01;03;05

Блуждания частицы при наличии полурегулярных движений пластичной среды

© В.А. Антонов, А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,
196140 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 18 марта 2002 г.)

Рассмотрены блуждания частицы вместе со средой, которая в случайные моменты времени меняет свое направление движения. Найдены асимптотика полного смещения и в некоторых случаях его точный закон распределения (при конечном времени процесса). Результаты могут найти применение в ряде технологических процессов, в геофизике и астрофизике.

Введение

При деформации различных жидких и пластичных сред включенные в них частицы также изменяют свое положение. Применительно к самым разнообразным технологическим процессам [1–4] (а также в геофизике и астрофизике [5–7]) возникает задача оценки величины смещения частицы вместе со средой или иногда при наличии самостоятельной диффузии. Одна из простейших моделей получается, когда движения среды согласованы в пространстве, так что величина смещения частицы за какой-либо интервал времени не зависит от ее предыдущего положения. Иначе говоря, размер характерных неоднородностей в процессе деформации среды существенно больше ожидаемых перемещений частицы по координатам x, y, z. В дальнейшем мы планируем рассмотреть более сложный случай сравнимости этих величин.

Сами смещения среды предполагаем случайными функциями времени. Опять-таки строим достаточно простую модель случайных переключений (не зависящих о всего прошлого) с частотой ν. Частицы же, как сказано выше, увлекаются движением среды со скоростью $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$, также выбираемой каждый раз случайно, но остающейся постоянной в промежутках между переключениями. Такую модель движения мы называем полурегулярной. Мы хотим найти закон распределения полного смещения $\mathbf{r}(x, y, z)$ за конечное время t и его асимптотику при больших t.

Одномерная модель

Рассматрим сначала чисто одномерные движения параллельно оси x, причем с одинаковой по абсолютной величине скоростью v_0, при каждом переключении ее направление меняется на противоположное. По прошествии времени t требуется найти плотность положения частицы $p(x, t)$ при условии, что движение идет в положительном направлении, и аналогичную плотность $p(x, t)$ при условии, что движение идет в обратном направлении. В сущности такая модель задает марковский процесс, и можно было бы пользоваться обычными уравнениями Колмогорова–Феллера [8] с учетом скачкообразной компоненты процесса. Однако для наших целей удобно действовать несколько обходным путем.

Введем вероятность $q(x, t)dxdt$ того, что в интервале времени $(t, t + dt)$ произойдет переключение с режима скольжения налево на скольжение направо и в этот момент положение частицы отвечает интервалу $(x, x + dx)$. Аналогично определяется функция $\bar{q}(x, t)$ для обратных переключений.

Найдем функция $q(x, t)$. Номер последнего переключения n заранее не задан, и ясно только, что это четное случайное число. Если же в предыдущем определении фиксировать n, то мы будем иметь дело с функциями $q_n(x, t)$, причем, очевидно, что

$$q(x, t) = \sum_{n=2,4...} q_n(x, t). \qquad (1)$$

Значение $q_n(x, t)dxdt$ можно трактовать как вероятность попадания в двумерный интервал $dxdt$ двухкомпонентной величины (x, t), причем t как случайная величина совершает n независимых шагов $t = t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n$, каждый из которых распределен по экспоненциальному закону с известной плотностью

$$\theta_1 = \nu e^{-\nu t}. \qquad (2)$$

Сумма n длин этих шагов распределена, следовательно, с плотностью [9]

$$\theta_n = \frac{\nu^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\nu t}. \qquad (3)$$

Что касается поведения координаты x, то, по определению, она равна сумме слагаемых с чередующимися знаками

$$x = x_1 - x_2 + x_3 - \ldots - x_n = v_0(t_1 - t_2 + t_3 - \ldots - t_n). \qquad (4)$$

Удобно ввести вспомогательные величины $T = t_1 + t_3 + \ldots + t_{n-1}$, $T' = t_2 + t_4 + \ldots + t_n$, тогда

$$t = T + T', \quad x = v_0(T - T'). \qquad (5)$$

По своей структуре T и T' — независимые случайные величины, каждая из которых распределена по закону (3) с заменой n на $n/2$. Совместная плотность распределения $\theta(T, T')$ — это просто произведение

$$\theta_n(T, T') = \frac{\nu^n}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} T^{n/2-1}(T')^{n/2-1}e^{-\nu(T+T')},$$
$$(T, T' > 0). \tag{6}$$

Для перехода к переменным t, x ввиду взаимно однозначного характера преобразования (5) надо произвести в (6) соответствующую обратную замену и учесть якобиан преобразования (5), равный $2v_0$. Итак,

$$q_n(x, t) = \frac{1}{2^{n-1}v_0} \frac{\nu^n}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \left(t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}\right)^{n/2-1} e^{-\nu t},$$
$$(t > 0, \quad |x| \le v_0 t). \tag{7}$$

Для нахождения $q(x, t)$ остается выполнить суммирование по четным n. Имеем в результате

$$q(x, t) = \frac{\nu^2 e^{-\nu t}}{2v_0} I_0\left(\nu\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}}\right), \tag{8}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Аналогично вычисляем $\bar{q}(x, t)$. Вместо (1) имеем

$$\bar{q}(x, t) = \sum_{n=1,3,\dots} \bar{q}_n(x, t). \tag{9}$$

Значение $\bar{q}_n(x, t)dxdt$ трактуем как вероятность попадания в двумерный интервал $dxdt$ двумерной величины (x, t), причем t как случайная величина представляется суммой $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ и, кроме того, $x = x_1 - x_2 + \ldots + x_n = v_0(t_1 - t_2 + \ldots + t_n)$. Опять вводим вспомогательные величины $T = t_1 + t_3 + \ldots + t_n$, $T' = t_2 + t_4 + \ldots + t_{n-1}$, а формула (5) сохраняет силу. Разница в сравнении с предыдущим случаем состоит только в том, что распределения T и T' сейчас получаются из общей формулы (3) заменой n в первый раз на $(n+1)/2$, а второй раз — на $(n-1)/2$. Следовательно, совместная плотность распределения

$$\theta(T, T') = \frac{\nu^n}{\left(\frac{n}{2}-3\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} T^{n/2-1}(T')^{n/2-1}e^{-\nu(T+T')},$$
$$(T, T' > 0, \quad n \ge 3),$$
$$\theta_1(T, T') = \delta(T')\nu e^{-\nu T},$$

а после перехода к переменным t, x

$$\bar{q}_n(x, t) = \frac{1}{2^{n-1}v_0} \frac{\nu^n}{\left(\frac{n}{2}-3\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \left(t + \frac{x}{v_0}\right)^{(n-1)/2}$$
$$\times \left(t - \frac{x}{v_0}\right)^{(n-3)/2} e^{-\nu t}, \quad (t > 0, \ |x| \le v_0 t, \ n \ge 3),$$
$$\bar{q}_1(x, t) = \delta(x - v_0 t)\nu e^{-\nu t},$$

так что суммирование по n дает

$$\bar{q}(x, t) = \frac{\nu^2}{2v_0} e^{-\nu t} \sqrt{\frac{v_0 t + x}{v_0 - x}} I_1\left(\nu\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}}\right)$$
$$+ \delta(x - v_0 t)\nu e^{-\nu t}. \tag{10}$$

Перейдем теперь к определению функций $p(x, t)$ и $\bar{p}(x, t)$. Если частица в момент t находится в интервале $(x, x + dx)$ и движется направо, то за интервал времени $(t, t + dt)$ она испытывает с вероятностью νdt переключение со скольжения направо на скольжение влево. Следовательно, $\bar{q}(x, t)dxdt = q(x, t)\nu dtdx$ или просто

$$p(x, t) = \frac{\bar{q}(x, t)}{\nu}, \tag{11}$$

так же как

$$\bar{p}(x, t) = \frac{q(x, t)}{\nu}. \tag{11a}$$

Итак, искомые распределения точно выражаются в терминах функций Бесселя. Представляет интерес еще асимптотическое поведение p и $\bar{p}$ при больших t. По аналогии с известной центральной предельной теоремой естественно ожидать, что характерные значения x будут расти как $\sqrt{t}$. Мы должны применить асимптотику функций Бесселя для больших z

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{2\sqrt{2\pi z}},$$

$$q(x, t) \approx \frac{\nu^2}{2v_0}\sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}}\left(t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}\right)^{-1/4} e^{\nu\left(\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}} - t\right)}.$$

Но мы имеем

$$t - \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}} = \frac{\frac{x^2}{v_0^2}}{t + \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}}} \approx \frac{x^2}{2v_0^2}t,$$

поскольку величина x^2/v_0^2 растет так же, как t. В отдельно стоящем множителе также можно пренебречь вторым членом. Остается

$$q(x, t) \approx \frac{\nu^{3/2}}{2v_0}\sqrt{\frac{1}{2\pi t}}\, e^{-\frac{\nu x^2}{2v_0^2 t}},$$
$$\bar{p}(x, t) \approx \frac{1}{2v_0}\sqrt{\frac{\nu}{2\pi t}}\, e^{-\frac{\nu x^2}{2v_0^2 t}}. \tag{12}$$

Аналогично

$$I_1(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

$$\bar{q}(x, t) \approx \frac{\nu^2}{2v_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu t}} e^{\nu\left(\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v_0^2}} - t\right)} \approx q(x, t),$$
$$p(x, t) \approx \bar{p}(x, t). \tag{12a}$$

Итак, асимптотическое распределение x, согласно (12) и (12a), подчиняется закону Гаусса, чего и следовало ожидать: центральная предельная теорема для марковских процессов обычно выполняется [8]. При этом стирается и роль начального состояния, хотя при конечном t значения p и $\bar{p}$ не совпадают. Формулы (8) и (10), как и асимптотические (12) и (12a), можно использовать для упрощенных оценок смещения частицы вместе со сдвигаемой пластичной или межзвездной плазменной средой.

Общий пространственный случай

Обратимся к более реалистичной пространственной схеме, когда скорость среды представляет собой случайный вектор $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ с нулевым математическим ожиданием, дисперсиями σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2 после приведения к главным осям и плотностью распределения $\chi(v_x, v_y, v_z)$. Представим себе, что при $t = 0$ вектор $\mathbf{v}$ выбирается случайным образом, а затем опять с частотой ν происходят случайные переключения с одного значения $\mathbf{v}$ на другое, независимое от всего прежнего. Требуется снова найти распределения смещения частицы за время t и его асимптотику.

Действуем прежним образом. Пусть $q(x, y, z, t)dxdydzdt$ — вероятность того, что в интервале времени $(t, t+dt)$ произойдет переключение и частица в это время будет находиться в объеме параллелепипеда вблизи точки x, y, z со сторонами dx, dy, dz. Плотность распределения $p(x, y, z, t)$ связана с $q(x, y, z, y)$ простым соотношением

$$q = \nu p. \tag{13}$$

Конкретизируем число переключения $n = 1, 2, 3, \ldots$, при каждом заданном n имеем свою вероятность $q_n(x, y, z, t)dxdydzdt$ и в сумме

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n. \tag{14}$$

Сама же функция q_1 вычисляется как плотность распределения для суммы четырехмерной величины (x, y, z, t), причем t как случайная величина имеет плотность (2). При заданном $t = s$, согласно нашим условиям, была бы просто пропорциональность между векторами $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $\mathbf{v}(x, y, z)$ с коэффициентом s, так что с $n = 1$ мы имели бы четырехмерное распределение

$$Q_1(x, y, z, t) = \delta(t - s)\chi\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}, \frac{z}{s}\right)s^{-3}. \tag{15}$$

Остается осреднить (15) по всем возможным s

$$q_1(x, y, z, t) = \nu\int_0^\infty \frac{e^{-\nu s}}{s^3}\,\delta(t - s)\chi\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}, \frac{z}{s}\right)ds$$

$$= \frac{\nu}{t^3}\,e^{-\nu t}\chi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right). \tag{16}$$

Плотность же q_n представляет собой свертку n распределений (16). При больших n мы можем прямо ссылаться на центральную предельную теорему. Математические ожидания по x, y, z, соответствующие q_1, очевидно, равны нулю, а дисперсии D_x, D_y, D_z можно вычислить с помощью (16)

$$D_x = \iiiint x^2 q_1(x, y, z, t)dxdydzdt$$

$$= \iiiint \frac{\nu}{t^3}\,e^{-\nu t}\chi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)x^2dxdydzdt$$

$$= \nu\sigma_x^2\int_0^\infty t^2e^{-\nu t}dt = \frac{2\sigma_x^2}{\nu^2},$$

$$D_y = \frac{2\sigma_y^2}{\nu^2}, \quad D_z = \frac{2\sigma_z^2}{\nu^2}.$$

Вычислим теперь математическое ожидание $\langle t\rangle$ и дисперсию D_t по величине t. Сначала

$$\langle t\rangle = \iiiint \frac{\nu}{t^2}e^{-\nu t}\chi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)dxdydzdt$$

$$= \int_0^\infty \nu te^{-\nu t}dt = \frac{1}{\nu}.$$

Затем получаем второй момент

$$\langle t^2\rangle = \iiiint \frac{\nu}{t}\,e^{-\nu t}\chi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)dxdydzdt$$

$$= \int_0^\infty \nu t^2e^{-\nu t}dt = \frac{2}{\nu^2},$$

так что $D_t = \langle t^2\rangle - (\langle t\rangle)^2 = 1/\nu^2$. Смешанные моменты по парам (t, x), (t, y), (t, z) равны нулю.

Согласно центральной предельной теореме, при больших n

$$q_n(x, y, z, t) \approx \frac{\nu^4\sqrt{2}}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z(4\pi n)^2}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\nu^2x^2}{4n\sigma_x^2} - \frac{\nu^2y^2}{4n\sigma_y^2} - \frac{\nu^2z^2}{4n\sigma_z^2} - \frac{\nu^2}{2n}\left(t - \frac{n}{\nu}\right)^2\right\}. \tag{17}$$

Мы считаем конкретное значение t пропорциональным n. Ясно, что в сумму существенный вклад вносят только значения n, близкие к νt, для более удаленных экспонента быстро убывает. Например, она принимает значение $1/2$ (при максимуме 1), когда $|t - n/\nu| = \sqrt{2n\ln 2}/\nu$, $|n - \nu t| = \sqrt{2n\ln 2}$.

Итак, ширина полосы значений n, по которым фактически идет суммирование, пропорциональна $\sqrt{n_0}$, где n_0 отвечает середине полосы или просто $\sim\sqrt{\nu t}$. При этом значения n, входящие в три другие экспоненты, и множитель перед ними не успевают существенно измениться и вместо них можно подставить среднее $n_0 = \nu t$. Тогда суммировать приходится только последние экспоненты, и в них тоже перед скобкой пренебрегаем отличием n от n_0. Сумму

$$\sum_n e^{-\frac{1}{2\nu t}(n-\nu t)^2}$$

ввиду сравнительно малого шага показателя (порядка $(\nu t)^{1/2}$) при изменении n на 1 в изучаемом интервале можно заменить на соответствующий интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\nu t}(n-\nu t)^2} dn = \sqrt{2\pi\nu t}.$$

С учетом всего этого

$$q \approx \frac{2\nu^{5/2}\sqrt{\pi}}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z(4\pi)^2 t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\nu}{4t}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}+\frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)\right\}$$

и, следовательно,

$$p(x,y,z) \approx \frac{\nu^{3/2}}{8(\pi t)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \times \exp\left\{-\frac{\nu}{4t}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}+\frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)\right\}. \quad (18)$$

Как и следовало ожидать, интеграл от (18) по всему пространству обращается в единицу. Распределение (18) дает нам закон Гаусса с дисперсиями, растущими пропорционально t.

Точный расчет $p(x,y,z,t)$ для конечного n представляет некоторые трудности. Они в известной мере преодолеваются, если действовать методом характеристических функций. Введем сначала такую функцию для исходной плотности χ

$$f(\tau_x,\tau_y,\tau_z) = \iiint \chi(v_x,v_y,v_z)e^{i(v_x\tau_x+v_y\tau_y+v_z\tau_z)}dv_x dv_y dv_z. \quad (19)$$

Попытаемся определить их и для плотностей q_n

$$F_n(\tau_x,\tau_y,\tau_z,\tau) = \iiiint q_n(x,y,z,t)e^{i(x\tau_x+y\tau_y+z\tau_z+t\tau)}dx dy dz dt.$$

Сначала

$$F_1(\tau_x,\tau_y,\tau_z,\tau) = \iiiint \frac{\nu}{t^3}e^{-\nu t}\chi\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)e^{i(x\tau_x+y\tau_y+z\tau_z+t\tau)}dx dy dz dt$$
$$= \nu\int_0^{\infty} f(t\tau_x,t\tau_y,t\tau_z)e^{t(i\tau-\nu)}dt \quad (20)$$

и далее по общему правилу

$$F_n = (F_1)^n, \quad (21)$$

так что в сумме характеристическая функция F для самой q

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_1^n = \frac{F_1}{1-F_1}. \quad (22)$$

Конкретный пример

В качестве примера, когда можно довести расчет до характеристической функции (тогда остается только частично провести преобразование Фурье для $p(x,y,z,t)$), возьмем

$$q_1(v_x,v_y v_z) = \frac{4v_0^3}{\pi^2\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2+v_0^2\right)^3}. \quad (23)$$

Это — распределение с конечной дисперсией

$$\iiint v_x^2 q(v_x,v_y,v_z)dv_x dv_y dv_z = v_0^2,$$

то же самое и в других направлениях. Дальнейшие выкладки дают сначала

$$f = e^{v_0\rho(1+v_0\rho)},$$

где $\rho = \sqrt{\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2}$.

После этого

$$F_1 = \frac{\nu(2v_0\rho+\nu-i\tau)}{(v_0\rho+\nu-i\tau)^2},$$

$$\frac{F_1}{1-F_1} = \frac{\nu(2v_0\rho+\nu-i\tau)}{v_0^2\rho^2-2iv_0\rho\tau-i\tau(\nu-i\tau)}. \quad (24)$$

В принципе к последней формуле (24) надо применять преобразование Фурье по τ_x, τ_y, τ_z. Преобразование по τ легко удается, для чего достаточно разложить дробь в (24) на элементарные; тогда по t получается сумма экспонент. Сократив еще множитель ν, заключаем, что по отношению к $p(x,y,z,t)$ (t сейчас уже играет роль параметра) характеристической функцией является

$$\frac{\frac{\nu}{2}+v_0\rho}{\sqrt{\nu^2+4v_0\nu\rho}}\left(e^{-t\xi_2}-e^{-t\xi_1}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-t\xi_2}+e^{-t\xi_1}\right), \quad (25)$$

где

$$\xi_{1,2} = \frac{2v_0\rho+\nu\pm\sqrt{\nu^2+4v_0\nu\rho}}{2}.$$

Для проверки можно взять асимптотику (25) по t соответственно при x, y, $z \sim \sqrt{t}$, $\rho \sim 1/\sqrt{t}$, тогда легко видеть, что в пределе больших t формула (25) дает характеристическую функцию закона Гаусса с соответствующей дисперсией.

Выводы

В рассматриваемой модели случайных переключений со временем устанавливается гауссово распределение полного смещения. Этот вывод, очевидно, сохранится и при наличии самостоятельной диффузии частицы: результаты будут просто складываться по правилу для независимых случайных величин и асимптотика остается гауссовой. Вопрос состоит только в конкретной оценке дисперсии, и мы даем соответствующую формулу (18). В некоторых случаях удается получить и точные распределения смещения при любом положительном t, это удается в одномерном случае в модели с равными скоростями смещения в обе стороны. В трехмерном случае удается дойти до соответствующей характеристической функции при специальном распределении скоростей (23), результаты подтверждают общий расчет. В перспективе можно, по-видимому, сходным образом изучать смещение частицы в турбулентной среде с конечной длиной корреляции. Такие попытки уже были [10], но в несколько громоздкой, неудобной форме.

Список литературы

[1] *Абрамович Г.Н.* // ДАН СССР. 1970. Т. 190. № 5. С. 1052–1055.

[2] *Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А.* // ДАН СССР. 1973. Т. 212. № 3. С. 573–576.

[3] *Вигдорович В.Н., Жеребович А.С.* Методы и устойства для перемешивания расплава в процессах кристаллизационной очистки металлов и полупроводниковых материалов. М.: Цветметинформация, 1969.

[4] *Бернштейн М.А.* Структура деформированных металлов. М.: Металлургия, 1977.

[5] *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.

[6] *Шрейдеггер А.Е.* Физика течения жидкости через пористые среды. М.: Гостехиздат, 1960.

[7] *Nicolas A., Poirier J.P.* Crystalline Plasticity and Solicd State Flow in Metamorphic Rocks. Bristol: John Wiley and Sons, 1976.

[8] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

[9] *Кордонский Х.Б.* Приложения теории вероятностей в инженерном деле. М.; Л.: Физматгиз, 1963.

[10] *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* // Астрон. журн. 2000. Т. 77. № 10. С. 743–749.