

К теории стационарных плоских волн ударной ионизации в полупроводниках

© А.С. Кюрегян[¶]

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина,
111250 Москва, Россия

(Получена 15 августа 2006 г. Принята к печати 13 ноября 2006 г.)

Построена общая аналитическая теория стационарных плоских волн ударной ионизации в полупроводниковых приборах при произвольных зависимостях скоростей дрейфа и коэффициентов ударной ионизации электронов и дырок от напряженности электрического поля. Получены формулы, описывающие структуру фронта волн и позволяющие вычислить его основные параметры — скорость, толщину, максимальную напряженность поля, концентрации носителей заряда и напряженность поля за фронтом — при заданных плотности тока и уровне легирования полупроводника. Указаны ограничения теории, обусловленные пренебрежением диффузионными потоками и использованием континуального приближения.

PACS: 72.20.Ht, 72.20.Jv, 85.30.De, 85.30.Mn, 85.30.Kk

1. Введение

Представление о волне ударной ионизации давно используется для описания динамики пробоя различных сред, однако аналитическая теория далека от завершения даже для простейшего, но важного случая плоской стационарной волны. Применительно к пробоям газов наиболее полный вариант теории изложен, насколько нам известно, в монографии [1]. В ней использовано предположение о равенстве нулю плотности тока qj , переносимого волной, которое сильно упрощает задачу, но применимо далеко не всегда. Кроме того, в большинстве случаев оно в принципе не позволяет вычислить ни скорость фронта u , ни напряженность поля перед фронтом E_0 , которые остаются свободными параметрами теории, а при $u > v_e(E_0)$ (v_e — скорость дрейфа электронов) даже приводит к потере физического смысла.¹ Применительно к полупроводникам задача усложняется вследствие того, что и дрейфовые скорости электронов и дырок $v_{e,h}$, и коэффициенты ударной ионизации $\alpha_{e,h}$ соизмеримы, а зависимости $v_{e,h}$ от напряженности поля E нелинейны. Простейшая теория плоских волн ионизации, учитывающая эти обстоятельства, была предложена в работе [2] и позволила получить ряд правильных в качественном отношении результатов. Однако ее авторы ограничивались рассмотрением случая равенства кинетических коэффициентов электронов и дырок и использовали ряд нереалистичных предположений (ступенчатую зависимость $\alpha_{e,h}(E)$ и кусочно-линейную аппроксимацию зависимости $v_{e,h}(E)$), исключающих возможность количественных расчетов.

Цель настоящей работы состоит в построении аналитической теории стационарных плоских волн ударной ионизации в полупроводниковых диодах, работающих в режимах TRAPATT [2,3] и обострения напряженности [4,5], свободной от указанных ограничений.

2. Распределения носителей заряда и электрического поля на фронте волны

Рассмотрим обратно-смещенную $p^+ - n - n^+$ -структуру с концентрацией доноров в n -слое N и площадью S . Пусть через нее протекает ток qSj , постоянство которого обеспечивается внешней цепью. Благодаря зарядке барьерной емкости структуры этим током падение напряжения на ней U будет увеличиваться и, в конце концов, значительно превысит напряжение стационарного лавинного пробоя U_B при условии, что свободные электроны и дырки в области пространственного заряда (ОПЗ) отсутствуют. Если в этот момент времени в ОПЗ появятся электроны и дырки с концентрациями n_+ и p_+ , то вблизи $p^+ - n$ -перехода, где поле максимально, начнется интенсивная ударная ионизация и количество носителей заряда очень быстро достигнет величины, достаточной для вытеснения поля из этой области. В результате сформируется движущаяся в сторону n^+ -слоя (анода) волна (см. рис. 1), фронт которой разделяет области сильного поля перед ним и высокой концентрации носителей заряда за ним [3,4]. Вопрос о причинах появления в ОПЗ электронов и дырок в „нужный“ момент времени и в достаточном количестве до сих пор остается актуальным (см., например, последние работы на эту тему [6,7]), однако его обсуждение выходит за рамки настоящей работы. Для определенности можно считать, что затравочные носители заряда появились, например, в результате воздействия короткого импульса ионизирующего излучения. В силу постоянства плотности потока j волна будет двигаться с постоянной скоростью u [3]

[¶] E-mail: ask@vei.ru

¹ Единственным исключением, для которого при $j = 0$ неравенство $u > v_e(E_0)$ имеет физический смысл в дрейфовом приближении, а соотношение между u и E_0 в принципе можно найти, является генерация затравочных носителей заряда перед фронтом за счет прямой фотоионизации излучением самой плазмы, приходящим из-за фронта. При этом коэффициент поглощения излучения должен быть больше $\alpha_e(E_0)$ [1].

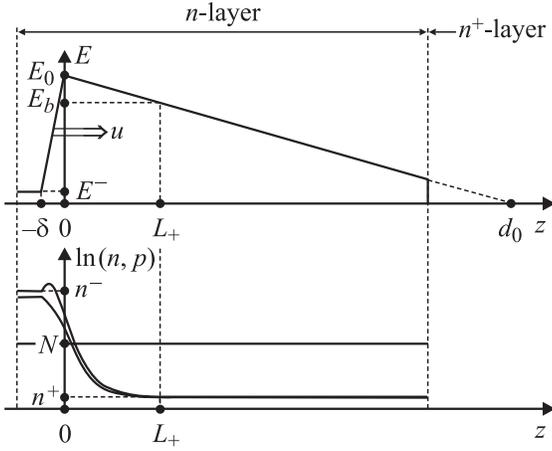


Рис. 1. Схематическое изображение распределения поля E и свободных носителей заряда n, p при прохождении плоской волны ударной ионизации через n -слой $p^+ - n - n^+$ -структуры.

после своего формирования и до встречи с n^+ -слоем, поэтому для ее описания можно использовать автомодельное решение системы уравнений непрерывности и Пуассона. В системе координат $z = (x - ut)$, начало которой привязано к точке с максимальной напряженностью поля $E_0 = E(0)$, эти уравнения в дрейфовом приближении имеют вид

$$\frac{d(u - v_e)n}{dz} = \frac{d(u + v_h)p}{dz} = -(\alpha_e v_e n + \alpha_h v_h p), \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{q}{\varepsilon} (n - p - N), \quad (2)$$

где E — напряженность поля с обратным знаком, q — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость, $\alpha_{e,h}$ и $v_{e,h}$ — коэффициенты ударной ионизации и дрейфовые скорости электронов и дырок соответственно, которые мы считаем локальными функциями E , n, p — концентрации электронов и дырок. Граничные условия системы (1), (2) можно представить в виде

$$n(L_+) = p(L_+) = n_+, \quad (3)$$

$$\frac{dE(L_+)}{dz} = -\frac{q}{\varepsilon} N, \quad (4)$$

где плоскость $z = L_+ > 0$ является границей (несколько условной) области относительно сильных полей перед фронтом, за пределами которой лавинное размножение пренебрежимо мало. Для оценки величины L_+ можно использовать формулу $L_+ \approx \varepsilon(E_0 - E_B)/qN$, которая следует из условия $E(L_+) = E_B$, где $E_B = \sqrt{2qNU_B/\varepsilon}$ — максимальная напряженность поля в ОПЗ диода в стационарном состоянии при $U = U_B$.

Интегрирование первого из равенств (1) с учетом (3) дает соотношение

$$v_e n + v_h p = u(n - p) + j_b, \quad (5)$$

где $j_b = (v_e + v_h)n_+$ — плотность потока затравочных носителей заряда в области $z \gtrsim L_+$. Очевидно, что со-

отношение (5) эквивалентно условию постоянства полного тока вдоль структуры. Явный учет существования максимума поля на фронте волны, однозначно связанного с конечностью полного тока, является важнейшей особенностью предлагаемой теории, отличающей ее от [1]. Во-первых, уменьшение поля перед фронтом до величин $E < E_B$ обеспечивает существование автомодельного решения при наличии затравочных носителей заряда далеко перед фронтом. Во-вторых, наличие затравочных носителей заряда придает физический смысл движению фронта со скоростью $u > v_{e,h}(E_0)$ в рамках дрейфового приближения (см. сноску ¹). В-третьих, равенство $dE(0)/dz = 0$ является еще и дополнительным граничным условием для уравнения Пуассона, позволяющим вычислить скорость движения фронта u в рамках самой теории. Действительно, его следствием являются соотношения $[n(0) - p(0)] = N$ и $[v_e n(0) - v_h p(0)] = j$, подстановка которых в (5) дает формулу

$$u = \frac{j - j_b}{N}, \quad (6)$$

выведенную еще в работе [3].

Комбинируя (1), (2) и (5), получим после несложных преобразований соотношения

$$n(z) = \frac{v}{u - v_e} \left(\frac{\varepsilon}{q} \frac{dE}{dz} + N \right) + \frac{j_b}{v_e + v_h},$$

$$p(z) = \frac{v}{u + v_h} \left(\frac{\varepsilon}{q} \frac{dE}{dz} + N \right) + \frac{j_b}{v_e + v_h} \quad (7)$$

и уравнение для напряженности поля

$$\frac{d}{dz} \left[v \left(\frac{dE}{dz} + \beta \right) + \gamma \right] + \Omega \left(\frac{dE}{dz} + \beta \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$v = \frac{(u + v_h)(u - v_e)}{v_e + v_h}, \quad \Omega = \frac{(u + v_h)\alpha_e v_e + (u - v_e)\alpha_h v_h}{v_e + v_h},$$

$$\beta = \frac{q}{\varepsilon} \left(N + \frac{j_b}{u + \hat{v}} \right), \quad \hat{v} = \frac{v_e v_h (\alpha_e - \alpha_h)}{\alpha_e v_e + \alpha_h v_h},$$

$$\gamma = \frac{q j_b}{2\varepsilon} \frac{(u + v_h)\alpha_e v_e - (u - v_e)\alpha_h v_h}{(u + v_h)\alpha_e v_e + (u - v_e)\alpha_h v_h}.$$

Учет в этих формулах малых слагаемых порядка j_b/j необходим, чтобы можно было воспользоваться граничными условиями (3) для определения E_0 при заданном j . Это, однако, не касается параметра γ , который не только мал, но и обычно не зависит от поля. Последнее условие хорошо соответствует реальности во многих полупроводниках. Например, в Ge и GaAs $\alpha_e/\alpha_h \approx \text{const}$ [8,9] и постоянство γ обеспечивается постоянством $v_{e,h}$ в полях $\gtrsim E_B$. Напротив, в Si и SiC, как в газах, один из коэффициентов $\alpha_{e,h}$ много больше другого [8,9], особенно в слабых полях (т.е. при $z \rightarrow L_+$). Поэтому в большинстве случаев параметр γ может быть опущен.

Кроме того, при типичных зависимостях $v_{e,h}, \alpha_{e,h}$ от поля

$$v_i = v_{si}E/(E + E_{si}), \quad (9)$$

$$\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \exp(-\tilde{E}_i/E) \quad (10)$$

($i = e, h$) параметры v и β практически не зависят от поля в области эффективного размножения, поскольку обычно $E_{si} \ll E_B < E_0 \leq \tilde{E}_i$.

Как показано в *Приложении*, решение уравнения (8) при $\gamma = \text{const}$ можно представить в виде

$$v \frac{dE}{dz} = \eta - \beta_0 v_0 (\tau - 1) - \beta v, \quad (11)$$

$$z = - \int_E^{E_0} \frac{v dE}{\eta - \beta_0 v_0 (\tau - 1) - \beta v}, \quad (12)$$

где τ является корнем трансцендентного уравнения

$$\tau - 1 + e^{-\tau} = \eta/\beta_0 v_0, \quad (13)$$

$$\beta_0 = \beta(E_0), \quad v_0 = v(E_0), \quad \eta = \int_E^{E_0} \Omega dE \quad \text{при } z < 0 \text{ и } \tau < 0,$$

$$\eta = \int_E^{E_0} (\beta_0 v_0 \Omega / \beta v) dE \quad \text{при } z > 0 \text{ и } \tau > 0. \quad \text{Распределения носителей заряда}$$

$$n = \frac{\varepsilon}{q} \frac{\eta - v_0 \beta_0 (\tau - 1)}{u - v_e} + j_b \frac{\hat{v} - v_h}{(v_e + v_h)(u + \hat{v})},$$

$$p = \frac{\varepsilon}{q} \frac{\eta - v_0 \beta_0 (\tau - 1)}{u + v_h} + j_b \frac{\hat{v} + v_e}{(v_e + v_h)(u + \hat{v})} \quad (14)$$

получаются в результате подстановки (11) в (7). Анализ (14) показывает, что при значении E , определяемом равенством

$$n \frac{ev_e}{dE} = N \Omega(E) \left[\frac{d_0}{E_0} + \left(\frac{dE}{dz} \right)^{-1} \right], \quad (15)$$

(величина $d_0 = \varepsilon E_0 / qN$ обычно [2,5] примерно равна толщине n -слоя диода — см. рис. 1) функция $n(z)$ имеет экстремум, являющийся абсолютным максимумом. Легко убедиться, что решение уравнения (15) существует при любых разумных зависимостях α_e и v_e от поля, в том числе и при наличии падающего участка функции $v_e(E)$. Аналогичное уравнение для дырок отличается от (15) главным образом изменением индекса e на h и знака в левой части. Это последнее обстоятельство исключает существование его решения при $dv_h/dE > 0$, т.е. концентрация дырок монотонно уменьшается с ростом z . Если же на зависимости $v_h(E)$ имеется падающий участок, то $p(z)$ имеет локальный минимум вблизи точки, где $dv_h/dE = 0$. Разумеется, в катодно-направленной волне эти свойства зависимостей $n(z)$ и $p(z)$ взаимно заменяются. Если зависимости $v_{e,h}(E)$ описываются функцией типа (9), то максимум $n(z)$ очень пологий. В широком интервале полей $E_{sh} < E < E_B$ за

фронтом концентрации электронов и дырок почти постоянны [2], а само поле линейно зависит от координаты с градиентом $dE/dz = (\eta_- / v_0 - \beta_0 \tau_-)$. В этой же области ток проводимости достигает максимального значения,

$$j_{cm} = j \exp(-\tau_-). \quad (16)$$

Здесь τ_- — отрицательный корень (13) при $\eta = \eta_- \equiv \int_E^{E_0} \Omega dE$, который с точностью не хуже 5% удовлетворяет соотношению

$$\exp(-\tau_-) \approx \left(\frac{\eta_-}{v_0 \beta_0} + \ln \frac{7\eta_-}{v_0 \beta_0} \right). \quad (17)$$

Интеграл (12) расходится на нижнем пределе при $E \rightarrow E_-$ и $\tau < 0$, где E_- — решение уравнения

$$\beta(E_-)v(E_-) = \beta_0 v_0 \exp(-\tau_-). \quad (18)$$

Это означает, что далеко за фронтом (т.е. при $z \rightarrow -\infty$) поле стремится к E_- , а концентрации электронов и дырок — к значениям

$$n_- = \frac{j}{u} \frac{v(E_-)}{u - v_e(E_-)}, \quad p_- = \frac{j}{u} \frac{v(E_-)}{u + v_h(E_-)}. \quad (19)$$

Как и должно быть, из (14)–(19) следуют равенства $[n_- v_e(E_-) + p_- v_h(E_-)] = j$ и $(n_- - p_-) = N$, обеспечивающие сохранение плотности тока и квазинейтральность плазмы за фронтом волны. Наибольший интерес представляет случай сильного размножения затравочных носителей заряда, когда $n_- \approx p_- \gg j/u \approx N$. Нетрудно убедиться, что это неравенство выполняется при $\eta_- \gg v_0 \beta_0$, когда $v_{e,h}(E_-) \approx \mu_{e,h} E_- \ll u$ и $v(E_-) \approx u^2 / (\mu_e + \mu_h) E_- \gg v_0$, поэтому из (17)–(19) следует

$$E_- \approx \frac{quj}{\varepsilon(\mu_e + \mu_h)} \frac{\exp(\tau_-)}{v_0 \beta_0}, \quad (20)$$

$$n_- \approx p_- \approx \frac{\varepsilon}{qu} v_0 \beta_0 \exp(-\tau_-), \quad (21)$$

где $\mu_{e,h}$ — подвижности электронов и дырок в слабом поле. В частном случае $j = uN = j_b = 0$, $v_h = 0$, $\alpha_h = 0$ формулы (12), (21) совпадают с результатами работы [1].

При $z \rightarrow -\infty$ напряженность поля и концентрация носителей заряда, как было отмечено в [10], приближаются к своим постоянным значениям по экспоненте с длиной затухания $L_M = E_- / \beta_0 = ut_M$, где $t_M = \varepsilon / q(\mu_e n_- + \mu_h p_-)$ — время максвелловской релаксации. Однако следует иметь в виду, что такой механизм экранировки преобладает, во-первых, только за пределами области эффективного размножения и, во-вторых, только в газах, где при всех полях $v_e(E) \approx \mu_e E$. В полупроводниках оказывается $L_M \approx \delta_0 E_s / E_0 \ll \delta_0 = d_0 j / (j_{cm} - j)$, δ_0 — толщина той части ОПЗ за фронтом, где градиент поля почти постоянен (см. рис. 2). Полная толщина фронта δ больше δ_0 на толщину слоя эффективного умножения. В полупроводниках обычно

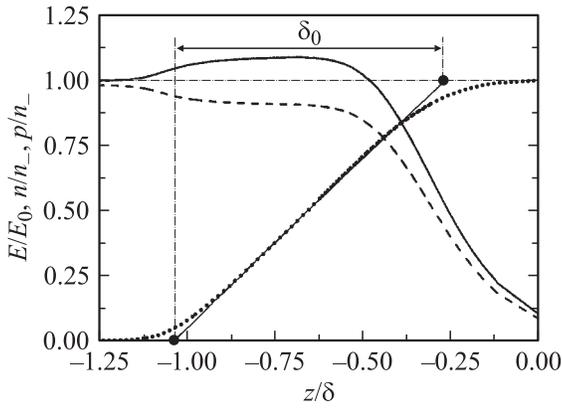


Рис. 2. Зависимости напряженности поля (точечная линия), концентраций электронов (сплошная линия) дырок (штриховая) от координаты за фронтом анодно-направленной волны ударной ионизации, рассчитанные по формулам (12) и (14) при $j/j_s = u/v_s = 10$, $E_B/\bar{E} = 0.137$ (или $U_B = 1.4$ кВ). $j_b/j_s = 10^{-3}$. Расчет остальных параметров фронта по формулам (19), (22) и (25) в этом случае дает значения: $n_-/N \approx 56$, $\delta/d_0 \approx 0.15$ и $E_0/\bar{E} \approx 0.16$.

$E_s \ll \bar{E}$, задняя граница фронта ярко выражена, и поэтому для оценки δ следует использовать формулу

$$\delta = \int_0^{E_0} \frac{v_0 dE}{\eta - v_0 \beta_0 \tau}, \quad (22)$$

которая получается прямо из (12) в результате предельного перехода $E_s \rightarrow 0$ и замены нижнего предела интегрирования на нуль. В (22), так же как и в (11), (12), (14), для зависимости $\tau(E)$ можно использовать аппроксимацию

$$\tau = -2 \ln \left(1 + \sqrt{\eta/2\beta_0 v_0} \right). \quad (23)$$

Как показывает численное решение (13) для $\tau < 0$, она дает ошибку не более 3.7% при вычислении правых частей в (11), (14) и знаменателей подынтегральных выражений в (12), (22).

3. Скорость движения фронта волны и максимальная напряженность поля

Используя любое из граничных условий (3), (4) и формулы (11) или (14) при $z \geq L_+$, можно получить соотношение

$$\tau_+ \equiv \tau(L_+) = \ln \frac{jv_0}{j_b v_+} \left(1 + \frac{\hat{v}_+}{u} \right), \quad (24)$$

подстановка которого в (13) дает уравнение для определения максимального поля E_0 , обеспечивающего движение фронта со скоростью u (или, что то же самое,

протекание через структуру тока qSj) при заданной концентрации затравочных носителей заряда:

$$\frac{\eta_+}{\beta_0 v_0} + 1 = \ln \frac{jv_0}{j_b v_+} \left(1 + \frac{\hat{v}_+}{u} \right), \quad (25)$$

$\eta_+ = \int_0^{E_0} (\beta_0 v_0 \Omega / \beta v) dE$, $\hat{v}_+ = \hat{v}(E_B)$. В уравнении (25) мы пренебрегли слагаемыми порядка j_b/j по сравнению с 1.

Условие существования стационарной волны ионизации можно получить и при наличии дополнительного механизма генерации затравочных носителей заряда перед фронтом со скоростью $G = G(z, E)$. Оно следует из общего решения двух уравнений непрерывности (1) с тремя граничными условиями (условия (3) и $[n(0) - p(0)] = N$) и может быть представлено в виде

$$v_+ \frac{j_b}{u + \hat{v}_+} e^{F_1(L_+)} = v_0 \left(N + \frac{j_b}{u + \hat{v}_0} \right) - \int_0^{L_+} G e^{F_1(z)} dz, \quad (26)$$

где $F_1(z) = \int_0^z (\Omega/v) dz$. Разумеется, для его использования нужно знать распределение поля перед фронтом. В рассмотренном выше случае $G = 0$ уравнения (26) и (25) эквивалентны, так как по определению $\tau = F_1(z)$. При сильном размножении затравочных электронов и дырок распределение заряда вблизи фронта должно очень слабо зависеть от способа их генерации, так как в этой области (при $|z| \leq \delta$) скорость ударной ионизации ($\alpha_e v_e n + \alpha_h v_h p$) много больше G . Поэтому и в общем случае подстановка в (26) зависимости $E(z)$, полученной при $G = 0$, даст пренебрежимо малую ошибку. Более того, если в уравнении (26) положить $dE/dz = -qN/\epsilon$, то получится $F_1(L_+) \approx \int_0^{E_0} (\Omega/v\beta_0) dE \approx \eta_+/v_0\beta_0$ и при $G = 0$ оно принимает вид

$$\frac{\eta_+}{\beta_0 v_0} = \ln \frac{jv_0}{j_b v_+} \left(1 + \frac{\hat{v}_+}{u} \right). \quad (27)$$

Сравнение (27) с (25) показывает, что даже полное пренебрежение искажением поля перед фронтом зарядами электронов и дырок приводит при большом размножении к относительно малой ошибке, порядка $\beta_0 v_0 / \eta_+ \ll 1$. Причина этого, очевидно, состоит в том, что концентрация электронов и дырок очень быстро убывает с ростом z и становится пренебрежимо малой по сравнению с N на расстоянии перед фронтом $z \ll L_+$.

4. Обсуждение результатов

Полученные выше формулы пригодны при любых разумных зависимостях $\alpha_{e,h}$ и $v_{e,h}$ от поля и при произвольных соотношениях между ними. Рассмотрение всех возможных вариантов заняло бы слишком много места, поэтому мы ограничимся анализом лишь некоторых случаев.

Прежде всего отметим, что при $E_{si} \ll \tilde{E}_i$ с высокой точностью $v_0 = v_+$, $\eta_+ = \eta_-$ и подстановка (24) и (16) в (13) приводит к уравнению для j_{cm}

$$\ln \frac{j_{cm}}{j_b} \left(1 + \frac{\hat{v}_+}{u} \right) = \frac{j_{cm}}{j}, \quad (28)$$

решение которого с ошибкой не более 3% можно аппроксимировать формулой

$$j_{cm} = \frac{7}{6} j \ln \frac{5j}{2j_b} \left(1 + \frac{\hat{v}_+}{u} \right). \quad (29)$$

Вместе в (16), (19) она позволяет выразить напряженность поля и концентрации носителей заряда за фронтом только через исходные величины j , $N \approx j/u$ и j_b :

$$E_- \approx \frac{v_{se} + v_{sh}}{\mu_e + \mu_h} \frac{j}{j_{cm}} \left[\left(1 - \frac{v_{se}}{u} \right) \left(1 + \frac{v_{sh}}{u} \right) \right]^{-1}, \quad (30)$$

$$n_- \approx p_- \approx \frac{j_{cm}}{v_{se} + v_{sh}} \left(1 - \frac{v_{se}}{u} \right) \left(1 + \frac{v_{sh}}{u} \right). \quad (31)$$

Конечно, (30), (31) эквивалентны (20), (21), но удивительно, что в общем случае формулы для важнейших параметров волны ударной ионизации представимы в таком виде, что они вообще не содержат коэффициентов ударной ионизации. При $\alpha_e = \alpha_h$ это утверждение² является точным, так как $\hat{v} = 0$. В общем случае E_- и n_- логарифмически слабо зависят от величины отношения α_e/α_h в слабых полях (но не от самих величин $\alpha_{e,h}$), поскольку \hat{v}_+ может изменяться от $-v_{se}$ при $\alpha_e \ll \alpha_h$ до v_{sh} при $\alpha_e \gg \alpha_h$.

Далее будем еще считать, что кинетические коэффициенты электронов и дырок равны (индексы e и h опускаем), и используем аппроксимации (10) и (9) с типичными соотношениями между параметрами $E_s/\tilde{E} = 0.01$ и $\tilde{E}/\tilde{\alpha} = 1.5$ В. Пример расчета структуры фронта волны для этого случая приведен на рис. 2, а зависимости n_- и E_- от плотности тока — на рис. 3. Уравнение (25), определяющее взаимосвязь между плотностью тока и максимальной напряженностью поля, принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{j}{j_s} - \frac{j_s}{j} \right) \left[\ln \left(\frac{j}{j_b} \right) - 1 \right] &= 2a \frac{\tilde{E}}{E_0} E_2(E_0/\tilde{E}) \\ &= 2 \frac{E_B}{E_0} \frac{E_2(E_0/\tilde{E})}{E_2(E_B/\tilde{E})}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $j_s = v_s N$, $a = \varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E}/qN$, $E_2(x) = \int_1^\infty t^{-2} \exp(-xt) dt$ — интегральная показательная функция. Результаты численного решения (32) при различных значениях E_B/\tilde{E} (и напряжениях статического пробоя U_B) приведены на

² Для частного случая $\alpha_e = \alpha_h$ и $v_e = v_h = \text{const}$ это утверждение было высказано в работе [2], а формулы (28) и (29), на которых оно основано, получены в работе [3].

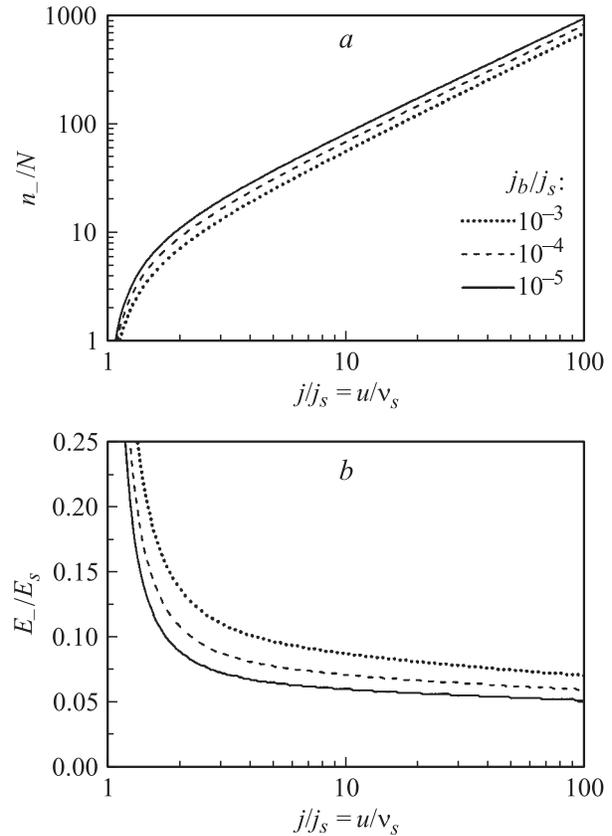


Рис. 3. Зависимости нормированных значений концентрации электронов n_-/N (а) и напряженности поля E_-/E_s (б) за фронтом волны от нормированной плотности тока (или скорости фронта) при различных величинах отношения j_b/j_s , рассчитанные по формулам (30), (31) при $v_e = v_h$ и $\alpha_e = \alpha_h$.

рис. 4, а. Как видно, для оценки величины E_0 можно воспользоваться приближенным решением (32)

$$\frac{E_0}{E_B} \approx 1 + c_0 \left(\frac{E_B}{\tilde{E}} - c_1 \right) \ln \frac{j}{j_s}, \quad (33)$$

с коэффициентами $c_{0,1}$, очень слабо зависящими от j/j_b ($c_0 = 2.75$, $c_1 = 0.02$ при $j/j_b = 10^{-4}$). Формула для толщины фронта следует из (22), (23), (32) и имеет вид

$$\begin{aligned} \delta &= d_0 \int_0^{E_0} \left\{ \Psi \left(\frac{E}{\tilde{E}}, \frac{E_0}{\tilde{E}} \right) \ln \frac{j}{e j_b} \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln \left[1 + \sqrt{\frac{1}{2} \Psi \left(\frac{E}{\tilde{E}}, \frac{E_0}{\tilde{E}} \right) \ln \frac{j}{e j_b}} \right] \right\}^{-1} \frac{dE}{E_0}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\Psi(x, y) = \int_x^y \exp(-1/t) dt / \int_0^y \exp(-1/t) dt$. Результаты численного интегрирования (34) с учетом (32) приведены на рис. 4, б. Как видно, полная толщина фронта в 1.5–2 раза превосходит толщину ОПЗ с почти постоянным градиентом напряженности поля δ_0 , причем

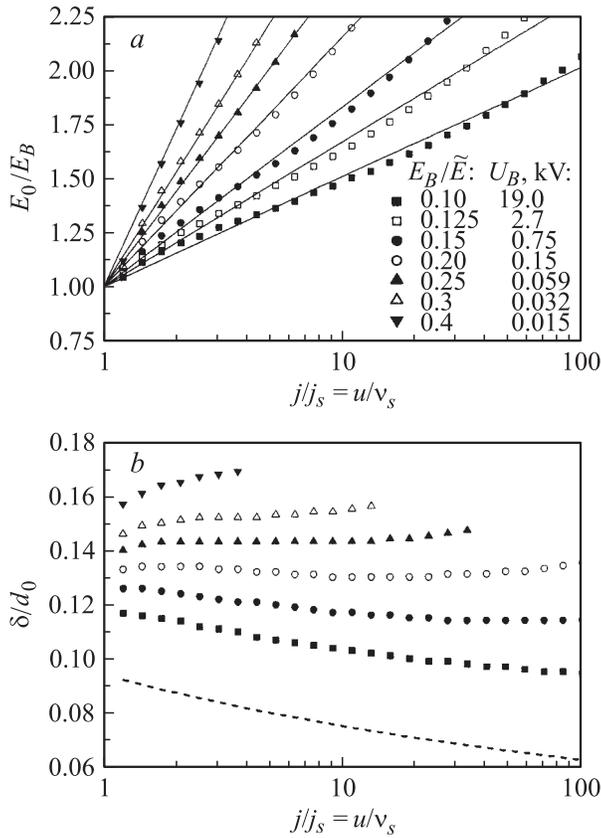


Рис. 4. Зависимости нормированных значений максимальной напряженности поля E_0/E_B (a) и толщины фронта δ/d_0 (b) от нормированной плотности тока (или скорости фронта) при $j_s/j_b = 10^{-4}$ и различных величинах отношения E_B/\tilde{E} (или напряжениях статического пробоя U_B), рассчитанные по формулам (32) и (34). a: сплошные линии — приближенное решение (33). b: штриховая линия — зависимость δ_0/d_0 от j/j_s .

разница между ними уменьшается при уменьшении E_B , так что $\delta \rightarrow \delta_0$ в пределе $E_B \rightarrow 0$ (или $U_B \rightarrow \infty$). Эта закономерность является очевидным следствием того, что при уменьшении E зависимость $\alpha(E)$ становится все более резкой. Знание величины отношения δ/d_0 важно для оценки применимости изложенной выше теории стационарной волны в случаях изменяющегося со временем тока. Очевидно, для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $dj/dt \ll ju/\delta$ малости изменения тока за время прохождения волной толщины фронта. При работе диода в режимах TRAPATT и обострения напряжения $dj/dt \propto ju/d_0$, поэтому „квазистационарность“ этих режимов обеспечивается неравенством $\delta \ll d_0$, которое особенно хорошо выполняется при больших U_B (см. рис. 4, b).

Как видно из приведенных выше формул, все параметры фронта логарифмически слабо зависят от концентрации затравочных носителей заряда $(n_+ + p_+)$. Это справедливо до тех пор, пока оправдано использованное нами континуальное приближение, т.е. при

$(n_+ + p_+) > n_{cr}$. Величину критической концентрации n_{cr} следует определять из простого условия: лавины, порождаемые каждым затравочным носителем заряда, должны перекрываться до того, как их объемный заряд начинает заметно искажать среднее поле волны. Объем типичной лавины, удлиняющейся в обе стороны за счет дрейфа со скоростью v_s и расширяющейся за счет поперечной диффузии с коэффициентом D в течение времени $t_a = L_+/u$, равен $8\pi D v_s t_a^2$. В результате с учетом (33) получается оценка

$$n_{cr} = \tilde{n} \left(\frac{\tilde{E}}{\alpha U_B} \frac{j}{j_s \ln j/j_s} \right)^2, \quad (35)$$

где $\tilde{n} = v_s \tilde{\alpha}^2 / 32\pi D \approx (1-5) \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Если же $(n_+ + p_+) \ll n_{cr}$, то сценарий развития пробоя должен качественно измениться: отдельные лавины могут эволюционировать в изолированные стримеры и модель волны ударной ионизации с плоским фронтом окажется совершенно непригодной для описания динамики пробоя.

Еще одно ограничение изложенной выше теории связано с пренебрежением диффузией носителей заряда. Ее учет привел бы к появлению в уравнениях непрерывности (1) дополнительных слагаемых вида $D \partial^2 n / \partial z^2$. Нетрудно убедиться, что ими можно пренебречь, если $(j/j_s - 1)^2 \gg 2\alpha(E_0)D/v_s$. Это условие хорошо выполняется в относительно слабых полях (т.е. в высоковольтных диодах) и при больших скоростях фронта, но может быть нарушено при $E_0 \approx \tilde{E}$ (т.е. в низковольтных диодах) и $j/j_s < 2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-02-16541 и 05-08-18235).

Приложение

Для решения уравнения (8) с граничными условиями

$$E(0) = E_0, \quad dE(0)/dz = 0 \quad (\text{П.1})$$

можно воспользоваться заменой $\tau = \int_0^z \Omega v^{-1} dz$, позволяющей легко найти его первый интеграл:

$$\Omega \frac{dE}{d\tau} = \beta_0 v_0 e^{-\tau} - \beta v. \quad (\text{П.2})$$

Интегрируя (П.2), получим

$$\int_E^{E_0} \frac{\Omega}{\beta_0 v_0} dE = e^{-\tau} - 1 + \int_0^\tau \frac{\beta v}{\beta_0 v_0} d\tau. \quad (\text{П.3})$$

Если $\beta v = \text{const}$, то из (П.3) следует трансцендентное уравнение (13) для определения функции $\tau = \tau(E)$, использование которого дает искомое решение в виде (11) и (12). При $d(\beta v)/dE \neq 0$ это решение, строго говоря, применимо только для гладких функций $v = v(E)$,

$\beta = \beta(E)$ (каковыми они реально и бывают) вблизи максимума поля, где $\tau \approx \sqrt{2\Omega_0(E_0 - E)}/\beta_0\nu_0$. Однако, если

$$\sqrt{2\Omega_0 E_0}/\beta_0\nu_0 \gg 1, \quad (\text{П.4})$$

то в области $\tau < 0$ (т.е. за фронтом) должно выполняться сильное неравенство $(E_0 - E) \ll E_0$ даже при $\exp(-\tau) \gg \tau$. Таким образом, при малых τ можно пренебречь относительно слабыми зависимостями $\nu = \nu(E)$ и $\beta = \beta(E)$, а при больших — отличаем от τ относительно малого последнего слагаемого в правой части (П.3). Поэтому уравнение (13) и следующие из него формулы (11), (12) дают приблизительно правильное решение задачи во всем диапазоне полей за фронтом.

Интегрирование (П.2) после деления на $\beta\nu$ приводит к уравнению

$$\int_E^{E_0} \frac{\Omega}{\beta\nu} dE = \tau - \int_0^\tau \frac{\beta_0\nu_0}{\beta\nu} e^{-\tau} d\tau, \quad (\text{П.5})$$

в правой части которого можно положить $\beta\nu = \beta_0\nu_0$ в области $\tau > 0$ (т.е. перед фронтом), поскольку заметное отклонение от этого равенства наступает только при $e^{-\tau} \ll 1$, если выполнено условие (П.4). Тогда для $\tau > 0$ опять получается уравнение (13), но уже с другой функцией $\eta(E)$. Если (как это обычно и бывает) зависимость $\Omega(E)$ значительно более резкая, чем $\nu(E)$, то различие между этими функциями пренебрежимо мало.

Для оценки точности полученных решений мы провели численное интегрирование уравнения (8) с граничными условиями (П.1) при $\gamma = \text{const}$, типичных значениях параметров β_0 , ν_0 , Ω_0 и зависимостях $\beta\nu \propto E^k$ ($-3/2 < k < 3/2$), заведомо перекрывающих все реальные возможности. Анализ этих решений показал, что использование приближенного уравнения (13) вместе с аппроксимацией (23) дает погрешность не более 5% при вычислении правой части в (11) и знаменателе подынтегрального выражения в (12), если $\Omega_0 E_0 > 4\beta_0\nu_0$.

Список литературы

- [1] А.Н. Лагарьков, И.М. Руткевич. *Волны электрического пробоя в ограниченной плазме* (М., Наука, 1989) с. 55.
- [2] В.С. DeLoach, D.L. Scharfetter. IEEE Trans. Electron. Dev., **ED-17**, 9 (1970).
- [3] D.J. Bartelink, D.L. Scharfetter. Appl. Phys. Lett., **14**, 320 (1969).
- [4] И.В. Грехов, А.Ф. Кардо-Сысоев. Письма ЖТФ, **5** (15), 950 (1979).
- [5] И.В. Грехов, В.М. Тучкевич. *Новые принципы коммутации больших мощностей полупроводниковыми приборами* (Л., Наука, 1988).
- [6] P. Rodin, I. Grekhov. Appl. Phys. Lett., **86**, 243 504 (2005).
- [7] P. Rodin, A. Rodina, I. Grekhov. J. Appl. Phys., **98**, 094506 (2005).
- [8] И.В. Грехов, Ю.Н. Сережкин. *Лавинный пробой p-n-переходов в полупроводниках* (Л., Энергия, 1980).

[9] А.С. Кюрегян, С.Н. Юрков. ФТП, **23**, 1819 (1989).

[10] Н.Г. Басов, А.Г. Молчанов, А.С. Насибов и др. ЖЭТФ, **70** (5), 1751 (1976).

Редактор Л.В. Шаронова

Theory of stationary plane waves of impact ionization in semiconductors

A.S. Kyuregyan

All-Russian Electrical Engineering Institute,
111250 Moscow, Russia

Abstract A general analytical theory of stationary plane waves of impact ionization in semiconductor devices with the arbitrary dependences of drift velocities and impact ionization coefficients of electrons and holes on the electrical field is proposed. Formulae are obtained which enable one to describe the structure of the wave front and to calculate its basic parameters (speed, thickness, maximum electrical field, concentration of charge carriers and the electrical field behind the front) for given values of current density and doping level of the semiconductor. Limitations of the theory resulting from diffusion current disregard and continuum approximation usage are considered.