

# Высокочастотные свойства двухъямных наноструктур

© В.Ф. Елесин, И.Ю. Катеев

Московский инженерно-физический институт (государственный университет),  
115409 Москва, Россия

(Получена 5 июля 2007 г. Принята к печати 10 октября 2007 г.)

На основе аналитического и численного решения уравнения Шредингера рассчитаны активный ток поляризации и эффективность излучения двухъямной наноструктуры в широком интервале амплитуд переменных электромагнитных полей. Показано, что возможна генерация в актуальном терагерцовом диапазоне с плавной перестройкой частоты и эффективностью, близкой к максимальной. Изучено поведение коэффициента отражения электронов от структуры, который обращается в нуль при максимальной эффективности.

PACS: 72.30.+q, 73.21.Nb, 73.50.Mx, 73.63.Hs, 78.67.De

## 1. Введение

В работах [1–3] изучена генерация на двухъямной наноструктуре (ДНС). Двухъямная наноструктура состоит из двух туннельно-связанных квантовых ям, к которым прикладывается постоянное напряжение  $V_{dc}$ . Развита аналитическая теория для модели структуры с  $\delta$ -образными барьерами. Показано, что возможна генерация в актуальном терагерцовом диапазоне с плавной перестройкой частоты и эффективностью, близкой к максимальной. Однако гарантированная область применимости ограничена сравнительно небольшими амплитудами электромагнитного поля.

В настоящей работе с использованием численных методов рассчитаны активный ток и эффективность излучения в широком интервале сильных полей. Кроме того, найден коэффициент отражения электронов от ДНС. Расчеты проводились для двух типов взаимодействия электронов с электромагнитным полем. Результаты совпадают с хорошей точностью.

## 2. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим одномерную структуру с  $\delta$ -функционными барьерами в точках  $x = 0, a, 2a$ , состоящую из двух квантовых ям (рис. 1). Ко второй яме ДНС приложено постоянное электрическое поле с потенциалом  $V_{dc}$ . Слева ( $x \rightarrow -\infty$ ) к первой квантовой яме подводится стационарный поток электронов, характеризуемый величиной  $q^2$ , с энергией  $\varepsilon$ , примерно равной энергии резонансного уровня  $\varepsilon_R^{(1)}$  первой ямы. В области структуры действует переменное электрическое поле  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ .

Волновая функция электрона  $\Psi(x, t)$  удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha \sum_{n=0}^2 \delta(x - na) \Psi - V_{dc} \Theta(x - a) \Psi - \hat{V} \Psi, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — мощность барьеров,  $\Theta$  — единичная функция Хевисайда,  $m^*$  — эффективная масса электрона в

структуре,  $\hat{V}$  — оператор взаимодействия переменного поля  $E$  с электронами, который может быть двух типов. Оператор  $\hat{V}$  первого типа равен

$$\hat{V} = \frac{1}{2m^*} \left( 2 \frac{e\hbar}{c} iA(t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right), \quad (2)$$

где  $A = -cE_0(\sin \omega t)/\omega$  — вектор-потенциал в кулоновской калибровке ( $\partial A/\partial x = 0$ ), а выражение для второго типа имеет вид

$$\hat{V} = eE_0 x \cos \omega t. \quad (3)$$

Далее для удобства положим  $\hbar = 2m^* = c = 1$ . Граничные условия к уравнению Шредингера (1) запишем следующим образом [3]:

$$\begin{cases} \Psi(0, t) \left( 1 - \frac{\alpha}{ip} \right) + \frac{1}{ip} \frac{\partial \Psi(0, t)}{\partial x} = 2q \exp\left(-\frac{iet}{\hbar}\right), \\ \Psi(2a, t) \left( 1 - \frac{\alpha}{ip_1} \right) - \frac{1}{ip_1} \frac{\partial \Psi(2a, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $p = \sqrt{\varepsilon}$  и  $p_1 = \sqrt{\varepsilon + V_{dc}}$  — волновые числа электрона слева и справа от структуры соответственно.

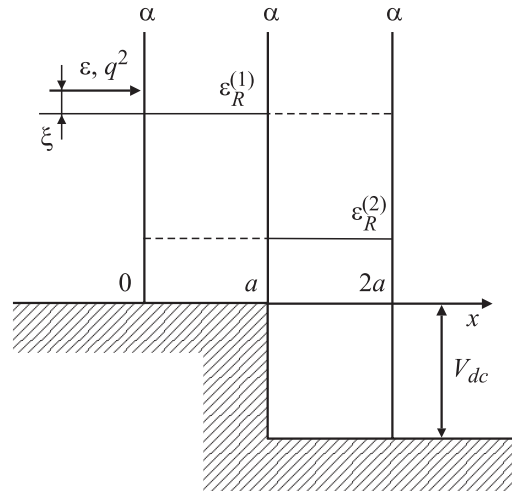


Рис. 1. Двухъямная наноструктура с приложенным напряжением. Мощность  $\delta$ -функционных барьеров  $\alpha = 10$ , ширина ям  $a = 2\pi$ .

Приведенный ток  $n$ -й ямы  $J_n$  дается следующим выражением:

$$J_n(t) = \frac{2}{a} \int_{a(n-1)}^{an} dx \operatorname{Im} \left\{ \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right\}, \quad n = 1, 2. \quad (5)$$

Под действием переменного электрического поля в структуре возникают активный, т.е. синфазный с внешним полем,  $J_c$ , и реактивный,  $J_s$ , токи поляризации. Синфазный ток в  $n$ -й яме равен

$$J_{cn} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt J_n(t) \cos(\omega t), \quad n = 1, 2, \quad (6)$$

и, как показано в [2],  $J_{c1} \approx J_{c2} = J_c$ . Подробное описание численной и аналитической методик нахождения  $J_c$  в слабых и сильных переменных полях изложено в [1–3]. Для расчета была выбрана структура с барьерами мощностью  $\alpha = 10$  и ямами с шириной  $a = 2\pi$  ( $\alpha/p \approx \alpha a/\pi = 2\alpha = 20$ ).

### 3. Результаты аналитической теории

В работах [1,2] была развита аналитическая теория когерентного резонансного туннелирования в двухъямной наноструктуре в присутствии переменного электромагнитного поля и постоянного электрического поля. Было показано, что энергетический спектр структуры состоит из двух уровней  $\varepsilon_R^{(1)}$  и  $\varepsilon_R^{(2)}$ , возникающих из-за интерференции между ямами. Резонансная частота электромагнитного поля полагается равной разности энергий этих уровней:  $\varepsilon_R^{(1)} - \varepsilon_R^{(2)} = \omega$ .

Ключевой величиной является активный ток первой ямы (равный току второй ямы) [2]

$$J_c = -\frac{EQ\Gamma^2\eta}{|\Delta(\lambda)|^2}, \quad \eta = \frac{e^2 p^2}{\alpha} \left[ \frac{V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}}{1 + V_0^2} \right], \quad (7)$$

$$|\Delta(\lambda)|^2 \approx [(\bar{\lambda}^2 + \Gamma^2 - \xi^2)^2 + 4\Gamma^2\xi^2],$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + V_0^2}} = \frac{V_{ac}}{8\sqrt{1 + V_0^2}}, \quad (8)$$

$$V_0 = V_{dc}/t_0, \quad t_0 = \frac{4p_0^2}{\alpha a},$$

$$\Gamma = \frac{2p_0^3}{\alpha^2 a}, \quad p_0 = \frac{\pi}{a} = \frac{1}{2}, \quad Q = pq^2.$$

Здесь  $\xi = \varepsilon - \varepsilon_R^{(1)}$ ,  $t_0$  — энергия расщепления,  $V_{ac}$  — переменный электрический потенциал,  $\Gamma$  — ширина уровней,  $Q$  — амплитуда потока электронов. Активный

ток  $J_c$  обуславливает усиление и генерацию электромагнитного поля (см. [1,2]). Для анализа эффективности генерации используем меру эффективности  $\tilde{P}$ , введенную нами ранее [2],

$$\tilde{P} = \frac{1}{2pq^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^{2a} dx J_{1c}(x, t) E(t) \right]$$

$$= \frac{2\lambda^2 \Gamma^2 [V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{|\Delta(\lambda)|^2 [1 + V_0^2]^{3/2}}. \quad (9)$$

Эффективность  $\tilde{P}$  равна отношению числа фотонов, испущенных ДНС в единицу времени, к числу электронов, подводимых к ДНС с помощью резонансного туннелирования. Выражения (7)–(9) получены в [2] в предположении малости величины

$$\tilde{V}^2 = \frac{\lambda^2}{4\Gamma^2(1 + V_0^2)} = \frac{V_{ac}^2}{256\Gamma^2(1 + V_0^2)}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что гарантированная область применимости (7)–(9) невелика, особенно при малых  $V_0$ . Поэтому представляется интересным рассчитать активный ток и эффективность в широком интервале сильных полей и, в частности, найти истинные пределы применимости (7)–(9).

### 4. Ток и эффективность излучения двухъямной наноструктуры в случае слабого электромагнитного поля

Вначале изучим ток  $J_c$  и эффективность  $\tilde{P}$  в слабом поле, когда  $\bar{\lambda} \ll \Gamma$ . Уравнение Шредингера (1) решалось с потенциалами взаимодействия  $\hat{V}$  обоих типов. Результаты получаются одинаковыми, как и предсказывалось в аналитической работе [2].

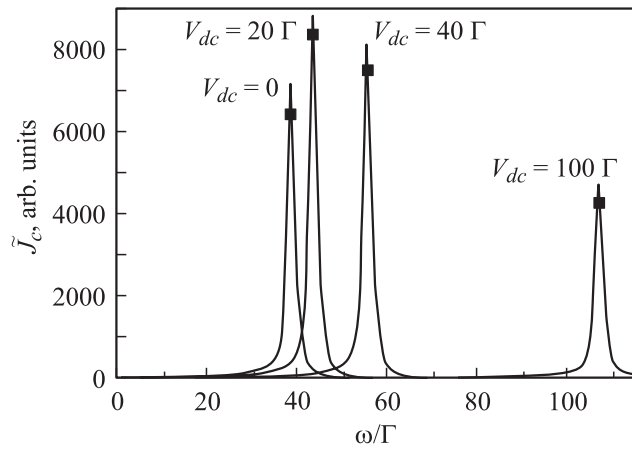
На рис. 2 приведены результаты расчета зависимости тока  $\tilde{J}_c = -J_c/2eEa$  от частоты  $\omega$  при различных значениях постоянного напряжения  $V_{dc}$ . Видно, что  $\tilde{J}_c$  имеет резкие максимумы при резонансных частотах  $\omega_m$ , совпадающих с разностью энергий резонансных уровней  $\varepsilon_R^{(1)}$  и  $\varepsilon_R^{(2)}$  [1]:

$$\omega_m = t_0 \sqrt{1 + V_0^2}. \quad (11)$$

Значение тока в максимуме дается (7), если положить  $\bar{\lambda} \ll \Gamma$ :

$$\tilde{J}_c = \tilde{J}_c(0) \frac{V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}}{1 + V_0^2}, \quad (12)$$

где  $\tilde{J}_c(0) = \tilde{J}_c(V_0 = 0)$ . Сравним зависимость (12)  $\tilde{J}_c$  от  $V_0 = V_{dc}/t_0$  с результатами численного решения. Нетрудно получить из (12), что ток с ростом напряжения  $V_{dc}$



**Рис. 2.** Зависимости величины активного тока  $\tilde{J}_c$  от частоты переменного поля  $\omega$  при различных значениях напряжения  $V_{dc}$ : сплошная линия — численный результат, точки — аналитический результат.

достигает максимума при

$$V_{dc}^m = \frac{t_0}{\sqrt{3}} \approx 23\Gamma, \quad (13)$$

что хорошо согласуется с поведением кривой и положением максимума на рис. 2.

Эффективность в слабом поле при  $\xi = 0$  равна

$$\tilde{P} = \frac{2\lambda^2 [V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{\Gamma^2 [1 + V_0^2]^{3/2}}. \quad (14)$$

Видим, что это — малая величина, пропорциональная  $\lambda^2/\Gamma^2$ . С ростом  $V_0 \gg 1$  эффективность быстро уменьшается по закону  $1/V_0^2$ . Таким образом, эффективность ДНС в слабом поле очень мала.

## 5. Эффективность излучения двухъямных наноструктур в сильных электромагнитных полях

В работе [2] аналитически показано, что существует принципиальная возможность кардинально повысить эффективность  $\tilde{P}$  до максимально возможной, т. е. до единицы. Такая эффективность достигается в оптимальном режиме, при котором энергия подводимых электронов  $\xi$  и поле  $\tilde{\lambda}$  удовлетворяют уравнениям

$$\xi = \xi_0 = \pm \sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \Gamma^2}, \quad \tilde{\lambda} > \Gamma, \quad \frac{V_{ac}}{8\Gamma} > \sqrt{1 + V_0^2}. \quad (15)$$

Уравнения (15) получаются из требований максимальной эффективности  $\tilde{P}$  (9) по  $\xi$ . Подставляя  $\xi_0$  в (9), получаем

эффективность излучения в максимумах

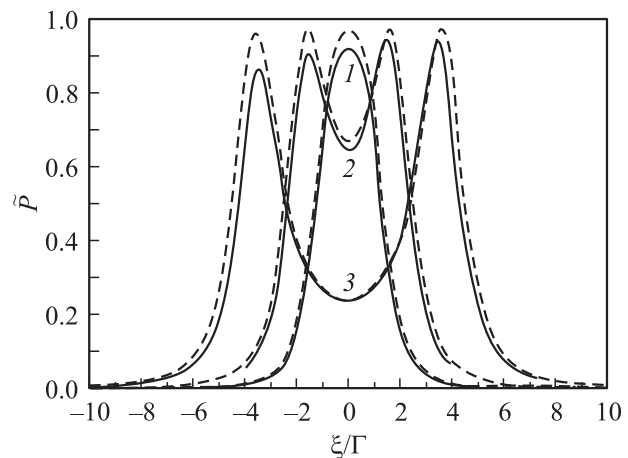
$$\tilde{P}_m = \frac{1}{2} \frac{[V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{\sqrt{1 + V_0^2}}. \quad (16)$$

Если  $V_0 = 0$ ,  $\tilde{P}(0) = 1/2$ , а при  $V_0 \gg 1$  достигается максимально возможная эффективность  $\tilde{P}_m(\infty) = 1$ . Это означает, что каждый электрон, подводимый к ДНС, излучает один фотон. Если  $\tilde{\lambda} < \Gamma$ , то имеется один максимум эффективности при  $\xi = 0$  и  $\tilde{P}_m(0) < 1$ . Таким образом, поведение ДНС в переменном поле аналогично поведению двухуровневого когерентного лазера на одноямной структуре [4].

Результаты численного решения приведены на рис. 3, где дана зависимость эффективности  $\tilde{P}$  от подстройки  $\xi$  для различных  $V_{ac}$  при больших  $V_{dc}$ :  $V_{dc} = 100\Gamma$  ( $V_0^2 = 6.25 \gg 1$ ). Из рис. 3 видно, что при  $V_{ac}/\Gamma = 20$  существует один максимум для  $\xi_0 = 0$ . При  $V_{ac}/\Gamma = 40$  и 80 появляются два максимума для положительной и отрицательной подстроек  $\xi_0$ , растущих с амплитудой поля  $V_{ac}$ . Значение эффективности в максимумах близко к единице.

На рис. 3 изображены также аналитические зависимости  $\tilde{P}(\xi)$ , хорошо согласующиеся с численными. Некоторая несимметричность в численных результатах также согласуется с аналитическим расчетом, если ее учесть согласно [2]. Дело в том, что мы для упрощения опустили в (7), (8) малые члены, нарушающие симметрию.

Сравним теперь критические значения поля  $V_{ac}^c$ , при которых реализуется оптимальный режим согласно (15). На рис. 4 проводится сравнение (15) с численными результатами. Видно прекрасное согласие. В частности, при  $V_{dc}/\Gamma = 100$  критическое значение  $V_{ac}^c/\Gamma \approx 22$ . Ско-

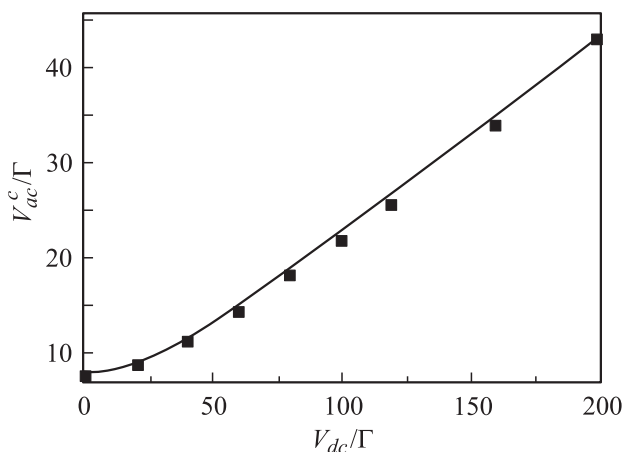


**Рис. 3.** Зависимости эффективности излучения двухъямной наноструктуры  $\tilde{P}$  от подстройки  $\xi$  при различных значениях потенциала переменного поля  $V_{ac}$  в случае  $V_{dc} = 100\Gamma$ : сплошная линия — численный результат, штриховая линия — аналитический результат.  $V_{ac} = 20\Gamma$  (1),  $40\Gamma$  (2),  $80\Gamma$  (3).

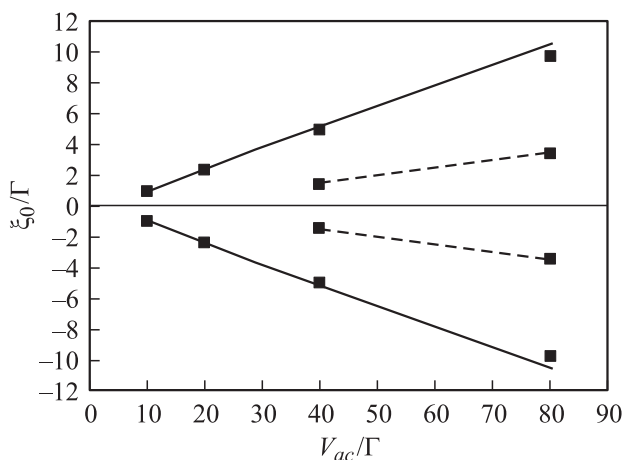
рость движения максимумов эффективности  $\xi_0(\bar{\lambda})$  приводится на рис. 5. Снова аналитическое значение  $\xi_0$  (15) хорошо согласуется с численным.

Таким образом, можно констатировать, что формулы аналитической теории [2] правильно описывают качественное и количественное поведение эффективности, вплоть до  $V_{ac}/\Gamma = 80$ . При этом малый параметр теории  $\tilde{V}^2$  становится больше единицы ( $\tilde{V}^2 \approx 3$ ), т.е. область применимости теории оказывается шире, чем  $\tilde{V}^2 < 1$ .

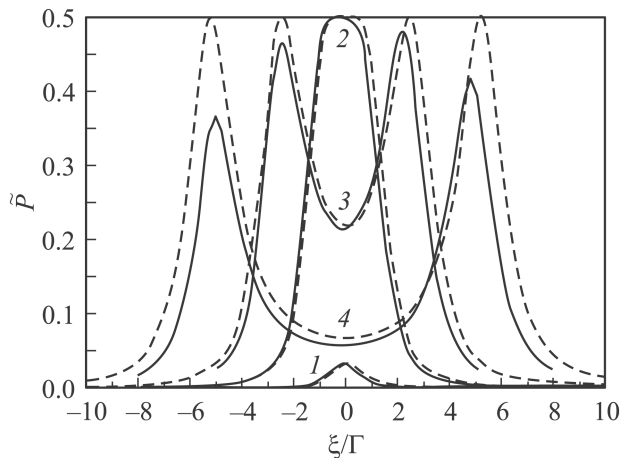
Теперь приведем результаты численных расчетов для противоположного случая:  $V_{dc} = 0$ . Зависимость  $\tilde{P}(\xi)$  приведена на рис. 6. Если значение  $V_{ac}$  меньше критического ( $V_{ac}^c/\Gamma = 8$ ), то имеется один максимум при  $\xi_0 = 0$  (см. кривую при  $V_{ac}/\Gamma = 1$ ), а затем появляется



**Рис. 4.** Зависимость критического значения поля  $V_{ac}^c$ , при котором появляются два максимума эффективности  $\tilde{P}$ , от напряжения  $V_{dc}$ : сплошная линия — аналитический результат, точки — численный результат.



**Рис. 5.** Зависимости значений подстройки  $\xi_0$ , при которых эффективность имеет максимумы  $\tilde{P}_m$ , от потенциала переменного поля  $V_{ac}$ : линии — аналитический результат при  $V_{dc} = 0$  (сплошная) и  $V_{dc} = 100\Gamma$  (штриховая), точки — численный результат.



**Рис. 6.** Зависимости эффективности излучения двухъямной наноструктуры  $\tilde{P}$  от подстройки  $\xi$  при различных значениях потенциала переменного поля  $V_{ac}$  в случае  $V_{dc} = 0$ : сплошная линия — численный результат, штриховая линия — аналитический результат.  $V_{ac} = \Gamma$  (1),  $8\Gamma$  (2),  $20\Gamma$  (3),  $40\Gamma$  (4).

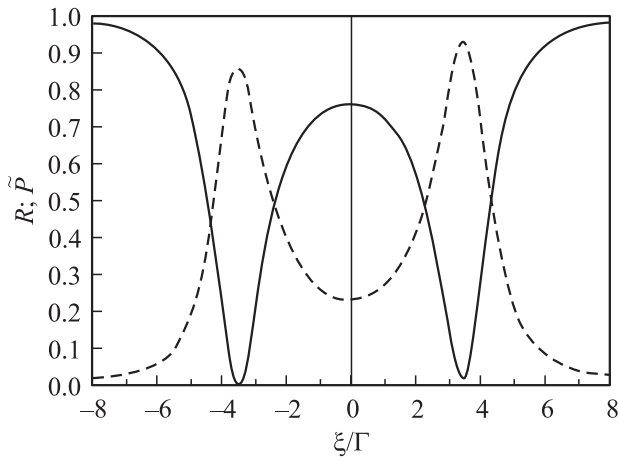
„двугорбая“ зависимость при  $V_{ac}/\Gamma = 20, 40$ . Эффективность в максимумах  $\tilde{P}_m$  не превышает  $1/2$ . Согласие с аналитическими результатами достаточно хорошее, но хуже, чем при  $V_{ac}/\Gamma = 100$  (как и ожидалось), причем  $\tilde{V}^2 \approx 6$  при  $V_{ac}/\Gamma = 40$ . Скорость движения максимумов эффективности и критические значения  $V_{ac}^c$  сравниваются на рис. 5 и показывают совпадение аналитических и численных результатов с высокой точностью.

В заключение отметим, что численные расчеты получены для обоих типов взаимодействия электронов с электромагнитным полем — (2) и (3). Результаты совпадают с высокой точностью.

## 6. Коэффициенты отражения и прохождения двухъямной наноструктуры в сильном электромагнитном поле

Как было показано аналитически в [2] и подтверждено в разд. 5, поведение ДНС аналогично поведению когерентного лазера на квантовой яме [4], в котором излучательные переходы идут между резонансными уровнями квантовой ямы. В то же время в [4] было показано, что в оптимальном режиме коэффициент отражения  $R$  обращается в нуль (следовательно, коэффициент прохождения  $T$  — в единицу). Поэтому следует ожидать, что коэффициенты  $R$  и  $T$  ДНС обладают аналогичными свойствами. По определению коэффициент отражения [4]

$$R = \frac{|\psi_1(0) - q|^2}{q^2}$$



**Рис. 7.** Зависимости коэффициента отражения  $R$  (сплошная линия) и эффективности излучения двухъямной наноструктуры  $\tilde{P}$  (штриховая линия) от подстройки  $\xi$  при  $V_{ac} = 80\Gamma$  и  $V_{dc} = 100\Gamma$ .

выражается через волновую функцию верхнего уровня  $\psi_1(0)$

$$\psi_1(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \Psi(x, t) \exp(i\epsilon t). \quad (17)$$

На рис. 7 представлены зависимости коэффициента отражения  $R$  от подстройки  $\xi$  при  $V_{dc} = 100\Gamma$ ,  $V_{ac} = 80\Gamma$ . Для удобства сравнения приведена эффективность излучения  $\tilde{P}$ . Видно, что максимумы эффективности соответствуют минимумам отражения (максимумам прохождения), причем отражение при оптимальной подстройке  $\xi_0$  близко к нулю. Таким образом, отражение ДНС ведет себя подобно отражению в когерентном лазере, подтверждая их аналогию.

## 7. Заключение

Авторы благодарны М.А. Ремневу за полезное обсуждение работы. Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы „Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы“ (контракт № 02.513.11.3068).

## Список литературы

- [1] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **127**, 131 (2005).
- [2] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **128**, 922 (2005).
- [3] В.Ф. Елесин, И.Ю. Катеев. ФТП, **39**, 1106 (2005).
- [4] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **122**, 131 (2002).

Редактор Л.В. Шаронова

## High-frequency properties of double-well nanostructures

V.F. Elesin, I.Yu. Kateev

Moscow Engineering Physics Institute  
(State University),  
115409 Moscow, Russia

**Abstract** In this paper an active polarization current and a radiation efficiency of double-well nanostructures are obtained in a broad range of time-dependent electromagnetic field amplitudes, based of the analytical and numerical solutions of the Schrödinger equation. The generation in a topical terahertz range with smooth frequency tuning is shown to be feasible, the radiation efficiency being close to maximum. The electron reflection from the structure is investigated and is shown to vanish at the maximum efficiency.