

03

Аналитическое решение в классе Линя для нестационарных градиентных течений в слое с проницаемыми границами

© К.В. Губарева¹, Е.Ю. Просвиряков^{2,3}, А.В. Еремин¹

¹ Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

² Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия

³ Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

E-mail: r.kristina2017@mail.ru

Поступило в Редакцию 4 июня 2026 г.

В окончательной редакции 24 июня 2026 г.

Принято к публикации 24 июня 2026 г.

Построено аналитическое решение нестационарных уравнений Навье—Стокса для слоя с проницаемыми границами при действии вертикального отсоса (вдува) и горизонтального градиента давления. В классе Линя система сведена к задаче Штурма—Лиувилля, получены явные выражения для стационарных профилей. Время релаксации начального возмущения определяется только вертикальным числом Рейнольдса и параметром скольжения, не зависит от вязкости жидкости и горизонтальных градиентов. Сравнение данных для воды и глицерина подтвердило этот вывод. Результаты применимы для верификации численных методов и анализа тепломассопереноса в мембранных устройствах.

Ключевые слова: аналитические решения уравнений Навье—Стокса, проницаемые границы, скольжение Навье, релаксация возмущений.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.19.63594.20800

Задача построения аналитических решений уравнений Навье—Стокса не теряет актуальности: такие решения выявляют симметрии нелинейной системы и служат надежными тестами для численных алгоритмов [1–3]. Значительный интерес вызывают течения у проницаемых стенок, они типичны для фильтрационных и мембранных процессов, а также для проточных реакторов с упорядоченной пористой структурой, где локальное поле скорости напрямую определяет тепломассоперенос [4,5].

Первые надежные решения для каналов с пористыми стенками были получены еще в середине XX века. Допустив постоянство поперечной скорости, задачу удалось свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям и построить автомодельные профили [4–7]. Позже выяснилось, что гораздо более широкий класс течений допускает аналитическое описание, если принять анзац с линейной зависимостью компонент скорости от части координат [8,9]. Этот прием, впервые предложенный Линем, сводит уравнения Навье—Стокса к системам параболических уравнений и делает возможным аналитическое исследование нестационарных и пространственно-неоднородных режимов.

Этот метод получил дальнейшее развитие применительно к изобарическим и градиентным течениям с проницаемыми границами [10–13]. Обнаружено, что поперечный поток массы заметно перестраивает профили скорости, создает зоны возвратного течения и влияет на скорость затухания возмущений. Учет скольжения Навье и вращения приблизил теоретические модели к условиям микрофлюидики и геофизических течений [12,14]. Ряд работ посвящен аналитическим решениям для стратифицированных сдвиговых потоков и течений с объ-

емным тепловыделением [15]. Отдельно отметим работы, в которых построены аналитические решения для нелинейных вязких течений методом неопределенных коэффициентов [16] и для плоскопараллельных адвективных потоков в слоях с проницаемыми границами [17].

Цель настоящей работы — получить аналитическое решение нестационарных уравнений Навье—Стокса для градиентного течения в горизонтальном слое с проницаемыми границами и выяснить, как числа Рейнольдса, скольжение и градиенты давления влияют на структуру потока.

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости толщиной h . Ось z поперек слоя. Нижняя стенка ($z = 0$) твердая, с проскальзыванием Навье (параметр α). Верхняя граница ($z = h$) движется со скоростями $U_1(t)$, $V_1(t)$ и проницаема для вертикального потока $W = \text{const}$. Поле скоростей ищем в виде класса Линя

$$V_x = U(z, t) + yu(z, t), \quad V_y = V(z, t), \quad V_z = W.$$

Давление $P = P_0(t) + P_1(t)x + P_2(t)y$. Вводим безразмерные градиенты $G_x = -\rho^{-1}\partial P/\partial x$, $G_y = -\rho^{-1}\partial P/\partial y$. Переходя к безразмерным переменным $(h, h^2/\nu, [U])$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + G_y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \delta^2 \text{Re}_U V u + G_x,$$

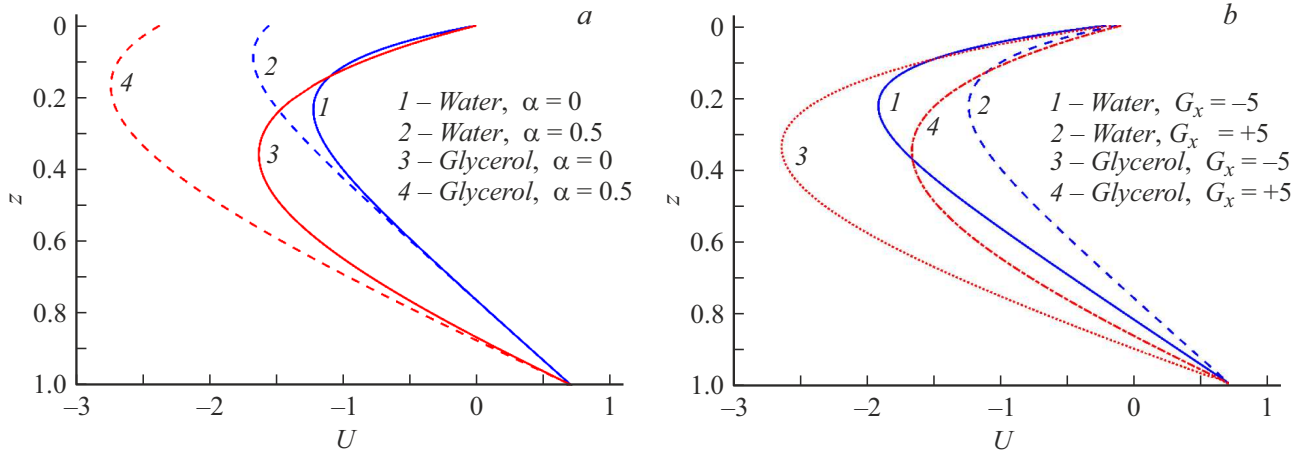


Рис. 1. Стационарные профили продольной скорости. *a* — влияние α ; *b* — влияние G_x .

где $Re_w = Wh/\nu$ — вертикальное число Рейнольдса, $\delta = h/l$, $Re_U = [U]l/\nu$. Граничные условия:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad \alpha \frac{\partial V}{\partial z} = V, \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial z} = U \quad (z = 0),$$

$$u(1, t) = u_1(t), \quad V(1, t) = V_1(t), \quad U(1, t) = U_1(t).$$

Начальные условия — сумма стационарного профиля и малого возмущения. Уравнения для u и V линейны, их стационарные решения находятся аналитически. Уравнение для U решается численно после подстановки u_{st} , V_{st} . Для анализа нестационарной динамики применяется подстановка $f = e^{\frac{Re_w}{2}z}\Psi$, сводящая однородную часть к уравнению теплопроводности. Задача Штурма—Лиувилля дает собственные значения λ_n из характеристического уравнения. Решения для u и V — ряды по собственным функциям; для U — интеграл Дюамеля.

Численная реализация выполнена в среде MATLAB. Корни характеристического уравнения находились методом сканирования с последующим уточнением с помощью встроенной функции `fzero`. Интегралы, определяющие коэффициенты разложения, вычислялись по правилу трапеций. Ряды по собственным функциям усекались на $N = 30$ членах, что обеспечивало сходимость с точностью не хуже 10^{-6} для рассматриваемых профилей. Все вычисления выполнены в стандартной конфигурации MATLAB без привлечения дополнительных специализированных пакетов. Рассматривались вода ($\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $Re_w = -10$) и глицерин ($\nu = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $Re_w = -5$). Параметры: $h = 0.001 \text{ м}$, $W = -0.01 \text{ м/с}$, $Re_U = 10^4$, $\delta = 0.01$, $G_x = 5$, $G_y = 0.2$, $\alpha = 0.01$ (если не оговорено). Начальное возмущение — сумма трех гармоник.

На рис. 1, *a* приведены профили $U(z)$ для воды и глицерина при $\alpha = 0$ и 0.5 . У воды нуль скорости при $\alpha = 0$ находится на $z \approx 0.76$ (зона возвратного течения), с ростом α он сдвигается до $z \approx 0.77$. У глицерина нуль

при $\alpha = 0$ на $z \approx 0.87$. На рис. 1, *b* показаны профили при $G_x = -5$ и $+5$. При $G_x = +5$ область возвратного течения ($U < 0$) занимает нижнюю часть слоя и составляет 76.5% для воды и 86.5% для глицерина. При $G_x = -5$ противоток смещен к верхней границе и выражен слабее.

На рис. 2, *a* и *b* представлены карты знака U для воды и глицерина соответственно. На рис. 2, *c* показана эволюция профилей. Для воды $\lambda_1 \approx 35.06$ ($T_{rel} \approx 0.029$), для глицерина $\lambda_1 \approx 16.31$ ($T_{rel} \approx 0.061$). За время T_{rel} (характерное время релаксации) нестационарные моды заметно затухают.

На рис. 3, *a* приведена зависимость T_{rel} от α : с ростом α время релаксации убывает. На рис. 3, *b* показана зависимость T_{rel} от Re_w (максимум при $Re_w = 0$). Кривые для воды и глицерина при одинаковых Re_w совпадают, что доказывает независимость спектра от вязкости.

На рис. 4 представлены профили $V(z)$ при разных G_y . Рост G_y сдвигает кривую вправо (в сторону увеличения V); у глицерина сдвиг сильнее из-за меньшего $|Re_w|$.

Таким образом, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля, определяющие скорость затухания возмущений, зависят только от вертикального числа Рейнольдса и параметра скольжения. Вязкость жидкости и продольные градиенты давления на них не влияют. Этот факт подтвержден численным расчетом для двух сред с разной вязкостью.

Предложенное решение пригодно для тестирования численных методов. Оно может быть использовано для верификации программных кодов, моделирующих нестационарные течения в каналах с проницаемыми стенками. Кроме того, решение позволяет оценивать характерные времена выхода на стационарный режим. Это важно при проектировании мембранных аппаратов и микрофлюидных реакторов, где гидродинамика напрямую связана с эффективностью массообмена.

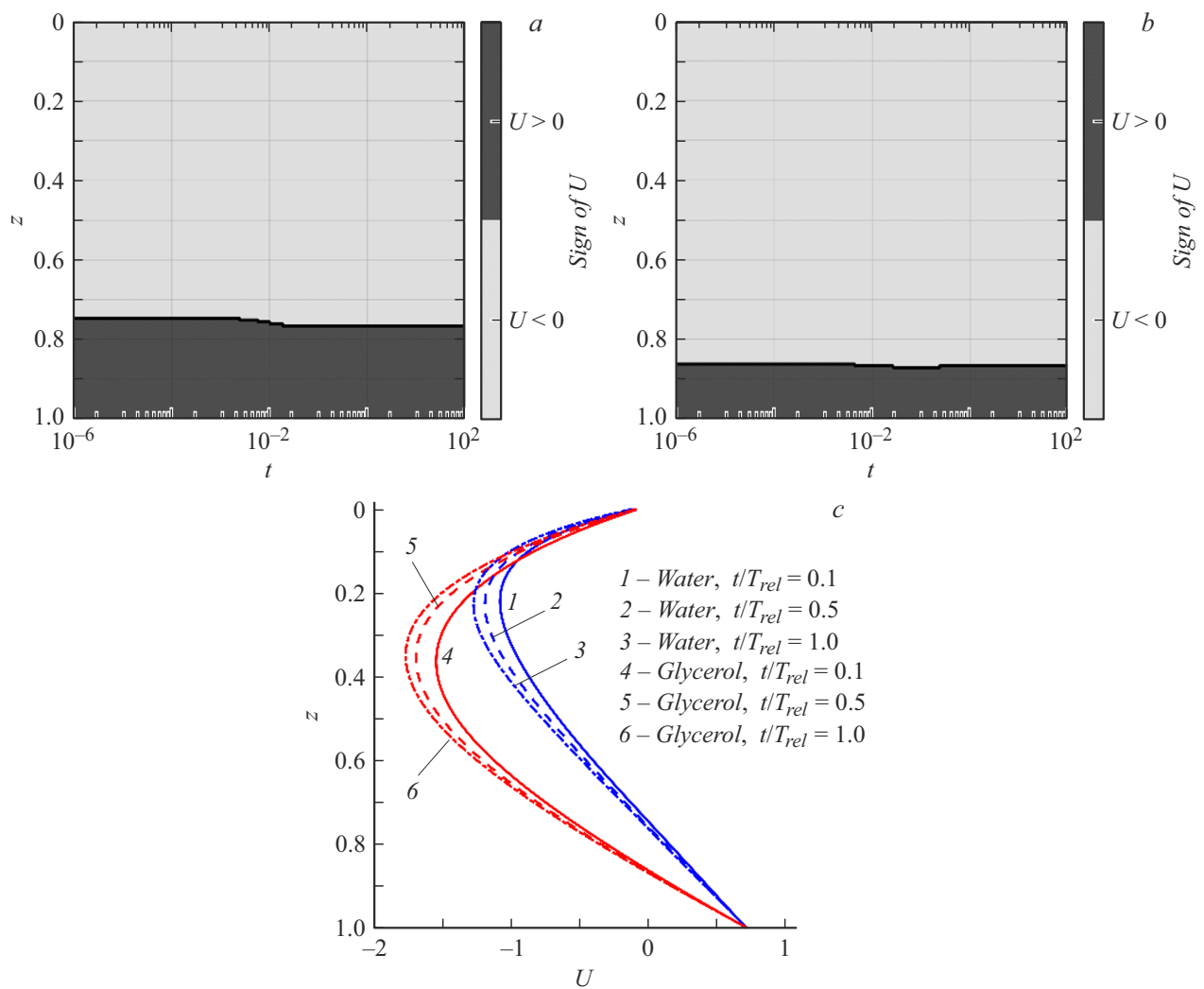


Рис. 2. Карты знака U для воды (a) и глицерина (b). c — профили $U(z)$ в моменты $t/T_{rel} = 0.1, 0.5, 1.0$.

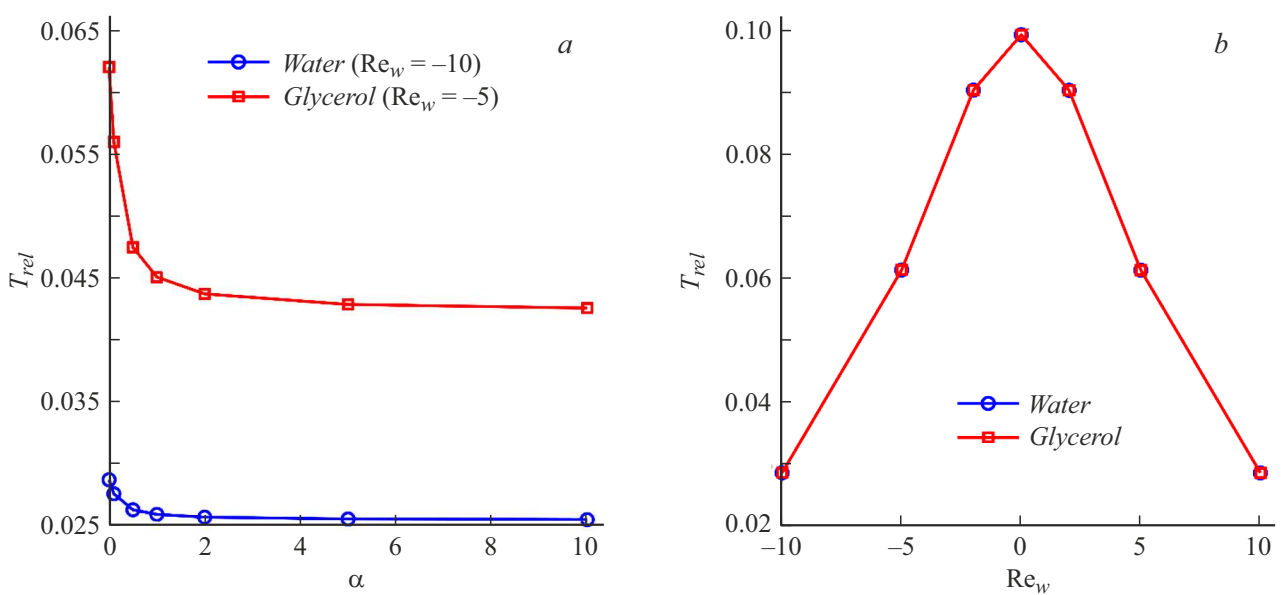


Рис. 3. Зависимости времени релаксации от α (a) и Re_w (b).

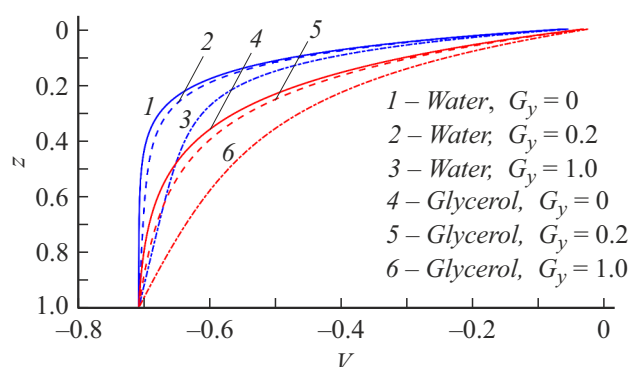


Рис. 4. Влияние G_y на поперечную скорость $V(z)$.

- [15] К.В. Губарева, Е.Ю. Просвирыков, А.В. Еремин, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика, **18** (1), 47 (2026). DOI: 10.14529/mmph260106
- [16] M.H. Harun, D.H. Didane, M.A. Sayed Abdelaal, I. Zaman, B. Manshoor, J. Complex Flow, **3** (2), 38 (2021).
- [17] K.G. Shvarts, Russ. J. Nonlin. Dyn., **19** (2), 219 (2023). DOI: 10.20537/nd230601

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № FSSE-2025-0006) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (создание новых молодежных лабораторий).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] A.S. Berman, J. Appl. Phys., **24**, 1232 (1953). DOI: 10.1063/1.1721476
- [2] S.W. Yuan, J. Appl. Phys., **27**, 267 (1956). DOI: 10.1063/1.1722355
- [3] X. Feng, X. Lu, Y. He, SIAM J. Numer. Anal., **61**, 167 (2023). DOI: 10.1137/21M1450872
- [4] D. Das, K. Mondal, N. Poddar, P. Wang, Phys. Fluids, **36**, 023610 (2024). DOI: 10.1063/5.0184921
- [5] J. Málek, K. Rajagopal, Phys. Fluids, **36**, 017114 (2024). DOI: 10.1063/5.0185585
- [6] B.M. Shankar, I.S. Shivakumara, Acta Mech., **234**, 4589 (2023). DOI: 10.1007/s00707-023-03624-0
- [7] M. Mohammad, A. Trounev, Eur. Phys. J. Spec. Top., **234**, 2191 (2024). DOI: 10.1140/epjs/s11734-024-01209-z
- [8] В.А. Галкин, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **32** (1), 77 (2026). DOI: 10.21538/0134-4889-2026-32-1-77-87
- [9] Г.Б. Сизых, Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **26** (1), 190 (2022). DOI: 10.14498/vsgtu1900
- [10] А.И. Филиппов, М.А. Зеленова, И.Ф. Кабиров, Изв. вузов. Физика, **69** (3), 49 (2026). DOI: 10.17223/00213411/69/3/6
- [11] K.V. Gubareva, E.Yu. Prosviryakov, A.V. Eremin, DReaM, Iss. 5, 6 (2025). DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028
- [12] K.V. Gubareva, E.Yu. Prosviryakov, A.V. Eremin, Adv. Eng. Res., **26** (1), 2242 (2026). DOI: 10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242
- [13] O. Bogoyavlenskij, Phys. Fluids, **34**, 083108 (2022). DOI: 10.1063/5.0101870
- [14] K.V. Gubareva, E.Yu. Prosviryakov, A.V. Eremin, DReaM, Iss. 1, 6 (2026). DOI: 10.17804/2410-9908.2026.1.006-022