01

Квадратичный эффект Зеемана в лёгких бороподобных ионах

© В.А. Агабабаев[1,2], А.В. Волотка[1], Д.А. Глазов[1,3], А.В. Малышев[3,4], М.М. Осипцов[1], В.М. Шабаев[3,4]

[1] Университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“,
Санкт-Петербург, Россия
[3] Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова Национального исследовательского центра „Курчатовский институт“,
Гатчина, Ленинградская обл., Россия
[4] Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: vagababaev@hse.ru

Поступила в редакцию 13.04.2026 г.
В окончательной редакции 13.04.2026 г.
Принята к публикации 12.05.2026 г.

Квадратичный эффект Зеемана рассчитан для основного состояния $^2P_{1/2}$ лёгких бороподобных ионов в диапазоне значений заряда ядра $Z = 10-24$. Расчёты выполнены в картине Фарри с применением трёх моделей для потенциала нулевого приближения: для чисто кулоновского поля ядра и с экранирующими потенциалами Хартри и Кона–Шэма. Рассмотрены вклады первого порядка теории возмущений: поправка на однофотонный обмен и радиационные поправки, связанные с диаграммами собственной энергии и поляризации вакуума. Доминирующие вклады диаграмм собственной энергии вычислены в рамках строгого квантово-электродинамического подхода. Поправки на поляризацию вакуума получены в приближении электрической петли в ведущем порядке, соответствующем потенциалу Юлинга. В результате получены теоретические предсказания для вклада квадратичного эффекта Зеемана в энергию связи валентного электрона в состоянии $^2P_{1/2}$, которые могут быть использованы для анализа высокоточных экспериментов по измерению g-фактора и тонкой структуры в бороподобных многозарядных ионах.

Ключевые слова: эффект Зеемана, квадратичный эффект Зеемана, g-фактор, многозарядные ионы, квантовая электродинамика связанных состояний.

DOI: 10.61011/OS.2026.07.63547.9072-26

1. Введение

Исследования эффекта Зеемана значительно продвинулись за последние два десятилетия. Современные высокоточные измерения g-фактора охватывают водородо-, литие- и бороподобные ионы вплоть до самых тяжёлых элементов, таких как олово [1–3], достигая точности на уровне менее одной миллиардной [4–12], при этом рекордные значения статистической погрешности имеют порядок $4 \cdot 10^{-11}$ [7].

Знаковым достижением в данной области является самое точное определение массы электрона, полученное в результате совместных теоретических и экспериментальных исследований g-фактора лёгких водородоподобных ионов [13,14]. Исследования водородо- и литиеподобных систем позволили также выполнить строгую проверку релятивистских методов квантовой электродинамики (КЭД) для связанных состояний в присутствии магнитного поля [8,15–18]. В перспективе ожидается, что измерения g-фактора многозарядных ионов сделают возможным независимое определение постоянной тонкой структуры α [19–21], определение параметров ядер [22–25] и поиски новой физики [25–28].

Квадратичный эффект Зеемана является предметом активных научных исследований почти столетие, начиная с первых наблюдений Дженкинса и Сегрэ [29] и последовавшего за этим теоретического описания Шиффом и Снайдером [30]. Интерес к нему отчасти связан с наблюдением таких астрофизических объектов как магнетары, где магнитные поля достигают значений 10^{11} T, что делает нелинейный зеемановский вклад доминирующим [31–33]. Параллельно этот эффект изучается в твёрдых телах, бозе-эйнштейновских конденсатах [34,35], а также в атомах, молекулах и экзотических системах, таких как позитроний [36–39].

В то же время исследования квадратичного эффекта Зеемана в многозарядных ионах носят пока фрагментарный характер и находятся по сути на начальной стадии. В лабораторных полях для состояния $1s$ нелинейные эффекты пренебрежимо малы. Однако для возбуждённых состояний они могут быть значительно усилены за счет перемешивания уровней тонкой структуры. В частности, это происходит для P-уровней в литиеподобных [40] и бороподобных [41] ионах. Высокоточные измерения g-фактора основного состояния $^2P_{1/2}$ в бороподобных ионах были проведены коллективом ALPHATRAP для

аргона $^{40}Ar^{13+}$ и олова $^{118}Sn^{45+}$ [2,9]. Для возбужденного состояния $^2P_{3/2}$ $^{40}Ar^{13+}$ g-фактор впервые был измерен в работе [42] и впоследствии существенно уточнён с использованием методов квантовой логики [43]. Во всех этих экспериментах квадратичный по полю вклад оказывал заметное влияние на частоты переходов и требовал аккуратного учета для интерпретации полученных результатов. Ещё более точное значение g-фактора состояния $^2P_{3/2}$ в $^{40}Ar^{13+}$ было получено в недавнем эксперименте, направленном на разработку прецизионных атомных часов на основе $^{40}Ar^{13+}$ [44]. Хотя в данном эксперименте магнитное поле было слишком слабым для наблюдения нелинейных эффектов, повышение точности определения g-фактора потребует усиления поля до величины порядка одного тесла, что приведет к возникновению заметных квадратичных и кубических вкладов. Также вклад второго порядка по магнитному полю был недавно измерен для перехода $^3P_0 \to {}^3P_1$ в углеродоподобном кальции [12].

В ходе теоретических исследований g-фактора основного состояния бороподобного аргона $^{40}Ar^{13+}$ было использовано несколько высокоточных методов для учёта межэлектронного взаимодействия, включая CI-DFS [45–47], GRASP2K [48], MCDFME [49], теорию возмущений [46,50] и метод связанных кластеров [51]. Кроме того, в рамках строгого КЭД-подхода были рассмотрены поправки первого порядка на собственную энергию и поляризацию вакуума [47,50,52], а также выполнены расчёты эффекта отдачи ядра [53–56]. Всесторонний обзор современных теоретических подходов к g-фактору литие- и бороподобных многозарядных ионов представлен в работе [57].

Исследования квадратичного эффекта Зеемана в многозарядных ионах в рамках релятивистской теории уже проводились нашей группой [40,50,58], включая поправки на однофотонный обмен [59] и однопетлевые КЭД-поправки [60]. В рамках тех же подходов рассматривался и кубический эффект Зеемана [40,59,61], а также ядерное магнитное экранирование [62,63]. Теоретические оценки сдвигов уровней энергии, связанных с нелинейными эффектами, оказались необходимы для интерпретации результатов измерений g-фактора бороподобного аргона $^{40}Ar^{13+}$ [9,42].

В настоящей работе представлены расчёты квадратичного эффекта Зеемана для состояния $^2P_{1/2}$ лёгких бороподобных ионов в диапазоне зарядов ядра $Z = 10-24$. Мы вычисляем соответствующий вклад в энергию связи валентного электрона $2p_{1/2}$ с учётом поправок на однофотонный обмен и однопетлевых КЭД-поправок. Использована релятивистская система единиц, в которой $\hbar = c = m_e = 1$, и единицы заряда Хевисайда, где постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/(4\pi)$, заряд электрона $e < 0$.

2. Теория

Мы рассматриваем бороподобный ион в основном состоянии $(1s)^2(2s)^2 2p\ {}^2P_{1/2}$. Ядро предполагается бесспиновым. Система помещена в слабое однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, ориентированное вдоль оси z.

Энергию многоэлектронного состояния $|A\rangle$ атома в магнитном поле можно разложить в ряд

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} + \cdots, \tag{1}$$

где $E^{(0)}$ — энергия состояния $|A\rangle$ в отсутствие поля, $E^{(1)}$ — вклад первого порядка по магнитному полю, $E^{(2)}$ — вклад второго порядка и т.д. Вклад первого порядка пропорционален проекции M_J полного углового момента J состояния $|A\rangle$ на ось z, его удобно выразить через безразмерный g-фактор:

$$E^{(1)} = \mu_{\mathrm{B}} B M_J g, \tag{2}$$

где $\mu_{\mathrm{B}} = |e|/2$ — магнетон Бора. В свою очередь, вклад второго порядка в уравнении (1) может быть записан как

$$E^{(2)} = (\mu_B B)^2 g^{(2)}(M_J). \tag{3}$$

Зависимость $g^{(2)}$ от M_J не является линейной, а представляет собой чётную функцию от M_J, что имеет важные физические следствия. Для состояний с полным угловым моментом $J = 1/2$ квадратичный эффект одинаков для обоих подуровней M_J и не вносит вклад в зеемановское расщепление. Однако для состояний с $J > 1/2$ квадратичный сдвиг различен для подуровней с разными значениями $|M_J|$ и нарушает эквидистантность расщепления. В исследуемом в данной работе состоянии $^2P_{1/2}$ квантовые числа J и M_J полностью определяются соответствующими величинами j_a и M_a для валентного электрона $2p_{1/2}$.

Отметим также, что мы рассматриваем вклад квадратичного эффекта Зеемана в энергию связи валентного электрона, которая может быть получена как разность энергий связи состояний $(1s)^2(2s)^2 2p\,{}^2P_{1/2}$ и $(1s)^2(2s)^2\,{}^1S_0$. В рамках применения теории возмущений это означает, что мы опускаем все поправки, которые не включают состояние валентного электрона, а относятся только к состояниям замкнутых оболочек.

Взаимодействие с магнитным полем $\mathbf{B}$ традиционно вводится посредством минимальной подстановки для канонического импульса: $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}$, где классический векторный потенциал $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}$ связан с магнитной индукцией выражением $\mathbf{B} = [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_{\mathrm{cl}}]$. Для однородного магнитного поля $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ мы используем симметричную калибровку в которой $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times \mathbf{r}]$. Простейшую оценку для квадратичного коэффициента Зеемана $g^{(2)}$ можно получить из уравнения Брейта-Паули для валентного электрона во внешнем поле $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}$, что соответствует одноэлектронному приближению:

$$H_{\mathrm{BP}} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}_{\mathrm{cl}})^2}{2} + V_{\mathrm{nuc}}(r) - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + H_{\mathrm{rel}}. \tag{4}$$

Здесь $V_{\rm nuc}(r)$ — потенциал ядра, $r = |\mathbf{r}|$, $\boldsymbol{\mu} = -2\mu_B\mathbf{s}$ — магнитный момент электрона, пропорциональный спину $\mathbf{s}$ (здесь мы пренебрегаем аномальным магнитным моментом электрона), а $H_{\rm rel}$ — оператор, включающий все релятивистские поправки, среди которых для дальнейшего рассмотрения наибольшее значение имеет оператор спин-орбитального взаимодействия $H_{\rm SO} \sim \mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$, определяющий в ведущем порядке $(\alpha Z)^4$ расщепление тонкой структуры $2p_{1/2}$–$2p_{3/2}$. Используя симметричную калибровку получаем

$$H_{\rm BP} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_{\rm nuc}(r) + \mu_B B\, V_1 + (\mu_B B)^2 V_2 + H_{\rm rel}\,. \quad (5)$$

Операторы для первого и второго порядков по магнитному полю даются выражениями:

$$V_1 = l_z + 2s_z = j_z + s_z\,, \quad (6)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(r^2 - z^2\right). \quad (7)$$

Здесь l_z, $s_z = \sigma_z/2$ и $j_z = l_z + s_z$ — проекции орбитального, спинового и полного угловых моментов.

Обсуждаемая оценка величины $g^{(2)}$ включает два вклада:

$$g^{(2)}_{\rm lo} = g^{(2)}_{\rm lo-1} + g^{(2)}_{\rm lo-2}\,, \quad (8)$$

которые происходят соответственно от поправки второго порядка теории возмущений для оператора V_1 и от поправки первого порядка теории возмущений для оператора V_2:

$$g^{(2)}_{\rm lo-1} = \sum_n{}' \frac{\langle\bar{a}|V_1|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|V_1|\bar{a}\rangle}{\bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_n}\,, \quad (9)$$

$$g^{(2)}_{\rm lo-2} = \langle\bar{a}|V_2|\bar{a}\rangle\,. \quad (10)$$

В этих выражениях $|\bar{a}\rangle = |\overline{2p_{1/2}}\rangle$, $|\bar{n}\rangle$ обозначают двухкомпонентные собственные функции оператора (4) в отсутствие магнитного поля, а $\bar{\varepsilon}_a$, $\bar{\varepsilon}_n$ — соответствующие собственные значения. Суммирование в (9) идёт по полному спектру, штрих у знака суммы здесь и далее означает, что члены со знаменателями, обращающимися в нуль, должны быть опущены.

Рассмотрим вклад ведущего порядка по αZ в (8). Заметим, что сумма в (9) определяется главным образом слагаемым с промежуточным состоянием $|\bar{b}\rangle \equiv |\overline{2p_{3/2}}\rangle$, которое вместе с исследуемым состоянием $2p_{1/2}$ образует тонкую структуру в спектре водородоподобного иона. Действительно, соответствующий знаменатель $\bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_b \equiv -\Delta E_{\rm FS}$ имеет порядок $(\alpha Z)^4$, в то время как для всех прочих состояний справедлива оценка $(\alpha Z)^2$. Более того, матричный элемент $\langle\bar{a}|V_1|\bar{n}\rangle$ в числителе имеет порядок $(\alpha Z)^0$ для $|\bar{n}\rangle = |\bar{b}\rangle$ и $(\alpha Z)^2$ для $|\bar{n}\rangle \neq |\bar{b}\rangle$. Можно также показать, что вклад $g^{(2)}_{\rm lo-2}$ имеет порядок $(\alpha Z)^2$, поэтому его можно опустить. Сохраняя доминирующий член в уравнении (9), получаем

$$g^{(2)}_{\rm FS} = \frac{\langle\bar{a}|V_1|\bar{b}\rangle\langle\bar{b}|V_1|\bar{a}\rangle}{\bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_b} \approx -\frac{(3/2)^2 - M_a^2}{9\,\Delta E_{\rm FS}}\,, \quad (11)$$

где мы изменили обозначение с $g^{(2)}_{\rm lo}$ на $g^{(2)}_{\rm FS}$, чтобы подчеркнуть сделанное приближение, а также использовали то, что в ведущем порядке по αZ радиальные функции состояний $|\overline{2p_{1/2}}\rangle$ и $|\overline{2p_{3/2}}\rangle$ совпадают. Подставляя $M_a \equiv M_J = \pm 1/2$, получаем

$$g^{(2)}_{\rm FS} \approx -\frac{2}{9\,\Delta E_{\rm FS}}\,. \quad (12)$$

В случае $V_{\rm nuc}(r) = -\alpha Z/r$ можно использовать формулу Зоммерфельда для оценки $\Delta E_{\rm FS}$ в ведущем порядке $(\alpha Z)^4$, что окончательно приводит к выражению

$$g^{(2)}_{\rm FS} \approx -\frac{64}{9(\alpha Z)^4}\,. \quad (13)$$

Хорошо известно, что в многозарядных ионах интервал тонкой структуры $\Delta E_{\rm FS}$ сильно зависит от корреляционных эффектов. При их рассмотрении по теории возмущений широко применяется подход, заключающийся в добавлении к невозмущенному гамильтониану некоторого локального экранирующего потенциала $V_{\rm scr}(r)$. Этот же потенциал затем вычитается из оператора взаимодействия, что приводит к перестройке рядов теории возмущений, ускоряя их сходимость. Описанный метод позволяет уже в нулевом приближении частично учесть эффекты межэлектронного взаимодействия. В связи с этим, формула (12) имеет более широкое применение, поскольку в неё можно подставлять оценки для $\Delta E_{\rm FS}$, полученные в ведущем порядке для различных потенциалов $V_{\rm scr}(r)$.

Строгая КЭД-теория квадратичного эффекта Зеемана может быть сформулирована в рамках метода двухвременной функции Грина [64]. В данном подходе эффекты межэлектронного взаимодействия и КЭД-эффекты учитываются по теории возмущений, поэтому в нулевом приближении одноэлектронные состояния полностью определяются гамильтонианом Дирака:

$$H_{\rm D} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta + V_{\rm nuc}(r) + V_{\rm scr}(r)\,. \quad (14)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$, β — матрицы Дирака. В качестве экранирующего потенциала $V_{\rm scr}(r)$ в данной работе мы используем потенциалы Хартри (CH) и Кона-Шэма (KS) [65]. Эти потенциалы могут быть выражены через зарядовую плотность электронов замкнутых оболочек:

$$\rho_{\rm core}(r) = 2\Big[G^2_{1s}(r) + F^2_{1s}(r)\Big] + 2\Big[G^2_{2s}(r) + F^2_{2s}(r)\Big], \quad (15)$$

и всех электронов иона:

$$\rho_{\rm tot}(r) = \rho_{\rm core}(r) + \Big[G^2_{2p_{1/2}}(r) + F^2_{2p_{1/2}}(r)\Big]\,. \quad (16)$$

В (15) и (16) функции G_n и F_n — это большие и малые компоненты решений уравнения Дирака, которые нормированы согласно $\int(G_n^2 + F_n^2)\,dr = 1$ и определены самосогласованно для потенциалов

$$V^{\rm CH}_{\rm scr}(r) = \alpha\int_0^\infty dr'\,\frac{\rho_{\rm core}(r')}{\max\{r, r'\}} \quad (17)$$

и

$$V_{\rm scr}^{\rm KS}(r) = \alpha \int\limits_0^\infty dr' \, \frac{\rho_{\rm tot}(r')}{\max\{r, r'\}} - \frac{2\alpha}{3r} \left[\frac{81}{32\pi^2} r \rho_{\rm tot}(r) \right]^{1/3} \tag{18}$$

соответственно.

Замена $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}_{\rm cl}$ в (14) позволяет получить выражение для оператора взаимодействия с внешним однородным магнитным полем:

$$V_{\rm m} = \mu_{\rm B} B \, [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]_z \equiv (\mu_{\rm B} B) U_{\rm m} \,. \tag{19}$$

Например, для вклада ведущего порядка метод [64] даёт:

$$g_{\rm lo}^{(2)} = \sum_n{}' \frac{\langle a|U_{\rm m}|n\rangle\langle n|U_{\rm m}|a\rangle}{\varepsilon_a - \varepsilon_n} \,, \tag{20}$$

где $|a\rangle = |2p_{1/2}\rangle$, $|n\rangle$ обозначают четырехкомпонентные собственные функции оператора (14), ε_a, ε_n — соответствующие собственные значения, и суммирование распространяется в том числе и на отрицательный спектр. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в (9), можно показать, что доминирующий вклад в (20) происходит от промежуточного состояния $|b\rangle \equiv |2p_{3/2}\rangle$, отделенного от $|a\rangle$ тонкой структурой:

$$g_{\rm FS}^{(2)} = \frac{\langle a|U_{\rm m}|b\rangle\langle b|U_{\rm m}|a\rangle}{\varepsilon_a - \varepsilon_b} \,. \tag{21}$$

Выражение (21) в ведущем порядке по αZ также приводит к формулам (12) и (13).

В рамках КЭД-теории возмущений выражение для $g^{(2)}$ может быть представлено в виде:

$$g^{(2)} = g_{\rm lo}^{(2)} + \Delta g_{\rm int}^{(2)} + \Delta g_{\rm QED}^{(2)} \,, \tag{22}$$

где $g_{\rm lo}^{(2)}$ — вклад главного порядка (20), $\Delta g_{\rm int}^{(2)}$ — поправка на межэлектронное взаимодействие, а $\Delta g_{\rm QED}^{(2)}$ — КЭД-поправка. В выполненном в данной работе расчёте только вклад $\Delta g_{\rm int}^{(2)}$ выходит за рамки одноэлектронного приближения. Отметим, что для исследуемого состояния $^2P_{1/2}$ невозмущенная волновая функция описывается одним детерминантом Слейтера, построенным из собственных функций оператора (14).

Как уже было отмечено выше, межэлектронное взаимодействие существенно влияет на квадратичный эффект Зеемана, механизм этого влияния двоякий: во-первых, оно сильно изменяет расщепление тонкой структуры, которое входит в знаменатели в выражениях вида (12) и (21), во-вторых, оно оказывает влияние на значения матричных элементов. Поэтому точный учёт корреляционных эффектов крайне важен. Именно по этой причине мы проводим расчёты не только для кулоновского потенциала ядра, но и с добавлением экранирующих потенциалов CH и KS. Для более аккуратного учёта корреляционных вкладов мы рассматриваем также поправку на однофотонный обмен, которая соответствует диаграммам на рис. 1. Контрчленные диаграммы E и F на рис. 1 связаны с модификацией нулевого приближения и их необходимо учитывать только в расчётах с экранирующими потенциалами. Формальные выражения для поправки на однофотонный обмен, полученные в рамках строгого КЭД-подхода, идентичны (с точностью до симметрийных коэффициентов) представленным в работе [66], но с заменой потенциала сверхтонкого взаимодействия на потенциал взаимодействия с магнитным полем.

КЭД-поправка $\Delta g_{\rm QED}^{(2)}$ включает вклады собственной энергии (SE) и поляризации вакуума (VP):

$$\Delta g_{\rm QED}^{(2)} = \Delta g_{\rm SE}^{(2)} + \Delta g_{\rm VP}^{(2)} \,, \tag{23}$$

диаграммы для которых приведены на рис. 2 и 3 соответственно. Данные вклады недавно были подробно рассмотрены в нашей статье [60], где можно найти все необходимые формулы и детали расчётов. Отметим только, что вклад диаграмм собственной энергии учтён в рамках строгого КЭД-подхода, в то время как вклад диаграмм вакуумной поляризации рассмотрен в приближении электрической петли, для которой в свою очередь использован потенциал Юлинга. Аргументация в пользу возможности применения данных приближений также приведена в [60].

В работе [60] было показано, что КЭД-поправка к квадратичному эффекту Зеемана для состояния $2p_{1/2}$ может быть приближённо описана при помощи пары эффективных операторов [67–69]:

$$H_1^{\rm rad} = \frac{g_{\rm free} - 2}{2} (\mu_{\rm B} B) \beta \Sigma_z \equiv (\mu_{\rm B} B) U_1^{\rm rad} \,, \tag{24}$$

$$H_2^{\rm rad} = \frac{g_{\rm free} - 2}{2} \frac{\alpha Z}{2} (-i) \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \,, \tag{25}$$

где $g_{\rm free} - 2 \approx \alpha/\pi$ и $\Sigma_z = \mathrm{diag}\,(1, -1, 1, -1)$. Отметим, что несмотря на широкое применение этих операторов для приближённого учёта КЭД-вкладов в расчётах g-фактора, корректность их использования для оценки аналогичных поправок во втором порядке по магнитному полю заранее не очевидна. Например, в случае s-состояний их применение приводит к неправильным результатам [60].

Строя теорию возмущений по операторам $V_{\rm m}$, $H_1^{\rm rad}$ и $H_2^{\rm rad}$ методом [64], получаем, что КЭД-поправка к коэффициенту $g^{(2)}$ для состояния $2p_{1/2}$ может быть приближённо записана в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta g_{\rm rad}^{(2)} = \Delta g_{\rm rad-1}^{(2)} + \Delta g_{\rm rad-2}^{(2)} \,, \tag{26}$$

где

$$\Delta g_{\rm rad-1}^{(2)} = 2 \sum_n{}' \frac{\langle a|U_{\rm m}|n\rangle\langle n|U_1^{\rm rad}|a\rangle}{\varepsilon_a - \varepsilon_n} \,, \tag{27}$$

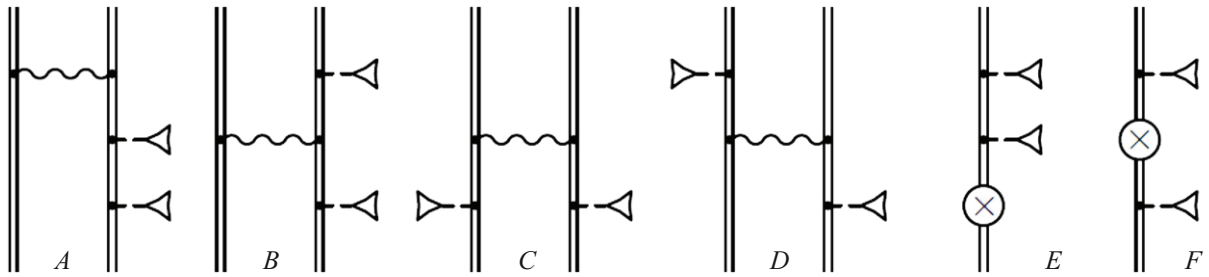

Рис. 1. Поправки на однофотонный обмен к квадратичному эффекту Зеемана. Двойная линия обозначает пропагатор электрона в поле V_{nuc} (или $V_{\text{nuc}} + V_{\text{scr}}$), волнистая линия — пропагатор фотона, штриховая линия, заканчивающаяся треугольником — взаимодействие с магнитным полем (19), крест в кружке — контрчлен $\delta V = -V_{\text{scr}}$.

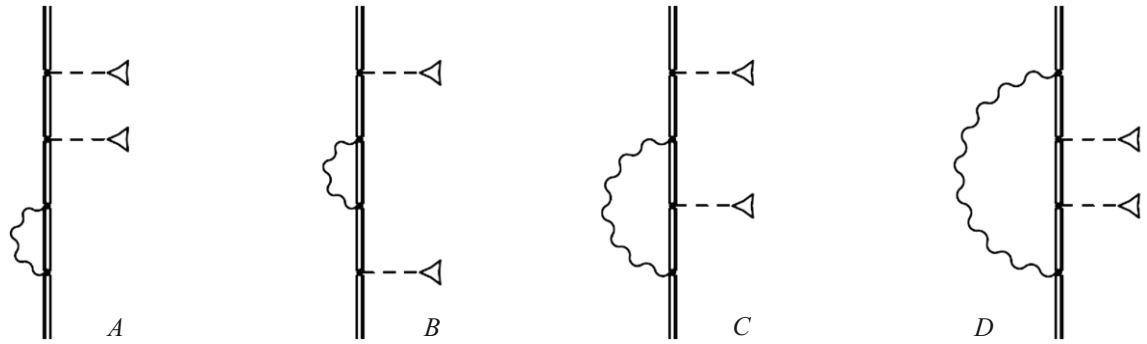

Рис. 2. Поправки на собственную энергию к квадратичному эффекту Зеемана. Обозначения, как на рис. 1. Диаграммы с массовым контрчленом опущены.

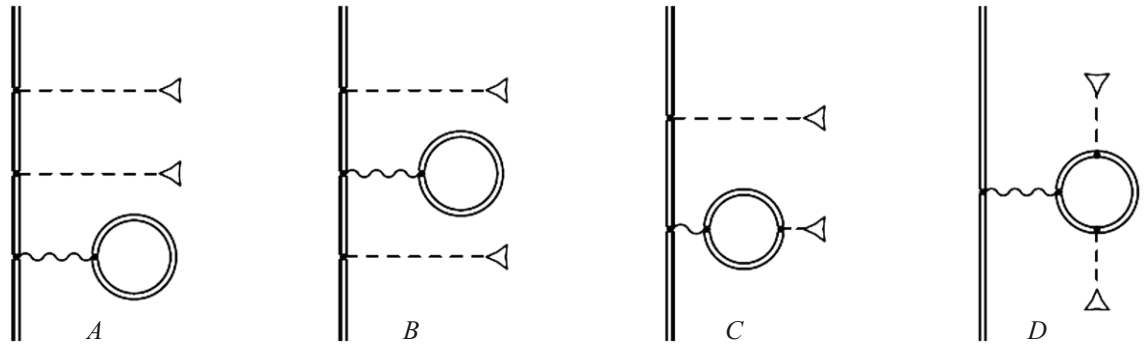

Рис. 3. Поправки на поляризацию вакуума к квадратичному эффекту Зеемана. Обозначения, как на рис. 1.

$$\Delta g^{(2)}_{\text{rad}-2} = \sum_{n_1,n_2}{}' \left[2\,\frac{\langle a|U_{\text{m}}|n_1\rangle\langle n_1|U_{\text{m}}|n_2\rangle\langle n_2|H_2^{\text{rad}}|a\rangle}{(\varepsilon_a-\varepsilon_{n_1})(\varepsilon_a-\varepsilon_{n_2})} + \frac{\langle a|U_{\text{m}}|n_1\rangle\langle n_1|H_2^{\text{rad}}|n_2\rangle\langle n_2|U_{\text{m}}|a\rangle}{(\varepsilon_a-\varepsilon_{n_1})(\varepsilon_a-\varepsilon_{n_2})} \right] - \sum_{n}{}' \left[2\,\frac{\langle a|U_{\text{m}}|n\rangle\langle n|H_2^{\text{rad}}|a\rangle}{(\varepsilon_a-\varepsilon_n)^2}\langle a|U_{\text{m}}|a\rangle + \frac{\langle a|U_{\text{m}}|n\rangle\langle n|U_{\text{m}}|a\rangle}{(\varepsilon_a-\varepsilon_n)^2}\langle a|H_2^{\text{rad}}|a\rangle \right]. \tag{28}$$

Рассмотрим в выражении (26) ведущий вклад по αZ. Как и в случае формул (8) и (20), доминирующий вклад происходит от промежуточных состояний $2p_{3/2}$:

$$\Delta g^{(2)}_{\text{FS,rad}-1} = 2\,\frac{\langle a|U_{\text{m}}|b\rangle\langle b|U_1^{\text{rad}}|a\rangle}{\varepsilon_a-\varepsilon_b}, \tag{29}$$

$$\Delta g^{(2)}_{\text{FS,rad}-2} = \frac{g^{(2)}_{\text{FS}}}{\varepsilon_a-\varepsilon_b}\left[\langle b|H_2^{\text{rad}}|b\rangle - \langle a|H_2^{\text{rad}}|a\rangle\right], \tag{30}$$

где мы вновь ввели дополнительный индекс „FS“ и учли, что оператор H_2^{rad} сохраняет угловые квантовые числа. Используя вириальные соотношения [70], можно показать, что для $V_{\text{nuc}}(r) = -\alpha Z/r$ справедливо соотношение

$$\langle b|U_1^{\text{rad}}|a\rangle \approx (g_{\text{free}}-2)\langle b|U_{\text{m}}|a\rangle \tag{31}$$

и поэтому

$$\Delta g^{(2)}_{\mathrm{FS,rad}-1} \approx 2(g_{\mathrm{free}} - 2) g^{(2)}_{\mathrm{FS}} . \qquad (32)$$

Кроме того, из вириальных соотношений можно также получить, что

$$\langle b|H_2^{\mathrm{rad}}|b\rangle - \langle a|H_2^{\mathrm{rad}}|a\rangle \approx (g_{\mathrm{free}} - 2)\frac{(\alpha Z)^4}{32} , \qquad (33)$$

откуда

$$\Delta g^{(2)}_{\mathrm{FS,rad}-2} \approx -(g_{\mathrm{free}} - 2) g^{(2)}_{\mathrm{FS}} . \qquad (34)$$

Окончательно получаем, что

$$\Delta g^{(2)}_{\mathrm{FS,rad}} \approx (g_{\mathrm{free}} - 2) g^{(2)}_{\mathrm{FS}} . \qquad (35)$$

3. Результаты и обсуждение

В данном разделе представлены результаты наших расчётов квадратичного эффекта Зеемана для основного состояния $(1s)^2(2s)^2 2p\,^2P_{1/2}$ бороподобных ионов, а именно рассмотрен вклад данного эффекта в энергию связи валентного электрона $2p_{1/2}$. Результаты приведены в терминах коэффициента $g^{(2)}$, определённого в (3). Вычисления выполнены для ионов с зарядами ядер в диапазоне $Z = 10$–24. Для описания распределения заряда ядра использована стандартная двухпараметрическая модель Ферми.

Результаты для квадратичного эффекта Зеемана и поправок на межэлектронное взаимодействие собраны в табл. 1. Здесь и далее отдельно показаны результаты, полученные в расчётах с кулоновским (Coul) потенциалом ядра и с включением экранирующих потенциалов Хартри (CH) и Кона-Шэма (KS). Для вклада ведущего порядка (LO), рассчитанного согласно (20), приведены также оценки (13) и (21), связанные с тонкой структурой (FS). Обе оценки воспроизводят полное дираковское значение (20) с хорошей точностью для малых зарядов ядер, тогда как их точность постепенно снижается по мере увеличения Z. Поправки на однофотонный обмен (1ph), вычисленные с применением экранирующих потенциалов, систематически меньше, чем соответствующие величины, рассчитанные в чисто кулоновском потенциале. Это связано с тем, что экранирующие потенциалы частично учитывают усреднённое поле электронов в гамильтониане нулевого порядка. Как следствие, ряды теории возмущений перестраиваются, при этом как члены ведущего порядка, так и соответствующие поправки на однофотонный обмен неявно содержат также вклады более высоких порядков. О сходимости результатов можно судить, рассматривая суммарные значения вычисленных вкладов, которые приведены для каждого из ионов в последней строке. Из табл. 1 видно, что расчёты с применением различных экранирующих потенциалов хорошо согласуются друг с другом: отдельные вклады могут сильно отличаться, но суммарные значения близки. Значения, полученные для чисто кулоновского потенциала существенно отличаются, особенно для малых Z: учёта поправок только первого порядка по $1/Z$ явно недостаточно для корректного описания эффектов межэлектронного взаимодействия в этом случае.

Таблица 1. Вклад ведущего порядка и поправки на межэлектронное взаимодействие в квадратичный эффект Зеемана для энергии связи валентного электрона $2p_{1/2}$ в основном состоянии $(1s)^2(2s)^2 2p\,^2P_{1/2}$ бороподобных ионов с зарядами ядер $Z = 10$, 18 и 24 в терминах коэффициента $g^{(2)}$, определённого в (3). Представлены результаты расчётов, выполненных как в кулоновском потенциале (Coul), так и с включением экранирующих потенциалах Хартри (CH) и Кона-Шэма (KS). FS означает оценки квадратичного эффекта Зеемана, заданные уравнениями (13) и (21), LO — вклад ведущего порядка (14), 1ph — поправка на однофотонный обмен. В последней строке приведена сумма вкладов LO и 1ph

Вклад	Coul	CH	KS
$Z = 10$			
FS (13)	−250770	—	—
FS (21)	−249768	−620567	−570994
LO	−247899	−617108	−567585
1ph	−208127	−41904	−92097
Сумма	−456025	−659012	−659682
$Z = 18$			
FS (13)	−23888.3	—	—
FS (21)	−23578.3	−37561.3	−36040.7
LO	−23007.3	−36782.8	−35268.1
1ph	−10818.7	−1470.4	−2982.8
Сумма	−33826.0	−38253.2	−38250.9
$Z = 24$			
FS (13)	−7558.42	—	—
FS (21)	−7383.60	−10399.53	−10091.16
LO	−7066.15	−10000.91	−9694.79
1ph	−2515.02	−298.66	−604.24
Сумма	−9581.18	−10299.57	−10299.03

КЭД-поправки представлены в табл. 2. Вклад собственной энергии (SE) вычислен с использованием метода, изложенного в нашей недавней работе [60]. Указанная в таблице погрешность носит чисто численный характер и связана с анализом сходимости результатов по размеру используемого базиса. Вклад вакуумной поляризации (VP) рассчитан в приближениях электрической петли и потенциала Юлинга. Мы не приводим погрешность для данной поправки, поскольку это может быть сделано надёжно лишь после того, как будет выполнен полный расчёт. Однако мы ожидаем, что использованное в данной работе приближение даёт доминирующий вклад. Отметим также, что вклад VP значительно меньше, чем вклад SE. Из табл. 2 видно, что результаты, полученные для различных экранирующих потенциалов, хорошо согласуются друг с другом. Отличие от чисто кулоновского результата вновь связано с частичным учетом эффектов межэлектронного взаимодействия.

Таблица 2. КЭД-поправки к квадратичному эффекту Зеемана для энергии связи валентного электрона $2p_{1/2}$ в основном состоянии $(1s)^2(2s)^2 2p\,^2P_{1/2}$ бороподобных ионов с зарядами ядер $Z = 10$, 18 и 24 в терминах коэффициента $g^{(2)}$, определённого в (3). Представлены результаты расчётов, выполненных как в кулоновском потенциале (Coul), так и с включением экранирующих потенциалов Хартри (CH) и Кона-Шэма (KS). Суммарная КЭД-поправка представлена также в терминах функции $F(\alpha Z)$, определённой в (36)

Вклад	Coul	CH	KS
	$Z = 10$		
SE	−590.8(10)	−1459.5(12)	−1343.5(12)
VP	0.6	1.4	1.3
Сумма	−590.2(10)	−1458.1(12)	−1342.2(12)
$F(\alpha Z)$	1.017	1.012	1.012
	$Z = 18$		
SE	−57.52(26)	−90.96(26)	−87.36(26)
VP	0.19	0.29	0.28
Сумма	−57.33(26)	−90.67(26)	−87.08(26)
$F(\alpha Z)$	1.046	1.039	1.040
	$Z = 24$		
SE	−18.50(18)	−25.88(20)	−25.13(21)
VP	0.11	0.15	0.15
Сумма	−18.39(18)	−25.73(20)	−24.98(21)
$F(\alpha Z)$	1.072	1.065	1.066

Основываясь на выражении (35), мы также представляем КЭД-поправку к квадратичному эффекту Зеемана для состояния $2p_{1/2}$ через функцию $F(\alpha Z)$, которая определена согласно

$$\Delta g^{(2)}_{\mathrm{QED}} = \frac{\alpha}{\pi} g^{(2)}_{\mathrm{FS}} F(\alpha Z)\,, \tag{36}$$

где $g^{(2)}_{\mathrm{FS}}$, в свою очередь, определён в (21). Отметим, что функция $F(\alpha Z)$ определена здесь иначе, чем в работе [60]. Согласно (35), ведущему порядку отвечает $F(\alpha Z) \equiv 1$. Полная КЭД-поправка в терминах $F(\alpha Z)$ показана в табл. 2 для каждого иона в последней строке. Как видно, функция $F(\alpha Z)$ монотонно возрастает с ростом Z. При малых Z поправка действительно близка к единице. Сравнение точной КЭД-поправки, полученной в рамках применения метода [64], с её приближением, вычисленным с использованием операторов H_1^{rad} и H_2^{rad} по формулам (26)–(28), представлено на рис. 4. Для построения графика использованы результаты расчёта на кулоновском потенциале. Следует отметить, что в области малых Z расхождение между точной КЭД-поправкой и приближением, полученным с помощью эффективных операторов, не превышает 3%. Однако с ростом Z различие увеличивается, достигая около 5% при $Z = 24$.

Окончательные результаты для коэффициента $g^{(2)}$ приведены в табл. 3. Итоговые значения представляют собой сумму трёх членов: вклада главного порядка (LO) $g^{(2)}_{\mathrm{lo}}$ из уравнения (20), поправки на однофотонный обмен (1ph) $\Delta g^{(2)}_{\mathrm{1ph}}$ и КЭД-поправки $\Delta g^{(2)}_{\mathrm{QED}}$. Разность между результатами расчётов с экранирующими потенциалами Хартри и Кона-Шэма даёт оценку точности полученных теоретических предсказаний. Значительная величина этой погрешности (особенно для малых Z) указывает на то, что повышение точности потребует более строгого учёта вкладов межэлектронного взаимодействия. Это подразумевает как систематическое исследование с использованием различных экранирующих потенциалов, так и расчёт поправок высших порядков по $1/Z$, что станет предметом наших дальнейших исследований.

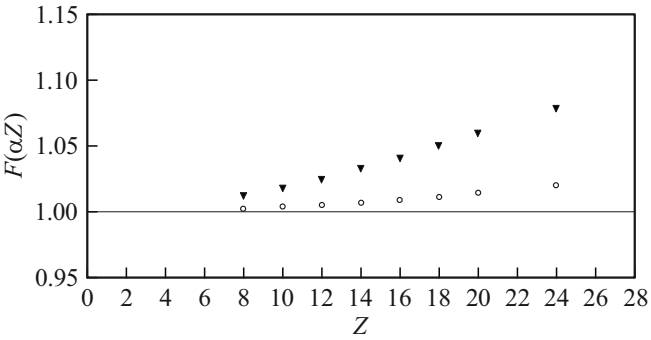

Рис. 4. КЭД-поправка к квадратичному эффекту Зеемана для состояния $2p_{1/2}$ в области малых Z в терминах функции $F(\alpha Z)$, определённой в уравнении (36). Точная КЭД-поправка, полученная в рамках применения метода [64], показана треугольниками, а приближение, полученное с помощью операторов H_1^{rad} и H_2^{rad}, показано кружками. Вкладу ведущего порядка соответствует значение $F(\alpha Z) \equiv 1$.

4. Заключение

В данной работе рассмотрен квадратичный эффект Зеемана для основного состояния $(1s)^2(2s)^2 2p\,^2P_{1/2}$ бороподобных ионов в диапазоне зарядов ядер $Z = 10$–24 и выполнен расчёт вызванного им сдвига энергии валентного электрона $2p_{1/2}$. Используемый подход систематически включает поправки на межэлектронное взаимодействие первого порядка по $1/Z$ и однопетлевые КЭД-поправки. Расчёты выполнены в картине Фарри как для кулоновского потенциала ядра, так и с включением экранирующих потенциалов Хартри и Кона-Шэма в гамильтониан нулевого приближения. Получены наиболее точные теоретические предсказания для вклада квадратичного эффекта Зеемана, которые могут быть использованы для анализа высокоточных экспериментов.

Благодарности

Мы благодарим И.С. Терехова за содержательные и вдохновляющие обсуждения по теме.

Таблица 3. Отдельные вклады и итоговые значения для квадратичного эффекта Зеемана для энергии связи электрона $2p_{1/2}$ в состоянии $(1s)^2(2s)^2 2p\,^2P_{1/2}$ бороподобных ионов в диапазоне зарядов ядер $Z = 10$–24 в терминах коэффициента $g^{(2)}$, определённого в (3). Представлены результаты расчётов, выполненных как для кулоновского потенциала (Coul), так и с включением экранирующих потенциалов Хартри (CH) и Кона-Шэма (KS). LO — вклад главного порядка (20), 1ph — поправка на однофотонный обмен, QED — КЭД-поправка. Окончательные результаты обозначены как „Итоговые значения“

Вклад	Coul	CH	KS
	$Z = 10$		
LO	−247898.6	−617107.8	−567584.9
1ph	−208126.5	−41904.2	−92097.5
QED	−590.2(7)	−1458.1(14)	−1342.3(15)
Итоговое значение	−456615.3	−660470.1	−661024.7
	$Z = 12$		
LO	−118942.8	−248234.1	−232207.9
1ph	−83349.4	−14527.3	−30629.4
QED	−286.0(2)	−591.7(5)	−554.1(5)
Итоговое значение	−202578.2	−263353.1	−263391.4
	$Z = 14$		
LO	−63816.12	−118349.86	−111940.25
1ph	−38403.11	−6024.99	−12440.73
QED	−155.11(25)	−284.93(11)	−269.84(12)
Итоговое значение	−102374.35	−124659.78	−124650.82
	$Z = 16$		
LO	−37147.38	−63296.44	−60338.01
1ph	−19602.78	−2838.85	−5794.97
QED	−91.34(30)	−154.11(16)	−147.13(15)
Итоговое значение	−56841.51	−66289.40	−66280.11
	$Z = 18$		
LO	−23007.28	−36782.80	−35268.07
1ph	−10818.70	−1470.44	−2982.81
QED	−57.33(26)	−90.67(26)	−87.08(26)
Итоговое значение	−33883.31	−38343.92	−38337.95
	$Z = 20$		
LO	−14960.93	−22760.38	−21921.35
1ph	−6349.09	−819.11	−1656.58
QED	−37.80(23)	−56.86(24)	−54.86(24)
Итоговое значение	−21347.82	−23636.35	−23632.79
	$Z = 24$		
LO	−7066.15	−10000.91	−9694.79
1ph	−2515.02	−298.66	−604.24
QED	−18.39(18)	−25.73(20)	−24.98(21)
Итоговое значение	−9599.57	−10325.30	−10324.01

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSER-2025.0012). Работа А. В. М. поддержана Фондом развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (проект № 24-1-2-74-1). Работа Д. А. Г. поддержана Фондом развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (проект № 23-1-2-52-1).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J. Morgner, B. Tu, C.M. König, T. Sailer, F. Heiße, H. Bekker, B. Sikora, C. Lyu, V.A. Yerokhin, Z. Harman, J.R. Crespo López-Urrutia, C.H. Keitel, S. Sturm, K. Blaum. Nature, **622**, 53 (2023). DOI: 10.1038/s41586-023-06453-2

[2] J. Morgner, B. Tu, M. Moretti, C.M. König, F. Heiße, T. Sailer, V.A. Yerokhin, B. Sikora, N.S. Oreshkina, Z. Harman, C.H. Keitel, S. Sturm, K. Blaum. Phys. Rev. Lett., **134**, 123201 (2025). DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.123201
[3] J. Morgner, V.A. Yerokhin, C.M. K.nig, F. Hei.e, B. Tu, T. Sailer, B. Sikora, Z. Harman, J.R.C. L.pez-Urrutia, C.H. Keitel, S. Sturm, K. Blaum. Science, **388**, 945 (2025). DOI: 10.1126/science.adn5981
[4] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H.J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, G. Werth. Phys. Rev. Lett., **85**, 5308 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5308
[5] J. Verdú, S. Djekić, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H.J. Kluge, W. Quint. Phys. Rev. Lett., **92**, 093002 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.093002
[6] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C.H. Keitel, K. Blaum. Phys. Rev. Lett., **107**, 023002 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.023002
[7] S. Sturm, A. Wagner, M. Kretzschmar, W. Quint, G. Werth, K. Blaum. Phys. Rev. A, **87**, 030501 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevA.87.030501
[8] A. Wagner, S. Sturm, F. Köhler, D.A. Glazov, A.V. Volotka, G. Plunien, W. Quint, G. Werth, V.M. Shabaev, K. Blaum. Phys. Rev. Lett., **110**, 033003 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.033003
[9] I. Arapoglou, A. Egl, M. Höcker, T. Sailer, B. Tu, A. Weigel, R. Wolf, H. Cakir, V.A. Yerokhin, N.S. Oreshkina, V.A. Agababaev, A.V. Volotka, D.V. Zinenko, D.A. Glazov, Z. Harman, C.H. Keitel, S. Sturm, K. Blaum. Phys. Rev. Lett., **122**, 253001 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.253001
[10] D.A. Glazov, F. Köhler-Langes, A.V. Volotka, K. Blaum, F. Heiße, G. Plunien, W. Quint, S. Rau, V.M. Shabaev, S. Sturm, G. Werth. Phys. Rev. Lett., **123**, 173001 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.173001
[11] F. Heiße, M. Door, T. Sailer, P. Filianin, J. Herkenhoff, C.M. König, K. Kromer, D. Lange, J. Morgner, A. Rischka, C. Schweiger, B. Tu, Y.N. Novikov, S. Eliseev, S. Sturm, K. Blaum. Phys. Rev. Lett., **131**, 253002 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.253002
[12] L.J. Spieß, S. Chen, A. Wilzewski, M. Wehrheim, J. Gilles, A. Surzhykov, E. Benkler, M. Filzinger, M. Steinel, N. Huntemann, C. Cheung, S.G. Porsev, A.I. Bondarev, M.S. Safronova, J.R. Crespo López-Urrutia, P.O. Schmidt. Phys. Rev. Lett., **135**, 043002 (2025). DOI: 10.1103/p88p-brnx
[13] S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C.H. Keitel, K. Blaum. Nature, **506**, 467 (2014). DOI: 10.1038/nature13026
[14] P.J. Mohr, D.B. Newell, B.N. Taylor, E. Tiesinga. Rev. Mod. Phys., **97**, 025002 (2025). DOI: 10.1103/RevModPhys.97.025002
[15] A.V. Volotka, D.A. Glazov, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, G. Plunien. Phys. Rev. Lett., **112**, 253004 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.253004
[16] F. Köhler, K. Blaum, M. Block, S. Chenmarev, S. Eliseev, D.A. Glazov, M. Goncharov, J. Hou, A. Kracke, D.A. Nesterenko, Y.N. Novikov, W. Quint, E. Minaya Ramirez, V.M. Shabaev, S. Sturm, A.V. Volotka, G. Werth. Nat. Commun., **7**, 10246 (2016). DOI: 10.1088/1742-6596/1138/1/012002
[17] V.A. Yerokhin, K. Pachucki, M. Puchalski, Z. Harman, C.H. Keitel. Phys. Rev. A, **95**, 062511 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.95.062511
[18] V.M. Shabaev, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, I.I. Tupitsyn. Phys. Rev. Lett., **119**, 263001 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.263001
[19] V.M. Shabaev, D.A. Glazov, N.S. Oreshkina, A.V. Volotka, G. Plunien, H.J. Kluge, W. Quint. Phys. Rev. Lett., **96**, 253002 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.253002
[20] A.V. Volotka, G. Plunien. Phys. Rev. Lett., **113**, 023002 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.023002
[21] V.A. Yerokhin, E. Berseneva, Z. Harman, I.I. Tupitsyn, C.H. Keitel. Phys. Rev. Lett., **116**, 100801 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.022502
[22] W. Quint, D.L. Moskovkhin, V.M. Shabaev, M. Vogel. Phys. Rev. A, **78**, 032517 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevA.78.032517
[23] V.A. Yerokhin, K. Pachucki, Z. Harman, C.H. Keitel. Phys. Rev. Lett., **107**, 043004 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043004
[24] V.M. Shabaev, D.A. Glazov, A.M. Ryzhkov, C. Brandau, G. Plunien, W. Quint, A.M. Volchkova, D.V. Zinenko. Phys. Rev. Lett., **128**, 043001 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.043001
[25] T. Sailer, V. Debierre, Z. Harman, F. Heiße, C. König, J. Morgner, B. Tu, A.V. Volotka, C.H. Keitel, K. Blaum, S. Sturm. Nature, **606**, 479 (2022). DOI: 10.1038/s41586-022-04807-w
[26] V. Debierre, C. Keitel, Z. Harman. Physics Letters B, **807**, 135527 (2020). DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135527
[27] V. Debierre, N.S. Oreshkina, I.A. Valuev, Z. Harman, C.H. Keitel. Phys. Rev. A, **106**, 062801 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.106.062801
[28] D.S. Akulov, R.R. Abdullin, D.V. Chubukov, D.A. Glazov, A.V. Volotka. Atoms, **13** (2025). DOI: 10.3390/atoms13060052
[29] F.A. Jenkins, E. Segrè. Phys. Rev., **55**, 52 (1939). DOI: 10.1103/PhysRev.55.52
[30] L.I. Schiff, H. Snyder. Phys. Rev., **55**, 59 (1939). DOI: 10.1103/PhysRev.55.59
[31] G.W. Preston. Astrophys. J., **160**, L143 (1970). DOI: 10.1086/180547
[32] S.B. Kemic. Astrophysics and Space Science, **36**, 459 (1975). DOI: 10.1007/BF00645268
[33] C. Moran, T.R. Marsh, V.S. Dhillon. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **299**, 218 (1998). DOI: 10.1046/j.1365-8711.1998.01763.x
[34] J. Stenger, S. Inouye, D.M. Stamper-Kurn, H.J. Miesner, A.P. Chikkatur, W. Ketterle. Nature, **396**, 345 (1998). DOI: 10.1038/24567
[35] A. Thilderkvist, M. Kleverman, G. Grossmann, H. Grimmeiss. Phys. Rev. B, **49**, 14270 (1994). DOI: 10.1103/PhysRevB.49.14270
[36] W.R.S. Garton, F.S. Tomkins. Astrophys. J., **158**, 839 (1969). DOI: 10.1086/150243
[37] G. Feinberg, A. Rich, J. Sucher. Phys. Rev. A, **41**, 3478 (1990). DOI: 10.1103/PhysRevA.41.3478
[38] M. Raoult, S. Guizard, D. Gauyacq, A. Matzkin. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, **38**, S171 (2005). DOI: 10.1088/0953-4075/38/2/013
[39] K. Numazaki, H. Imai, A. Morinaga. Phys. Rev. A, **81**, 032124 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevA.81.032124
[40] D.V. Zinenko, V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, A.D. Moshkin, E.V. Tryapitsyna, A.V. Volotka. Phys. Rev. A, **113**, 052809 (2026). DOI: 10.1103/jdpd-t4lw

[41] D. von Lindenfels, M. Wiesel, D.A. Glazov, A.V. Volotka, M.M. Sokolov, V.M. Shabaev, G. Plunien, W. Quint, G. Birkl, A. Martin, M. Vogel. Phys. Rev. A, **87**, 023412 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevA.81.032124
[42] A. Egl, I. Arapoglou, M. Höcker, K. König, T. Ratajczyk, T. Sailer, B. Tu, A. Weigel, K. Blaum, W. Nörtershäuser, S. Sturm. Phys. Rev. Lett., **123**, 123001 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.123001
[43] P. Micke, T. Leopold, S.A. King, E. Benkler, L.J. Spieß, L. Schmöger, M. Schwarz, J.R. Crespo López-Urrutia, P.O. Schmidt. Nature, **578**, 60 (2020). DOI: 10.1038/s41586-020-1959-8
[44] S.A. King, L.J. Spieß, P. Micke, A. Wilzewski, T. Leopold, E. Benkler, R. Lange, N. Huntemann, A. Surzhykov, V.A. Yerokhin, J.R. Crespo López-Urrutia, P.O. Schmidt. Nature, **611**, 43 (2022). DOI: 10.1038/s41586-022-05245-4
[45] D.A. Glazov, A.V. Volotka, A.A. Schepetnov, M.M. Sokolov, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, G. Plunien. Phys. Scr., **T156**, 014014 (2013). DOI: 10.1088/0031-8949/2013/T156/014014
[46] A.A. Shchepetnov, D.A. Glazov, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, G. Plunien. J. Phys. Conf. Ser., **583**, 012001 (2015). DOI: 10.1088/1742-6596/583/1/012001
[47] H. Cakir, V.A. Yerokhin, N.S. Oreshkina, B. Sikora, I.I. Tupitsyn, C.H. Keitel, Z. Harman. Phys. Rev. A, **101**, 062513 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.101.062513
[48] S. Verdebout, C. Nazé, P. Jönsson, P. Rynkun, M. Godefroid, G. Gaigalas. At. Data Nucl. Data Tables, **100**, 1111 (2014). DOI: 10.1016/j.adt.2014.05.001
[49] J.P. Marques, P. Indelicato, F. Parente, J.M. Sampaio, J.P. Santos. Phys. Rev. A, **94**, 042504 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.042504
[50] V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.V. Volotka, D.V. Zinenko, V.M. Shabaev, G. Plunien. J. Phys. Conf. Ser., **1138**, 012003 (2018). DOI: 10.1088/1742-6596/1138/1/012003
[51] D.E. Maison, L.V. Skripnikov, D.A. Glazov. Phys. Rev. A, **99**, 042506 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.042506
[52] V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.V. Volotka, D.V. Zinenko, V.M. Shabaev, G. Plunien. X-Ray Spectrometry, **49**, 143 (2020). DOI: https://doi.org/10.1002/xrs.3074
[53] D.A. Glazov, A.V. Malyshev, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn. Opt. Spectrosc., **124**, 457 (2018). DOI: 10.1134/S0030400X18040082
[54] I.A. Aleksandrov, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn. Phys. Rev. A, **98**, 062521 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.062521
[55] A.V. Malyshev, D.A. Glazov, I.A. Aleksandrov, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev. Optics and Spectroscopy, **128**, 297 (2020). DOI: 10.1134/S0030400X20030145
[56] D.A. Glazov, A.V. Malyshev, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn. Phys. Rev. A, **101**, 012515 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.101.012515
[57] D.A. Glazov, D.V. Zinenko, V.A. Agababaev, A.D. Moshkin, E.V. Tryapitsyna, A.M. Volchkova, A.V. Volotka. Atoms, **11** (2023). DOI: 10.3390/atoms11090119
[58] V.A. Agababaev, A.M. Volchkova, A.S. Varentsova, D.A. Glazov, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, G. Plunien. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B, **408**, 70 (2017). DOI: 10.1016/j.nimb.2017.03.130
[59] A.S. Varentsova, V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.M. Volchkova, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, G. Plunien. Phys. Rev. A, **97**, 043402 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.97.043402
[60] V.A. Agababaev, E.A. Prokhorchuk, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, V.M. Shabaev, A.V. Volotka. Phys. Rev. A, **112**, 032818 (2025). DOI: 10.1103/cpbv-l4z1
[61] A.S. Varentsova, V.A. Agababaev, A.M. Volchkova, D.A. Glazov, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, G. Plunien. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B, **408**, 80 (2017). DOI: 10.1016/j.nimb.2017.05.040
[62] A.M. Volchkova, A.S. Varentsova, N.A. Zubova, V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, G. Plunien. Nucl. Intsr. Met. B, **408**, 89 (2017). DOI: 10.1016/j.nimb.2017.04.086
[63] A.M. Volchkova, V.A. Agababaev, D.A. Glazov, A.V. Volotka, S. Fritzsche, V.M. Shabaev, G. Plunien. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.00109
[64] V.M. Shabaev. Phys. Rep., **356**, 119 (2002). DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00024-2
[65] W. Kohn, L.J. Sham. Phys. Rev., **140**, A1133 (1965). DOI: 10.1103/PhysRev.140.A1133
[66] Д.Л. Московкин, В.М. Шабаев, W. Quint. Опт. спектр., **104**, 709 (2008). DOI: 10.1134/S0030400X08050019
[67] H. Grotch, R.A. Hegstrom. Phys. Rev. A, **4**, 59 (1971). DOI: 10.1103/PhysRevA.4.59
[68] R.A. Hegstrom. Phys. Rev. A, **7**, 451 (1973). DOI: 10.1103/PhysRevA.11.421
[69] D.A. Glazov, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, A.V. Volotka, V.A. Yerokhin, G. Plunien, G. Soff. Phys. Rev. A, **70**, 062104 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.70.062104
[70] V.M. Shabaev. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **24**, 4479 (1991). DOI: 10.1088/0953-4075/24/21/004