

Нелинейная динамика контактной границы сплошных сред с различной плотностью

© Н.Б. Волков, А.Е. Майер, А.П. Яловец

Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: nbv@ami.uran.ru, nbv@ier.uran.ru

(Поступило в Редакцию 27 апреля 2002 г. В окончательной редакции 16 сентября 2002 г.)

Путем редукции гидродинамического течения в объеме, занятом одной или двумя жидкостями с разными плотностями, к динамике свободной или контактной границы получены динамические уравнения, описывающие их эволюцию. Эти уравнения позволяют достаточно просто и экономично исследовать существенно нелинейные стадии неустойчивости свободных и контактных границ. Показано, что сколь угодно малое возмущение свободной поверхности приводит за конечное время к формированию и отрыву капли. Соответственно сколь угодно малое возмущение контактной границы сред с разной плотностью приводит за конечное время к формированию и последующему отрыву крупномасштабного вихря тяжелой жидкости. Полученные теоретические результаты качественно и количественно согласуются с экспериментами, выполненными в [1,2].

Введение

Теоретическое исследование устойчивости свободной или контактной границы между двумя сплошными средами (жидкостями) с различной плотностью в гравитационном поле (гравитационной неустойчивости Рэлея–Тейлора) или в магнитном поле (магнитогиродинамической (МГД) неустойчивости Рэлея–Тейлора) [3], ускорением с помощью ударной волны или импульса внешнего давления произвольной формы (неустойчивости Рихтмайера–Мешкова [4,5]) представляет большой научный и практический интерес [6,7], в частности, для генерации мощного импульсного рентгеновского излучения из плазмы [8], для модификации поверхности твердых тел воздействием интенсивных пучков заряженных частиц [9–11]. Существенно нелинейные стадии, в том числе вихревая, обычно исследуются численно, при этом на контактной границе задается начальное распределение точечных вихрей (так называемый вихревой метод [12]), или распределение вихрей малого конечного размера (так называемый метод вихревых капель [13]). Эти подходы, несмотря на их продуктивность, содержат существенный недостаток, связанный с неопределенностью задания начального распределения вихрей по контактной поверхности и по размерам. Целью предлагаемой работы является разработка метода исследования динамики контактной границы, не требующего для своей реализации задания на ней распределения точечных или конечного размера вихрей. За основу нашего подхода взят метод, предложенный нами в работе [14] для расчета безвихревой стадии нелинейной динамики контактной границы. При этом, как показано в работах [4,14–16], динамику контактной границы можно с хорошим приближением исследовать, считая жидкости несжимаемыми.

Динамические уравнения свободной и контактной границ

Обсудим вначале на примере идеальной несжимаемой жидкости, занимающей объем, ограниченный сверху поверхностью $F(X, Z, t) = 0$ (здесь и далее координаты точек границы обозначаются посредством X, Z), редукцию гидродинамического течения жидкости в объеме к динамике ее границы. Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости имеют вид [17]

$$(\nabla, \mathbf{v}) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\Omega, \mathbf{v}] = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + G \right), \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = \{v_x(x, z, t), 0, v_z(x, z, t)\}$ — гидродинамическая скорость; $\Omega = [\nabla, \mathbf{v}] = \{0, \Omega(x, z, t), 0\}$ — завихренность; $P(x, z, t)$ — давление; $G(x, z, t)$ — потенциал внешнего поля.

Согласно хорошо известной теореме Гельмгольца, можно положить $\mathbf{v} = \nabla \varphi + [\nabla, \mathbf{A}]$ ($\varphi(x, z, t)$ — скалярный потенциал скорости; $\mathbf{A} = \{0, -\psi(x, z, t), 0\}$ — ее векторный потенциал, удовлетворяющий кулоновской калибровке $(\nabla, \mathbf{A}) = 0$). Тогда из (1) следует, что скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi(x, z, t) = 0. \quad (3)$$

Применяя к уравнению (2) операцию $[\nabla, \mathbf{v}]$, получим для завихренности $\Omega = \Delta \psi$ уравнение

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \Delta \psi = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что если в начальный момент времени завихренность $\Omega(x, z, 0) =$

$= \Delta\psi(x, z, 0) = 0$, то она равна нулю и в любой другой момент времени

$$\Omega(x, z, t) = \Delta\psi(x, z, t) = 0. \quad (5)$$

Завихренность в идеальной несжимаемой жидкости может появиться лишь в результате неустойчивости ее свободной или контактной границы [18] и конвективного вноса ее в запрещенную область. Именно последнее соображение побудило авторов работ [12,13] для расчета вихревой стадии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова контактной границы задать на ней в начальный момент времени распределение точечных [12] или конечного размера [13] вихрей. Ниже мы покажем, что в этом нет необходимости.

Из уравнения (2) с учетом (5) следует уравнение Бернулли [17], справедливое и на свободной границе ($P(X, Z, t) = 0$ [17,19])

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{(x,z)} = -\frac{v^2(X, Z, t)}{2} - G(X, Z, t) = 0. \quad (6)$$

Уравнение Бернулли (6) и так называемое кинематическое условие [19] $D(X, Z, t) - (\mathbf{v}(X, Z, t), \mathbf{n}(X, Z, t)) = 0$ (D — фазовая скорость границы, \mathbf{n} — вектор нормали к ней), согласно которому точки границы „вморожены“ в жидкость, являются граничными условиями на свободной поверхности для уравнения Лапласа. На нижней границе $z = -\infty$ области решения скорости и потенциалы обращаются в нуль. На левой и правой границах задаются периодические граничные условия — равенство скоростей и потенциалов в точках $x = 0$ и $x = \lambda$.

На существенно нелинейных стадиях развития неустойчивости границы возможна ситуация, когда динамика границы не может быть однозначно описана функцией одной переменной X . В случае крупномасштабного возмущения („крупномасштабность“ лимитируется снизу условиями существования в произвольной точке границы касательного ($\boldsymbol{\tau}(X, Z, t)$) и нормального ($\mathbf{n}(X, Z, t)$) векторов, а также условиями применимости гидродинамического приближения) границу следует описывать параметрически, используя две функции: $x = X(l, t)$ и $z = Z(l, t)$ (l — длина контура границы от некоторой выделенной точки). Все остальные характеристики жидкости, определенные на границе, также являются функциями l и t . Согласно кинематическому условию, точки границы „вморожены“ в жидкость и движутся со скоростью $\mathbf{v}(X, Z, t)$. Следовательно, значени параметра l , соответствующее фиксированной точке границы, также меняется во времени: $l = l(l_0, t)$, где l_0 — некоторая лагранжева координата фиксированной точки границы, например значение l в начальный момент времени. При этом

$$\frac{dX(l, t)}{dt} = v_x(l, t), \quad (7)$$

$$\frac{dZ(l, t)}{dt} = v_z(l, t). \quad (8)$$

Векторы $\boldsymbol{\tau}(l, t)$ и $\mathbf{n}(l, t)$ определяются соотношениями

$$\tau_x(l, t) = n_z(l, t) = \frac{\partial X}{\partial l} \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (9)$$

$$\tau_z(l, t) = -n_x(l, t) = \frac{\partial Z}{\partial l} \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Учитывая, что $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \partial\varphi(l, t)/\partial l$ и $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\partial\psi(l, t)/\partial l$, а также (9) и (10), получим связь скоростей с производными потенциала φ и функции тока ψ вдоль границы

$$\begin{aligned} v_x(l, t) &= \frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial l} \tau_x(l, t) + \frac{\partial\psi(l, t)}{\partial l} \tau_z(l, t) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} + \frac{\partial\psi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} \right) \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_z(l, t) &= \frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial l} \tau_z(l, t) - \frac{\partial\psi(l, t)}{\partial l} \tau_x(l, t) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} - \frac{\partial\psi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} \right) \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полная производная потенциала в фиксированной движущейся точке границы и его частная производная связаны соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(l, t)}{dt} &= \frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial t} + v_x(l, t) \frac{dX}{dl} + v_z(l, t) \frac{dZ}{dl} \\ &= \frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial t} + v^2(l, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где второе слагаемое учитывает изменение потенциала в результате перемещения точки наблюдения.

Соотношения (11)–(13) позволяют записать уравнение Бернулли (6) в виде

$$\frac{d\varphi(l, t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\varphi(l, t)}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi(l, t)}{\partial l} \right)^2 \right) - G(l, t). \quad (14)$$

Следуя нашей работе [14], будем описывать эволюцию свободной поверхности без расчета для течения в объеме жидкости. Принципиальную возможность осуществления такого подхода обеспечивает то, что потенциал скорости φ и функция потока ψ являются гармоническими функциями и, следовательно, полностью определяются граничными условиями. Для этого необходимо определить по значению потенциала на границе $\varphi(l, t)$ его нормальную производную, или, что эквивалентно, установить связь $\psi(l, t)$ с $\varphi(l, t)$.

В работе [20] для решения уравнения Лапласа в области со сложной границей использовались конформные преобразования. Выполним преобразование координат

$(x, z) \rightarrow (\xi, \eta)$. Уравнение (3) в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} |\nabla_{(x,z)} \xi|^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} |\nabla_{(x,z)} \eta|^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} (\nabla_{(x,z)} \xi, \nabla_{(x,z)} \eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Delta_{(x,z)} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Delta_{(x,z)} \eta = 0. \quad (15)$$

Для того чтобы уравнение (15) в переменных (ξ, η) также имело вид уравнения Лапласа $\Delta_{(\xi,\eta)} \varphi(\xi, \eta) = 0$, необходимо выполнение следующих условий:

$$|\nabla_{(x,z)} \xi|^2 = |\nabla_{(x,z)} \eta|^2, \quad (16)$$

$$(\nabla_{(x,z)} \xi, \nabla_{(x,z)} \eta) = 0, \quad (17)$$

$$\Delta_{(x,z)} \xi = 0, \quad \Delta_{(x,z)} \eta = 0. \quad (18)$$

Поскольку у нас имеется произвол в выборе новой системы координат, положим

$$\nabla_{(x,z)} \eta = [\nabla_{(x,z)} \xi, \mathbf{e}_y]. \quad (19)$$

Тогда условия (16), (17) и второе из уравнений (18) выполняются автоматически.

Интересующее нас преобразование координат должно не только оставлять неизменным вид уравнения Лапласа, но и переводить занимаемую жидкостью область в полуплоскость, например, $\eta \leq 0$. Определим единичный касательный вектор к границе $\boldsymbol{\tau}$ соотношением

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla_{(x,z)} \xi \Big|_{(X(l), Z(l))}. \quad (20)$$

Тогда из (19) $\nabla_{(x,z)} \eta \Big|_{(X(l), Z(l))} = \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе. Следовательно, вдоль границы $\partial \eta / \partial l = (\nabla_{(x,z)} \eta, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и на границе координата η имеет некоторое постоянное значение, которое можно положить равным нулю. Такое преобразование координат действительно переводит занимаемую жидкостью область в полуплоскость $\eta \leq 0$. Значение переменной ξ на границе может быть определено из соотношения для ее производной вдоль границы $\partial \xi / \partial l = (\nabla_{(x,z)} \xi, \boldsymbol{\tau}) = 1$. Интегрируя это соотношение вдоль контура, с точностью до константы получаем

$$\xi(X(l), Z(l)) = l. \quad (21)$$

В качестве еще одного граничного условия можно, например, положить

$$\xi(x, z) \rightarrow x \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (22)$$

Первое из уравнений (18) вместе с граничными условиями (21) и (22) представляет собой первую краевую задачу для уравнения Лапласа для функции $\xi(x, z)$ и, следовательно, имеет единственное решение. Таким образом, возможно преобразование координат (ξ, η) , удовлетворяющее условиям (19), (20) и не изменяющее вид уравнения Лапласа. Заданное условиями (19),

(20) преобразование переводит занимаемую жидкостью область в полуплоскость. Следует отметить, что задача о нахождении конкретного вида такого преобразования является не менее сложной, нежели исходная, поскольку также требует решения уравнения Лапласа в области со сложной геометрией. К счастью, для установления связи между значением гармонической функции на границе и величиной ее нормальной производной не требуется нахождение явного вида $\xi(x, z)$, $\eta(x, z)$. Существенными для этой цели свойствами данного преобразования является то, что вдоль границы $\xi = l$, $\eta = 0$ и $(\mathbf{n}, \nabla) = \partial / \partial \eta$. Последнее равенство вытекает из того факта, что, по определению, $\nabla_{(x,z)} \xi$ и $\nabla_{(x,z)} \eta$ являются векторами взаимного базиса [21]. Поскольку вдоль границы эта система векторов ортонормирована, то в точках границы локальный базис совпадает со взаимным $\mathbf{e}_\xi \Big|_{(X(l), Z(l))} = \nabla_{(x,z)} \xi \Big|_{(X(l), Z(l))} = \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}_\eta \Big|_{(X(l), Z(l))} = \nabla_{(x,z)} \eta \Big|_{(X(l), Z(l))} = \mathbf{n}$. Тогда производная $\partial / \partial \eta = (\mathbf{e}_\eta, \nabla) = (\mathbf{n}, \nabla)$ в точках границы.

Затухающее при $\eta \rightarrow -\infty$ решение уравнения Лапласа для функции $\varphi(\xi, \eta)$ в области $\eta \leq 0$ может быть записано через значение $\varphi(\xi, 0, t)$ в виде

$$\varphi(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi', 0, t) e^{|k|\eta} \cos(k(\xi - \xi')) d\xi'.$$

Дифференцируя это соотношение по η , получаем с учетом (19), (20) и (21) следующее выражение для нормальной производной φ к границе

$$(\mathbf{n}, \nabla \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \hat{k} \varphi \Big|_{\eta=0}, \quad (23)$$

где \hat{k} — интегральный оператор [22]

$$\hat{k} f(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |k| dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(l') \cos(k(l - l')) dl'. \quad (24)$$

Важными свойствами оператора k и обратного ему оператора \hat{k}^{-1} являются следующие:

$$\hat{k} e^{ikl} = |k| e^{ikl}, \quad \hat{k}^{-1} e^{ikl} = \frac{1}{|k|} e^{ikl},$$

Функция потока ψ также удовлетворяет уравнению Лапласа (5). Учитывая, что $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{n}, \nabla \psi)$, запишем

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \hat{k} \psi \Big|_{\eta=0}.$$

С другой стороны, касательная компонента скорости $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \partial \varphi(l, \eta = 0) / \partial l$. Отсюда следует связь функции тока с производной потенциала (здесь и ниже мы рассматриваем только величины на границе, опуская аргумент $\eta = 0$)

$$\psi(l, t) = \hat{k}^{-1} \frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial l}. \quad (25)$$

Соотношение (25) справедливо для гладкого контура, в каждой точке которого определены нормальный и касательный векторы.

Используя разложение потенциала на границе в ряд Фурье по l , уравнение (25) можно переписать в виде

$$\psi(l, t) = \frac{2}{L(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{L(t)} \varphi(l', t) \sin(nK(t)(l' - l)) dl', \quad (26)$$

где $L(t)$ — текущая полная длина контура; $K(t) = 2\pi/L(t)$ — соответствующее ей волновое число.

Уравнения (7), (8), (14) с учетом соотношений (11), (12) и (25) (или (26)) составляют замкнутую систему для описания эволюции свободной поверхности жидкости.

Рассмотрим систему двух идеальных несжимаемых жидкостей с разной плотностью. Пусть сверху над жидкостью с плотностью ρ^+ находится жидкость с плотностью ρ^- , причем $\rho^- < \rho^+$. Все величины, относящиеся к легкой или тяжелой жидкости, будем ниже обозначать индексами „-“ или „+“ соответственно. В этом случае выражениям (6), (11), (12) и (25) соответствуют следующие уравнения:

$$\frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi^{\pm}}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{\pm}}{\partial l} \right)^2 \right) - \frac{P^{\pm}}{\rho^{\pm}} - G(l, t), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} v_x^{\pm}(l, t) &= \frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \tau_x(l, t) + \frac{\partial \psi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \tau_z(l, t) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} + \frac{\partial \psi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} \right) \\ &\quad \times \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} v_z^{\pm}(l, t) &= \frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \tau_z(l, t) - \frac{\partial \psi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \tau_x(l, t) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} - \frac{\partial \psi^{\pm}(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} \right) \\ &\quad \times \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\psi^{\pm}(l, t) = \pm \hat{k}^{-1} \frac{\partial \varphi^{\pm}(l, t)}{\partial l}. \quad (30)$$

Положим, что точки контактной границы „вморожены“ в тяжелую жидкость. Тогда

$$\frac{dX(l, t)}{dt} = v_x^+(l, t), \quad (31)$$

$$\frac{dZ(l, t)}{dt} = v_z^+(l, t). \quad (32)$$

Кинематическое условие в этом случае имеет вид [17,19] $D - (\mathbf{v}^+, \mathbf{n}) = D - (\mathbf{v}^-, \mathbf{n}) = 0$, откуда следует непрерывность нормальных скоростей жидкостей на контактной границе $(\mathbf{v}^+, \mathbf{n}) = (\mathbf{v}^-, \mathbf{n}) = 0$ или $\partial \psi^+ / \partial l = \partial \psi^- / \partial l$. Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\psi^+(l, t) = \psi^-(l, t). \quad (33)$$

С учетом (33) из (30) следует, что $\partial \varphi^+ / \partial l = -\partial \varphi^- / \partial l$. Интегрируя, получаем, что на контактной границе

$$\varphi^+(l, t) = -\varphi^-(l, t). \quad (34)$$

Равенство нормальных скоростей приводит также к равенству давлений на контактной границе [17,19]: $P^+(l, t) = P^-(l, t) = P(l, t)$.

Полная производная потенциала $\varphi^+(l, t)$ по времени связана с его частной производной соотношением

$$\frac{d\varphi^+}{dt} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} + (v^+)^2 = \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial l} \right)^2. \quad (35)$$

Соответственно полная производная потенциала $\varphi^-(l, t)$ по времени определяется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^-}{dt} &= \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} + v_x^- \frac{dX}{dt} + v_z^- \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} + v_x^- v_x^+ + v_z^- v_z^+ \\ &= \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial l} \frac{\partial \varphi^+}{\partial l} + \frac{\partial \psi^-}{\partial l} \frac{\partial \psi^+}{\partial l}. \end{aligned} \quad (36)$$

Соотношения (35) и (36) позволяют записать уравнения Бернулли (27) в виде

$$\frac{d\varphi^+(l, t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{P}{\rho^+} - G(l, t), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^-(l, t)}{dt} &= \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \frac{\partial \varphi^+}{\partial l} + \frac{\partial \psi^-}{\partial l} \frac{\partial \psi^+}{\partial l} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi^-}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^-}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{P}{\rho^-} - G(l, t). \end{aligned} \quad (38)$$

Исключая из (37) и (38) давление и учитывая равенства (33) и (34), получаем уравнение для потенциала скорости тяжелой жидкости на контактной границе

$$\frac{d\varphi^+(l, t)}{dt} = \frac{A}{2} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial l} \right)^2 + \left(1 - \frac{A}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial l} \right)^2 - AG(l, t), \quad (39)$$

где $A = (\rho^+ - \rho^-) / (\rho^+ + \rho^-)$ — число Атвуда.

Следовательно, воздействие легкой жидкости на динамику тяжелой изменяет вид уравнения Бернулли (39) по сравнению с уравнением (14) для свободной поверхности. Уравнения (31), (32) и (39) совместно с равенствами (28)–(30), записанными для тяжелой жидкости, составляют замкнутую систему. Ниже мы будем опускать индекс „+“ и всегда рассматривать систему двух жидкостей. В этом случае системе уравнений,

описывающей динамику свободной поверхности, соответствует число Атвуда $A = 1$.

Таким образом, нами получена следующая замкнутая система динамических уравнений контактной границы двух идеальных несжимаемых жидкостей с разной плотностью

$$\frac{d\varphi(l, t)}{dt} = \frac{A}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right)^2 + \left(1 - \frac{A}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)^2 - AG(l, t), \quad (40)$$

$$\frac{dX(l, t)}{dt} = v_x(l, t) = \left(\frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} + \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} \right) \times \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (41)$$

$$\frac{dZ(l, t)}{dt} = v_z(l, t) = \left(\frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial Z}{\partial l} - \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial X}{\partial l} \right) \times \left(\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (42)$$

$$\psi(l, t) = \frac{2}{L(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{L(t)} \varphi(l', t) \sin(nK(t)(l' - l)) dl'. \quad (43)$$

Метод решения, вычислительный эксперимент

Система (40)–(43), несмотря на свою простоту, сложна для аналитического решения. Поэтому она решалась нами численно. Контур границы задавался набором точек $X_i(t)$, $Z_i(t)$, $i \in [0, I_0]$ так, чтобы расстояния между соседними точками были одинаковы $l_{i+1}(t) - l_i(t) = h(t) = L(t)/(I_0 - 1)$. Зависимость от времени также задавалась дискретным образом: $l_i^{(m)} = l_i(t^m)$, $\varphi_i^{(m)} = \varphi(l_i^{(m)}, t^m)$, $\psi_i^{(m)} = \psi(l_i^{(m)}, t^m)$ и т.д.

Взятие интеграла по конечно-разностной сетке в уравнении (43) приводит к следующему результату:

$$\psi_j(t) = \sum_{i=1}^{I_0-1} \varphi_i(t) \left\{ \Lambda \left(\frac{l_j(t) - l_{i+\frac{1}{2}}(t)}{L(t)} \right) - \Lambda \left(\frac{l_j(t) - l_{i-\frac{1}{2}}(t)}{L(t)} \right) \right\}, \quad (44)$$

где

$$\Lambda(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(2\pi ny). \quad (45)$$

Эта функция периодическая $\Lambda(y + 1) = \Lambda(y)$ и четная $\Lambda(-y) = \Lambda(y)$. При вычислениях суммирование в формуле (45) ведется до некоторого числа N . Равномерность расчетной сетки по l дает возможность просчитать один раз функцию $\Lambda_{i+\frac{1}{2}} = \Lambda((i + \frac{1}{2})/(I_0 - 1))$, $i = 0, \dots, (I_0 - 1)$ и использовать ее далее с учетом свойств четности и симметричности для преобразования

потенциала скорости в функцию тока (44). Такой подход позволяет учитывать в преобразовании любое количество гармоник.

Переход от одного временного слоя к другому осуществлялся в два этапа: на первом этапе смещались точки границы и определялось новое значение потенциала; на втором производилась регуляризация расчетной сетки. Таким образом, на первом этапе интегрируются по времени уравнения (40)–(42)

$$\tilde{X}_i^{(m+1)} = X_i^{(m)} + \Delta t (v_x)_i^{(m+1)}, \quad (46)$$

$$\tilde{Z}_i^{(m+1)} = Z_i^{(m)} + \Delta t (v_z)_i^{(m+1)}, \quad (47)$$

$$\tilde{\varphi}_i^{(m+1)} = \varphi_i^{(m)} + \Delta t \left\{ \frac{A}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right)^2 + \left(1 - \frac{A}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)^2 - AG \right\}_i^{(m+1)}, \quad (48)$$

где Δt — шаг по времени.

Для повышения устойчивости интегрирование производилось неявным методом, а решение уравнений (46)–(48) осуществляется методом последовательных приближений. Шаг по времени постоянен и выбирается малым по сравнению с характерным временем эволюции границы. Дополнительным критерием проверки правильности выбора шага является сходимость решения уравнений (46)–(48) за приемлемое количество итераций (например, не более 10). После определения нового положения точек границы рассчитывается новое значение параметра $\tilde{l}_i^{(m+1)}$ как расстояние вдоль контура от начальной точки $(\tilde{X}_0^{(m+1)}, \tilde{Z}_0^{(m+1)})$ до текущей $(\tilde{X}_i^{(m+1)}, \tilde{Z}_i^{(m+1)})$, а также новая полная длина контура $\Lambda^{(m+1)}$.

На втором этапе сетка перестраивается таким образом, чтобы восстанавливалась равномерность распределения лагранжевых точек по l . Для этого наносилась новая расчетная сетка $l_i^{(m+1)} = \Lambda^{(m+1)}(i - 1)/(I_0 - 1)$. Все величины $(X_i^{(l+1)}, Z_i^{(l+1)}, \varphi_i^{(l+1)})$ и т.д. в точках новой сетки вычислялись через величины $(\tilde{X}_i^{(l+1)}, \tilde{Z}_i^{(l+1)}, \tilde{\varphi}_i^{(l+1)})$ и т.д.), заданные на старой сетке $\tilde{l}_i^{(m+1)}$ при помощи линейной интерполяции по l . Производимая на каждом временном шаге регуляризация сетки позволила нам избежать излишнего сгущения или разрежения расчетных точек.

Описанный метод был использован нами для расчета эволюции контактной границы при развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова возникает при прохождении ударной волны через границу раздела жидкостей разной плотности. В постановке задачи для несжимаемой жидкости воздействие ударной волны заменяется полем сил инерции $G(X, Z, t) = -g(t)Z$, где $g(t) = U\delta(t)$ — импульс ускорения, U — переданная ударной волной среде скорость. Интегрируя уравнение Бернулли (40) по

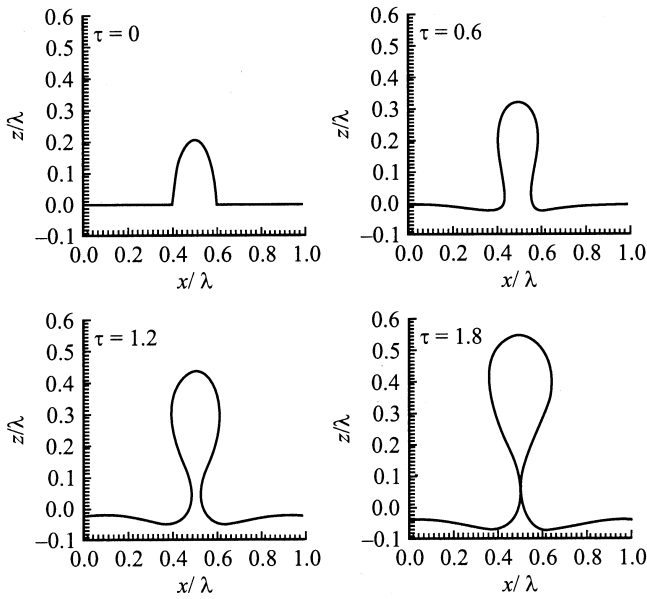


Рис. 1. Начальное возмущение и его эволюция вследствие развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова на свободной поверхности ($A = 1, U = 1$).

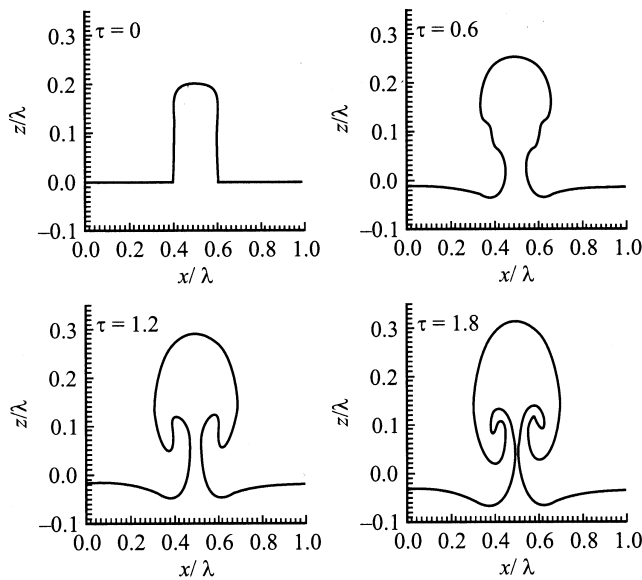


Рис. 2. То же, что на рис. 1, на границе двух жидкостей ($A = 0.1, U = 1$).

времени от $t = -0$ до $+0$, получаем начальное условие для потенциала скорости

$$\varphi(l, t = +0) = AU Z(l, 0). \quad (49)$$

Линейная теория [4] предсказывает постоянную скорость роста амплитуды возмущения $\dot{Z}_{RM} = AU ka_0$. Для описания эволюции границы удобно пользоваться безразмерным временем $\tau = (k^2 AU a_0)t$, где a_0 — либо амплитуда начального гармонического возмущения

$Z(l, 0) = a_0 \cos(kX(l, 0))$, либо начальная высота возмущения над осью OX , если оно имеет сложную форму.

На рис. 1 и 2 приведены начальные возмущения и их эволюция с течением времени для случая свободной поверхности $A = 1$ и границы между двумя жидкостями близкой плотности (для $A = 0.1$) соответственно. Видно, что даже в случае свободной поверхности граница с течением времени перестает быть однозначной функцией x в отличие от результатов работы [12]. Вместо этого удлинившаяся струя жидкости превращается в каплю и при $\tau \approx 1.8$ отрывается от основной массы жидкости. Следует отметить, что образование капель на свободной поверхности наблюдается при любой амплитуде начального возмущения. При $A = 0.1$ струя тяжелой жидкости, проникающей в легкую, образует не каплю, а грибообразную вихревую структуру. Однако при $\tau \approx 2$ также наступает перетяжка ножки гриба.

На рис. 3 приведены зависимости от безразмерного времени нормированных на линейную скорости роста струи Γ_S и пузыря Γ_B для свободной поверхности ($A = 1$) при различных амплитудах начального гармонического возмущения: $a_0 k = 0.005$, $a_0 k = 0.5$. Для сравнения на график нанесены аналитические результаты [16], соответствующие бесконечно малому начальному возмущению, а также результаты расчетов вихревым методом [12]. Наши расчеты показывают, что для малого начального возмущения ($a_0 k = 0.005$) скорость роста струи с течением времени становится постоянной величиной $\Gamma_S \approx 3.5$. Скорость роста пузыря изменяется сложным образом: сначала уменьшается, после $\tau = 0.6$ начинает расти, затем при $\tau > 1.9$ снова начинает медленно уменьшаться. В [12] скорость роста струи для

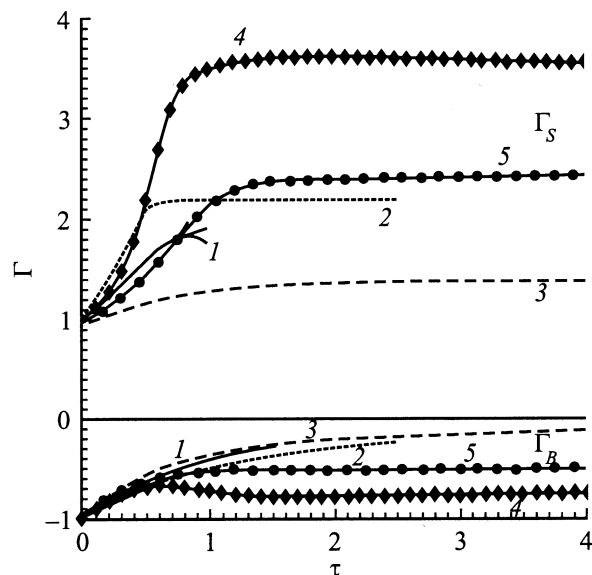


Рис. 3. Нормированные на линейную скорости роста пузыря Γ_B и струи Γ_S для свободной поверхности. 1 — [16]; 2 и 3 — расчеты по вихревому методу [12] для $a_0 k = 0.005$ и $a_0 k = 0.5$; 4 и 5 — наши расчеты для тех же начальных возмущений соответственно.

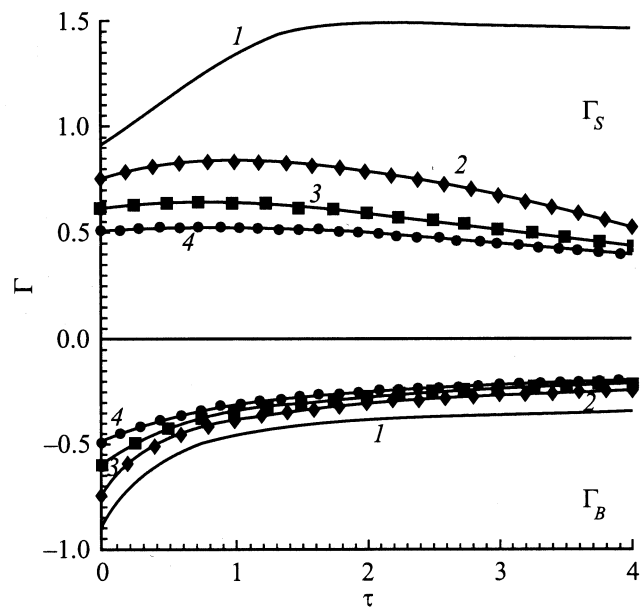


Рис. 4. Динамика свободной поверхности ($A = 1$) при различной амплитуде начального возмущения. 1–4 — для коэффициентов нелинейности начального возмущения $a_0k = 1, 2, 3$ и 4 соответственно.

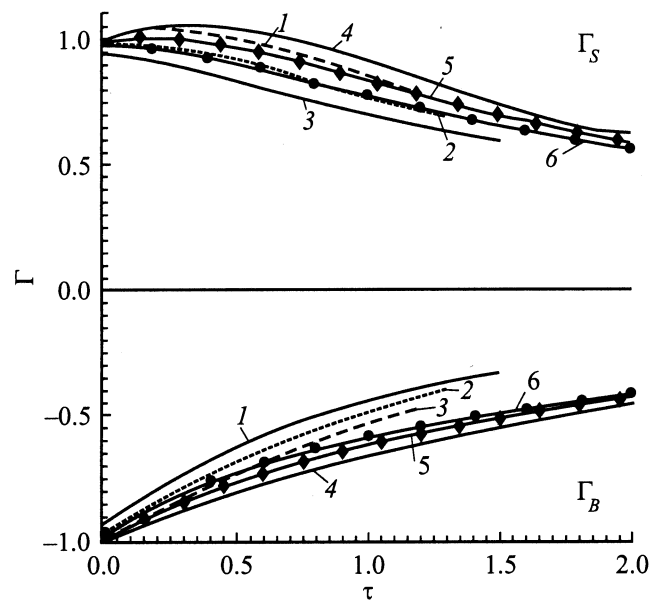


Рис. 5. Динамика контактной границы для $A = 0.33$. 1–3 — расчеты по вихревому методу [12] для $a_0k = 0.1, 0.3$ и 0.5; 4–6 — соответствующие им результаты наших расчетов.

этого случая становится постоянной, но ее установившееся значение ≈ 2.2 , а скорость пузыря монотонно стремится к нулю. При $a_0k = 0.5$ в наших расчетах, как и в [12], устанавливается постоянная скорость роста струи, причем ее значение $\Gamma_S \approx 2.4$ существенно ниже, чем в случае малого начального возмущения. Скорость пузыря при $a_0k = 0.5$ в наших расчетах монотонно

уменьшается. В целом наши расчеты дают большие скорости роста, чем в [12,16].

При дальнейшем увеличении начальной амплитуды (рис. 4) изменяются как начальное значение скоростей, так и их дальнейшая динамика. Скорости роста пузыря со временем стремятся к нулю и вид кривых для $a_0k = 1-4$ примерно одинаков. Скорость струи для

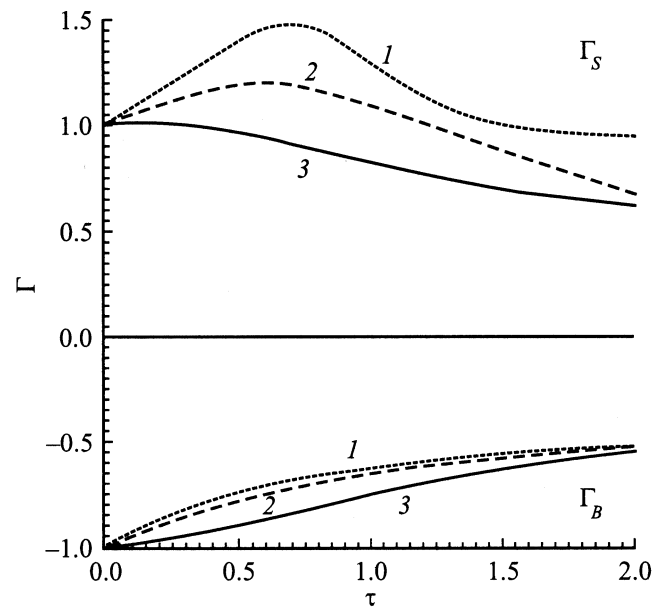


Рис. 6. Динамика контактной границы при различных числах Атвуда: $A = 0.7$ (1), 0.5 (2) и 0.1 (3). Начальная амплитуда $a_0k = 0.005$.

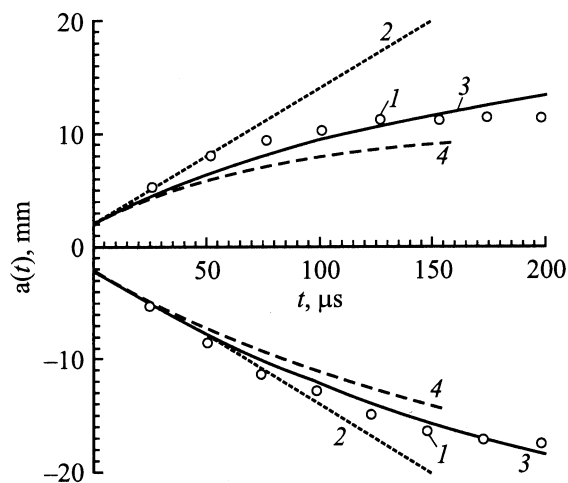


Рис. 7. Зависимость координаты вершины струи (отрицательные числа) и пузыря (положительные числа) от времени для экспериментов Зайцева [1]. Ударная волна проходит из аргона в ксенон. Скорость ударной волны $D = 1273$ м/с, приращение скорости среды $U = 764$ м/с, число Атвуда $A = 0.45$ [13]. Начальное возмущение: $a_0 = 5$ мм и $\lambda = 36$ мм. Кружки 1 — экспериментальные результаты Зайцева [1], 2 — линейная теория [4], 3 — результаты наших расчетов, 4 — расчеты методом вихревых капель [13].

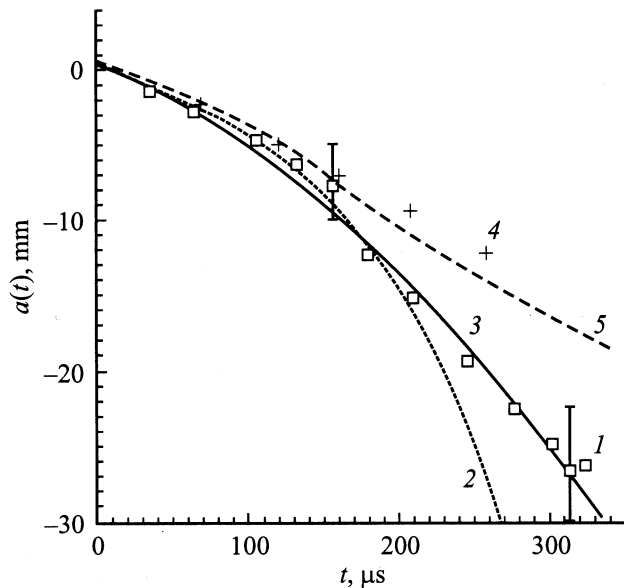


Рис. 8. Зависимости средней амплитуды границы раздела от времени $a(t) = 0.5(|Z_S(t)| + |Z_B(t)|)$ для экспериментов Василенко [2,13]. Замедляющаяся ударная волна распространялась из криптона в гелий. Характерной особенностью является совместное действие импульсного и постоянного ускорений. Скорость ударной волны $D = -811.4$ м/с, приращение скорости среды $U = -940$ м/с, постоянное ускорение $g = 10^6$ м/с², число Атвуда $A = 0.8644$ [13]. Начальное возмущение: $a_0 = 1$ мм и $\lambda = 50$ мм. Квадратики 1 — экспериментальные результаты Василенко [2,13], 2 — линейная теория [2], 3 — результаты наших расчетов; крестики 4 — результаты расчета [13] по газодинамической методике ТИГР [24]; 5 — расчеты методом вихревых капель [13].

$a_0 = 1$ и 2 сначала растет, затем при $\tau > 2$ и $\tau > 1$ соответственно начинает падать. Для $a_0 = 3$ и 4 область начального роста скорости струи вырождается в плато.

На рис. 5 приводится сравнение наших расчетов с расчетами по вихревому методу [12] для системы двух жидкостей с числом Атвуда $A = 0.33$. Характер наших кривых соответствует [12]. Но, как и при $A = 1$, значения скоростей больше, чем по вихревому методу.

На рис. 6 представлены скорости роста струи и пузыря для системы двух жидкостей при различных числах Атвуда с малым начальным возмущением. Скорость роста пузыря со временем монотонно уменьшается. Зависимости от времени скорости струи имеют область начального роста, максимум и далее монотонно убывают. При уменьшении числа Атвуда максимальное значение Γ_S также уменьшается. Для $A = 0.1$ область начального роста практически вырождена в плато.

Нами были проведены сравнения результатов наших расчетов с экспериментами Зайцева [1] (рис. 7) и Василенко [13,2] (рис. 8), а также с расчетами этих экспериментов других авторов [13,23]. Как видно из рисунков, наши расчетные кривые находятся в хорошем качественном и количественном согласии с

результатами экспериментов. Отметим, что результаты расчетов авторов [12], использующих вихревой метод, и авторов [13], использующих метод вихревых капель, дают в отличие от нашей теории несколько заниженное по сравнению с экспериментальным значение скорости роста возмущения.

Заключение

Таким образом, нами путем редукции гидродинамического течения в объеме, занятом идеальными несжимаемыми жидкостями с разной плотностью, к описанию только эволюции их контактной границы получена замкнутая система уравнений (40)–(43). Получено точное в случае двумерной геометрии течения соотношение (25), связывающее между собой значения функции потока и производной потенциала скорости на границе. Его применимость ограничена условиями существования касательного и нормального векторов к границе, а также справедливости гидродинамического приближения. Вычислительный эксперимент, выполненный нами, показал, что действительно нет необходимости в задании на контактной границе начального распределения точечных или конечного размера вихрей. Сколь угодно малое возмущение свободной или контактной границы приводит за конечное время к формированию и отрыву соответственно капли или крупномасштабного вихря тяжелой жидкости. Полученные нами результаты качественно и количественно согласуются с результатами экспериментов [1,2].

В заключение отметим, что наш подход, естественно, неприменим для описания стадии турбулентного перемешивания легкой и тяжелой жидкостей, на которой формируется большое число вихрей различного размера и возникает необходимость учета их взаимодействия [7].

Авторы признательны Н.М. Зубареву за интерес к работе и стимулирующую дискуссию.

Список литературы

- [1] Алешин А.Н., Лазарева Е.В., Зайцев С.Г. и др. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1105.
- [2] Розанов В.Б., Лебо И.Г., Зайцев С.Г. и др. Препринт. ФИАН. № 56. М., 1990.
- [3] Chandrasekhar S. // Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961.
- [4] Richtmyer R.D. // Comm. on Pure and Appl. Math. 1960. Vol. 12. P. 297.
- [5] Мешков Е.Е. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. Т. 5. С. 151.
- [6] Sharp D.H. // Physica D. 1984. Vol. 12. P. 3.
- [7] Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Э.Е. // Гидродинамика перемешивания. Периодические структуры. Усиление субгармоник. Инверсный каскад. М.: Изд-во МФТИ. 1999.
- [8] Ryutov D.D., Derzon M.S., Matzen M.K. // Rev. Mod. Phys. 2000. Vol. 72. P. 167.
- [9] Korotaev A.D., Ovchinnikov S.V., Pochivalov Yu.I. et al. // Surface and Coatings Technology. 1998. Vol. 105. P. 84.

- [10] Korotaev A.D., Tyumentsev A.N., Tretjak M.V. et al. // Structure, Phase Transformations and Diffusion. 2000. Vol. 89. P. 54.
- [11] Волков Н.Б., Майер А.Е., Яловец А.П. // ЖТФ. 2002. Т. 72. С. 34.
- [12] Neuvazhayev V.E., Parshukov I.E. // Mathematical Modelling and Applied Mathematics / Ed. A.A. Samarsky, M.P. Saragovas. North Holland: Elsevier Science Publishers B.V., IMACS, 1992. P. 323.
- [13] Неуважаев В.Е., Паришков И.Э. // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 2. С. 16.
- [14] Волков Н.Б., Майер А.Е., Яловец А.П. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 1. С. 47.
- [15] Ферми Э. // Научные труды. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 493. Ферми Э., Нейман Дж. // Там же. С. 498.
- [16] Velikovich A.L., Dimonte G. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 3112.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [18] Saffman P.G. // Vortex Dynamics. Cambridge: University Press, 1992.
- [19] Седов Л.И. // Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
- [20] Dyachenko A.I., Kuznetsov A.E., Spector M.D., Zakharov V.E. // Phys. Lett. 1996. Vol. A221. P. 73.
- [21] Madelung E. // Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer Verlag, 1957.
- [22] Зубарев Н.М., Зубарева О.В. // ЖТФ. 2001. Т. 71. С. 21.
- [23] Meyer K.A., Blewett P.J. // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. P. 753.
- [24] Бисярин Ф.Ю., Грибов В.М., Зубов А.Д. и др. // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 3 (17). С. 34.