01

# Закон сопротивления для турбулентного течения Тэйлора–Куэтта при очень больших числах Рейнольдса

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет,
197002 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonalex@yahoo.co.uk

(Поступило в Редакцию 1 июля 2002 г.)

Предложены новые выражения для закона сопротивления и безразмерного момента сил для турбулентного течения Тэйлора–Куэтта, исходя из обобщенной модели локального баланса турбулентной энергии. Эти формулы содержат единственную постоянную — постоянную Кармана в случае предельно больших чисел Рейнольдса.

Вплоть до настоящего времени ни одна из моделей турбулентности не была выведена с достаточной строгостью из исходных уравнений Навье-Стокса. Поэтому большое значение имеет сравнение полуэмпирических моделей турбулентности с экспериментами. Течение Тэйлора–Куэтта между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами является одним из таких наиболее удобных типов течений для сравнения. Мы ограничимся здесь случаем, когда вращается только внутренний цилиндр, а внешний покоится.

Основными параметрами этого течения являются число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \Omega a(b-a)/\nu$, безразмерный момент сил, действующий на внутренний цилиндр: $G = T/(\rho\nu^2 L)$, $\Omega$ — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, $T$ — момент сил, $\rho$ — плотность жидкости, $\nu$ — коэффициент молекулярной кинематической вязкости, $L$ — длина каждого из цилиндров, $a$ — радиус внутреннего цилиндра, $b$ — радиус внешнего цилиндра.

В [1] показано, что $G \propto \mathrm{Re}^{\alpha}$ с $\alpha = 5/3$, предложенной в [2,3], не согласуется с их экспериментальными данными. Согласие было достигнуто путем использования закона сопротивления типа Прандтля–Кармана

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = c_1 \lg\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\,\right) + c_2, \tag{1}$$

где $f = G/\mathrm{Re}^2$, константы $c_1, c_2$ связаны с константами Прандтля–Кармана.

Этот закон был выведен сшиванием логарифмических профилей скорости посредине цилиндрического канала. Авторы [4] предположили, что $U_w/U \propto \mathrm{Re}^{\xi}$, где $U_w$ — скорость трения на поверхности внутреннего цилиндра, $U$ — линейная скорость вращения внутреннего цилиндра $U = a\Omega$, $\xi = -0.051$ — эмпирический параметр, полученный из экспериментов [1], и $G$ получено подгонкой к тем же экспериментам [1]. В результате получено выражение

$$G = c_1' \mathrm{Re}^{3/2+5\xi/2} + c_2 \mathrm{Re}^{2+3\xi}, \tag{2}$$

где $c_1' = 10.5$ и $c_2' = 0.196$.

Здесь мы покажем, что всем попыткам поиска степенных законов для момента сил будут препятствовать логарифмические поправки $\ln(\mathrm{Re})$. В [5] был получен закон сопротивления типа Прандтля–Кармана, выведенный из обобщенной модели локального баланса

$$4\pi q u^*_{\mathrm{in}} \kappa^{-1}(q^4-1)^{-1} J_0 + u^*_{\mathrm{in}} q \kappa^{-1} \ln[C U^*_{\mathrm{in}}(b-a)] + u^*_{\mathrm{put}} \kappa^{-1} \ln[C u^*_{\mathrm{out}}(b-a)/\nu] = V_2 + V_{1q}, \tag{3}$$

где $\mathrm{Re} = V_1(b-a)/\nu$; $q = b/a$, $a$ и $b$ — радиусы цилиндров; $u^*_{\mathrm{in}}$ и $u^*_{\mathrm{out}}$ — скорости трения на поверхности цилиндров; $\kappa = 0.4$ и $C = 9.5$ — константы Прандтля–Кармана логарифмического профиля средней скорости; $V_1$ и $V_2$ — линейные скорости цилиндров, вращающихся в противоположных направлениях (или один из них покоится, мы полагаем здесь $V_2 = 0$),

$$J_0 = \int\limits_1^q dx \Big\{ x \csc\left[\pi(x^4-1)/(q^4-1)\right] - (q^4-1)(4\pi)^{-1}(x-1)^{-1} - (q^4-1)(4\pi)^{-1} q^{-2}(q-x)^{-1} \Big\}.$$

Используя известное соотношение для турбулентного течения Тэйлора–Куэтта $u^*_{\mathrm{out}} b = u^*_{\mathrm{in}} a$ и вводя безразмерную скорость трения $z = u^*_{\mathrm{in}}/V_1$, мы получим алгебраическое уравнение для определения $z = z(\mathrm{Re})$

$$4q\pi\kappa^{-1}(q^4-1)^{-1} J_0 + q\kappa^{-1}\ln(C\mathrm{Re}z) + \kappa^{-1} q^{-1} \ln(C\mathrm{Re}z/q) = q/z. \tag{4}$$

Анализ показывает, что $z \to 0$, если $\mathrm{Re} \to \infty$, тогда мы можем получить асимптотическое выражение для $z = z(\mathrm{Re})$. Во-первых, опустим аддитивные постоянные. После очевидных преобразований мы получим

$$\kappa^{-1}(q+q^{-1})\ln \mathrm{Re} + \kappa^{-1}(q+q^{-1})\ln(z) = q/z. \tag{5}$$

Во-вторых, мы пренебрежем вторым членом в левой части (5). Тогда мы получим

$$z = \frac{\kappa q}{(q+q^{-1})\ln \mathrm{Re}}. \tag{6}$$

Зависимость экспериментального [1] и теоретического момента сил $G$ от числа Рейнольдса (внутренний цилиндр вращается, внешний цилиндр покоится), отношение радиусов $q^{-1} = \eta = 0.724$

| Re | $G_{\text{exp}}$ | $G_{\text{theory}}$ | $G_\infty$ |
|---|---|---|---|
| $10^4$ | $5.0 \cdot 10^6$ | $5.4 \cdot 10^6$ | $3.5 \cdot 10^6$ |
| $10^5$ | $3.0 \cdot 10^8$ | $3.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ |
| $10^6$ | $1.5 \cdot 10^{10}$ | $2.2 \cdot 10^{10}$ | $1.6 \cdot 10^{10}$ |

Теперь очевидно, что второе пренебрежение справедливо, так как

$$\lim_{\mathrm{Re}\to\infty} \frac{\ln\ln \mathrm{Re}}{\ln \mathrm{Re}} = 0. \tag{7}$$

Первое пренебрежение также справедливо. Таким образом, мы имеем

$$z = \frac{\kappa q^2}{(1+q^2)\ln \mathrm{Re}}. \tag{8}$$

Мы знаем [5], что коэффициент сопротивления $c_f = 2\pi z^2 (q-1)^{-2}$, $G = c_f \mathrm{Re}^2$. Окончательным результатом будут выражения при $\mathrm{Re} \to \infty$

$$c_f = \frac{2\pi\kappa^2 q^4}{(q^2+1)^2 (q-1)^2 (\ln \mathrm{Re})^2}, \tag{9}$$

$$G = \frac{2\pi\kappa^2 q^4}{(q^2+1)^2 (q-1)^2} \left(\frac{\mathrm{Re}}{\ln \mathrm{Re}}\right)^2. \tag{10}$$

Эти формулы содержат единственную эмпирическую постоянную Кармана $\kappa = 0.4$, что вместе с логарифмическим множителем $(\ln \mathrm{Re})^{-2}$ отличает эти формулы от прежних подходов. В таблице мы представлили теоретическую зависимость $g_\infty$ (выражение (10)), $G_B$ (уравнение (4)) и соответствующие экспериментальные значения $G_{\text{exp}}$ [1]. Видно определенное согласие между эмпирической и теоретическими зависимостями

Ясно, что $\mathrm{Re} = 10^6$ недостаточно велико, чтобы заменить уравнение (3) его аппроксимацией (10). Но нужно иметь в виду, что уравнение (10) является лишь следствием модели турбулентности. Мы полагаем, что нужны дополнительные усилия, чтобы заполнить пробел между прямым численным моделированием уравнений Навье–Стокса и каскадными моделями турбулентности, использованных в [1] для сравнения с экспериментальными данными.

## Список литературы


[1] *Lewis G.S., Swinney H.L.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 5457.
[2] *Barsilon A., Brindley J.* // J. Fluid. Mech. 1984. Vol. 143. P. 429.
[3] *King G.P., Li.Y., Swinney H.L., Marcus P.S.* // J. Fluid. Mech. 1984. Vol. 141. P. 365.
[4] *Eckhardt B., Grossman S., Lohse G.* // Eur. Phys. J. B. 2000. Vol. 18. P. 541.
[5] *Bolonishnikov A.M.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 1390.