *Федоров Ф.И.* Оптика анизотропных сред. Минск: Изд-во АН БССР, 1958. 380 с.

[10] *Федоров Ф.И.* Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976. 456 с.

[11] *Barkovsky L.M., Borzdov G.N., Lavrinenko A.V.* // J. Phys. A. 1987. Vol. 20. P. 1095–1106.

[12] *Lothe J., Barnett D.M.* // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47. P. 428–433.