

11

Метод детектирования фазовой хаотической синхронизации и статистических характеристик перемежаемости на основе спектрального анализа

© М.О. Журавлёв

Национальный медицинский исследовательский центр терапии и профилактической медицины Минздрава России, Москва, Россия

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Поступило в Редакцию 1 апреля 2026 г.

В окончательной редакции 31 мая 2026 г.

Принято к публикации 16 июня 2026 г.

Предложен метод на основе спектрального анализа хаотических сигналов, позволяющий детектировать в анализируемой системе наличие фазовой хаотической синхронизации и статистические характеристики перемежающегося поведения, наблюдаемого на границе фазовой хаотической синхронизации. На основе предложенного метода проведено численное исследование перемежающегося поведения на границе фазовой хаотической синхронизации в системе однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера. Сопоставление полученных результатов с результатами известного метода детектирования участков захвата фаз демонстрирует высокий уровень согласованности методов.

Ключевые слова: фазовая хаотическая синхронизация, перемежаемость, вейвлет-преобразование, хаотический осциллятор, биологические сигналы.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.18.63545.20707

Синхронизация как одно из основополагающих явлений нелинейной динамики изучается уже более трех веков, однако обилие современных исследований, активно публикуемых в ведущих научных изданиях, подтверждает, что интерес к этому явлению не исчерпан. На данный момент выявлено несколько типов синхронного поведения нелинейных динамических систем, таких как фазовая хаотическая синхронизация [1], обобщенная синхронизация [2,3], синхронизация с запаздыванием [4], полная синхронизация [5], синхронизация временных масштабов [6,7] и др., каждый из которых обладает своими специфическими особенностями и методами диагностики. Отдельное место в изучении феномена синхронизации занимает его исследование в реальных системах [8–10], что не только имеет фундаментальное значение для понимания механизмов данного явления, но и обеспечивает прикладное применение, в частности, в задачах создания систем диагностики эпилептических событий [11], когнитивных нарушений [12], при разработке инновационных методов терапии на основе оценки индивидуальных межнейронных биомаркеров при лечении болезни Паркинсона [13] и пр.

Одним из направлений изучения синхронизации является исследование состояний, предшествующих ей. В ряде работ (см., например, [4,14]) было показано, что при росте силы взаимодействия между системами переход от асинхронного режима к синхронному осуществляется, как правило, через перемежающееся поведение, наблюдаемое вблизи границы синхронизации [15,16], причем

каждому из типов синхронизации предшествует свой определенный тип перемежаемости [14,16–18].

Сегодня весьма актуально исследование фундаментального явления синхронизации и перемежающейся динамики в живых системах, что ставит перед исследователями отдельную задачу детектирования синхронных/асинхронных участков поведения. Для модельных систем данная задача достаточно полно решена, но в реальных системах живой природы этот вопрос все еще стоит остро. Например, для определения и изучения фазовой хаотической синхронизации в реальных системах необходима процедура определения фазы анализируемых сигналов. Для этого, как правило, используются угол поворота на плоскости проекции хаотического аттрактора, сечение Пуанкаре или преобразование Гильберта [19,20]. Однако сигналы реальных систем обычно обладают сложной хаотической нефазово-когерентной структурой аттрактора, осложненной шумами и артефактами, искажающими результаты исследований. Кроме того, после неоднозначной процедуры введения мгновенной фазы сигналов используются различные многоступенчатые алгоритмы автоматического детектирования синхронных/асинхронных участков поведения [10], которые могут далее увеличивать ошибку численных оценок.

В рамках настоящей работы предложен новый метод детектирования фазовой хаотической синхронизации на основе использования концепции частотных паттернов, предложенной в работе [21]. Важными достоинствами разработанного метода представляются простота алго-

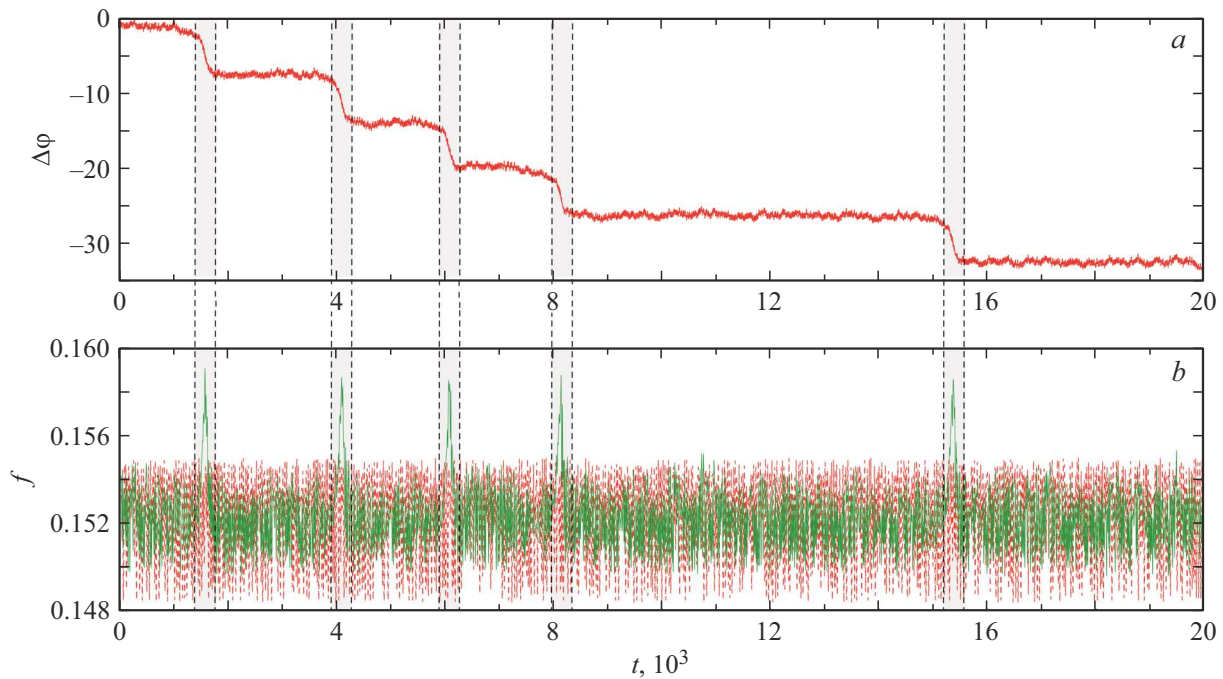


Рис. 1. *a* — временная зависимость разности мгновенных фаз $\Delta\varphi$ для систем (1) и (2) при значении параметра связи $\varepsilon = 0.03685$, серой заливкой выделены турбулентные фазы. *b* — зависимости от времени выделенных частотных паттернов при параметре связи $\varepsilon = 0.03685$ для ведущей $p_d(t)$ (красная штриховая линия) и ведомой $p_r(t)$ (зеленая сплошная линия) систем; участки, соответствующие появлению турбулентной фазы, выделены серой заливкой. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

ритма детектирования участков турбулентной фазы, отсутствие необходимости введения мгновенной фазы анализируемых сигналов, возможность анализа исключительно с использованием сигнала ведомой системы, низкая чувствительность к шумам и артефактам за счет повышенной робастности применяемого подхода частотных паттернов и вследствие перечисленного высокая применимость к экспериментальным сигналам.

Апробация предлагаемого метода детектирования фазовой хаотической синхронизации выполнена на такой классической модели нелинейной динамики, как односторонне связанные осцилляторы Ресслера [22], изначально описывающие химическую реакцию, способную демонстрировать хаотическую динамику:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d = \omega_d x_d - a y_d, \\ \dot{z}_d = p - z_d(x_d - c), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r = \omega_r x_r - a y_r, \\ \dot{z}_r = p - z_r(x_r - c), \end{cases} \quad (2)$$

где (x_d, y_d, z_d) и (x_r, y_r, z_r) — декартовы координаты ведущего и ведомого осциллятора соответственно; ε — параметр, отвечающий за интенсивность связи. Система (1) является ведущей, а система (2) — ведомой.

Для обеспечения сравнения результатов с полученными ранее в [17,23] значения управляющих параметров выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ соответствуют собственным частотам ведущей и ведомой систем, что отвечает малой расстройке по частоте. При выбранных значениях управляющих параметров для систем (1) и (2) при значении параметра интенсивности связи ε меньше критического значения $\varepsilon_c \approx 0.042$ происходит разрушение фазовой хаотической синхронизации в исследуемых системах и наблюдается перемежающееся поведение типа „игольного ушка“ [17].

Предлагаемый метод детектирования участков синхронного/асинхронного поведения на границе фазовой хаотической синхронизации основан на концепции спектрального анализа хаотических сигналов, реализуемой на базе непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) [24]:

$$W(f, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (3)$$

где s — временной масштаб, звездочка — комплексное сопряжение, $\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{j\Omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$ — материнский вейвлет Морле с параметром $\Omega_0 = 2\pi$, обеспечивающим однозначную взаимосвязь между временным масштабом s НВП и фурье-частотой f , а именно $f = \frac{1}{s}$. На первом шаге для ведущей (1) и ведомой (2) систем

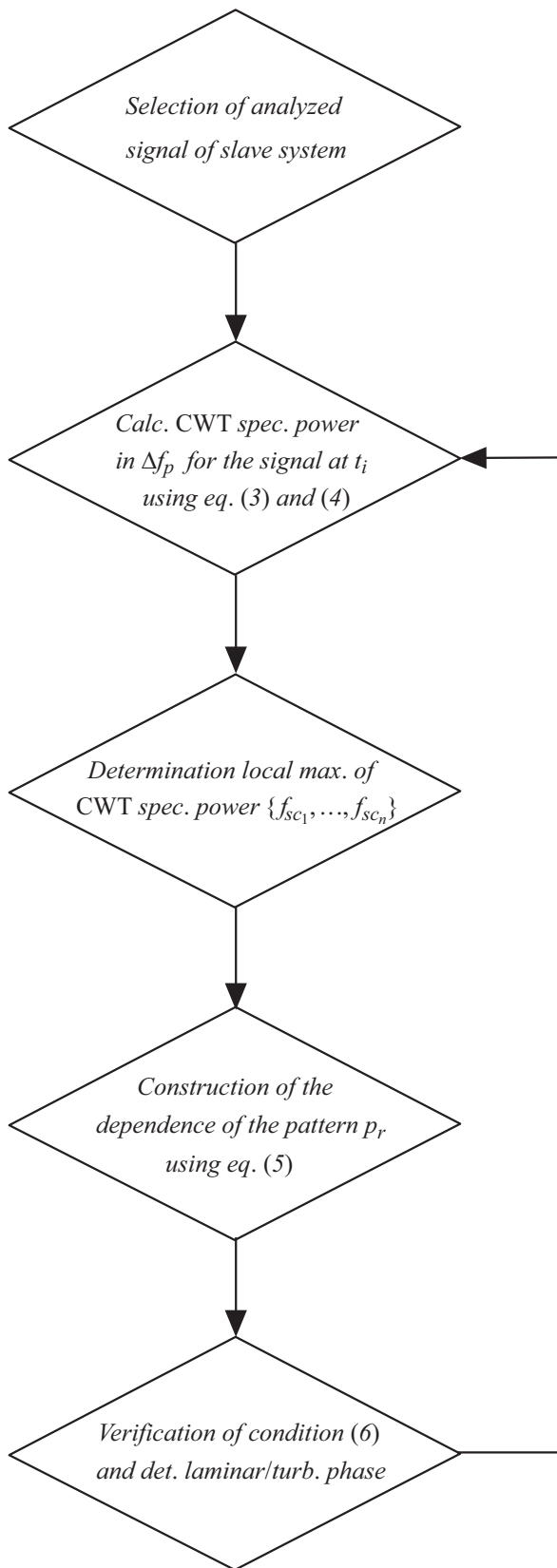


Рис. 2. Схема алгоритма детектирования методом НВП паттернов синхронной/асинхронной динамики ниже границы фазовой хаотической синхронизации.

для переменных x_d и x_r в каждый момент времени t оценивается спектральная мощность НВП

$$E(f, t_0) = |W(f, t_0)|^2. \quad (4)$$

Оценка спектральной мощности НВП проводится в частотном диапазоне, в который попадают собственные частоты ведущей и ведомой систем. Для рассматриваемого случая с учетом перехода от угловой частоты к циклической диапазон был следующим: $\Delta f_p = [0.145; 0.165]$. В момент времени t_i на поверхности НВП $E(f, t_i)$ определялись локальные максимумы спектральной мощности и соответствующие им частоты $\{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^i$. Данная процедура повторялась в каждый последующий момент времени t_{i+j} с определением соответствующего набора частот $\{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^{i+j}$. В результате был получен набор частот, в котором последовательно наблюдаются локальные максимумы энергии НВП $\{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^k$, где $k = 1, \dots, N$ (N — общее количество отсчетов в анализируемой временной реализации).

На следующем шаге на основе массива $\{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^k$ производится расчет зависимости колебательного паттерна p_r от времени на основе условия, предложенного в работе [21]:

$$p_{d,r}(t_i) = \begin{cases} f_i \text{ при } |f_i - f_{i+1}| \leq \delta, f_i \in \{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^i, \\ f_{i+1} \in \{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^{i+1}, \\ 0 \text{ при } |f_i - f_{i+1}| > \delta, f_i \in \{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^i, \\ f_{i+1} \in \{f_{sc1}, \dots, f_{scn}\}^{i+1}, \end{cases} \quad (5)$$

где δ — численная константа, выбираемая согласно частоте дискретизации сигнала, в данном случае $\delta = 0.005$.

На рис. 1, a и b для систем (1) и (2) при параметре связи $\varepsilon = 0.03685$ представлены результаты оценки временных зависимостей классической разности фаз $\Delta\varphi = (\arctan \frac{x_d}{y_d} - \arctan \frac{x_r}{y_r})$, определяемой через отношение координат для ведущей (1) и ведомой (2) систем, а также временных зависимостей частотных паттернов p_d и p_r , рассчитанных по переменным x_d и x_r . Хорошо видно, что во время фаз турбулентной динамики временная зависимость паттерна p_r ведомой системы (2) демонстрирует резкое возрастание собственной частоты, что эмпирически позволяет ввести критерий для детектирования турбулентной динамики

$$p_r(t_1) \geq 0.157, \quad p_r(t_2) < 0.153,$$

где t_1 определяет момент начала детекции фазы турбулентной динамики, а t_2 — момент ее завершения. Соответственно момент завершения турбулентной фазы отвечает моменту наступления ламинарной (синхронной) фазы, а момент начала турбулентности — завершению синхронной фазы. Для детектирования можно использовать и другую пару координат систем (1) и (2), а именно y_d и y_r . Более того, если в ведущей системе не происходит постоянной перестройки собственной

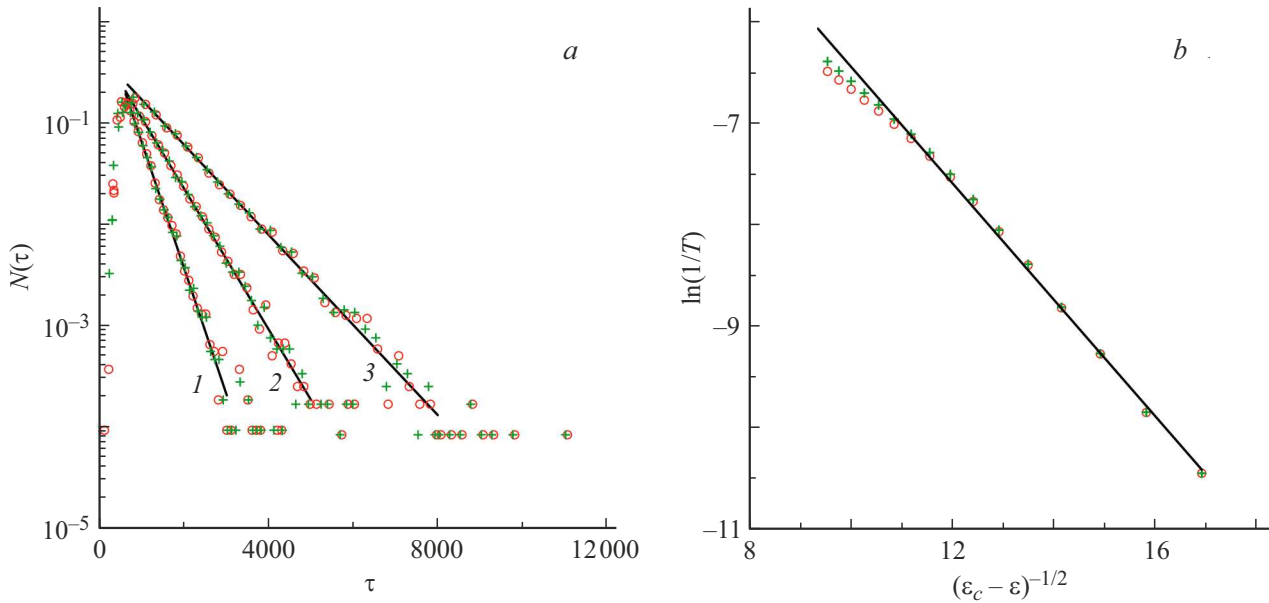


Рис. 3. *a* — распределение длительности ламинарных участков поведения τ при фиксированных управляющих параметрах системы уравнений (1) и (2). $\varepsilon = 0.032$ (1), 0.0335 (2) и 0.0345 (3). Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе. *b* — зависимость средней длительности ламинарного поведения T от параметра интенсивности связи для систем (1) и (2). Крестики — численные результаты, полученные с использованием метода НВП паттернов, кружки — численные результаты, полученные с использованием метода фазовых проскоков [23]. Сплошные линии соответствуют теоретическим зависимостям (6) и (7).

частоты, то после введения критерия для детектирования начала/окончания турбулентной фазы достаточно оценивать спектральные характеристики только одной координаты ведомой системы, а оценка сигнала ведущей системы является излишней. С учетом всего изложенного выше на рис. 2 представлен поэтапный алгоритм детектирования ламинарных/турбулентных фаз разработанным методом.

Для апробации предложенного метода использован метод детекции ламинарных фаз, основанный на оценке фазовых проскоков, описанный ранее в [25]. Применение метода фазовых проскоков требует введения собственной фазы через $\arctan \frac{x}{y}$ в ведущей и ведомой системах, детектирование ламинарных/турбулентных фаз основано на оценке разности фаз ведомой и ведущей систем.

На основе данных методов были детектированы участки синхронной динамики во временных реализациях систем (1) и (2), рассчитаны распределение длительности ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарной фазы от интенсивности силы связи. Длительности анализируемых временных реализаций включали в себя более 3.5 тысяч ламинарных фаз динамики. Полученные численные результаты сопоставлялись с известными характеристиками перемежаемости типа „игольного ушка“ [17], наблюдаемой в данной нелинейной системе, а именно распределением длительности ламинарных фаз

$$N(\tau) = T^{-1} e^{-\tau/T}, \quad (6)$$

где τ — длительность ламинарной фазы, и зависимостью средней длительности ламинарной фазы от параметра

интенсивности связи

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1 |\varepsilon_c - \varepsilon|^{-1/2}, \quad (7)$$

где T — средняя длительность ламинарного поведения при заданном значении параметра интенсивности связи ε ; c_0 и c_1 — константы.

На рис. 3, *a* и *b* представлены результаты численных оценок указанных характеристик в сравнении с теоретическими данными (6) и (7), а именно распределения длительности ламинарных фаз для трех параметров интенсивности связи ε ниже критического значения ε_c и зависимости средней длительности ламинарного поведения от параметра интенсивности связи ε соответственно. Рисунки показывают хорошее согласие результатов численного анализа на основе методов НВП паттернов и фазовых проскоков как между собой, так и с теоретическими законами (6) и (7). На рис. 4 приведено графическое представление результатов оценки согласия между двумя методами измерений с использованием диаграммы Бланда–Альмана [26], демонстрирующей высокую точность предложенного метода детекции ламинарных фаз в широком диапазоне значений параметра интенсивности связи.

В отличие от существующего метода фазовых проскоков предложенный метод НВП паттернов не требует введения мгновенной фазы, что расширяет возможности анализа нефазово-когерентных аттракторов, и позволяет проводить анализ лишь сигнала ведомой системы, если ведущая система не демонстрирует постоянных перестроек собственной частоты. Таким образом, разработанный подход к выявлению ламинарных/турбулентных фаз

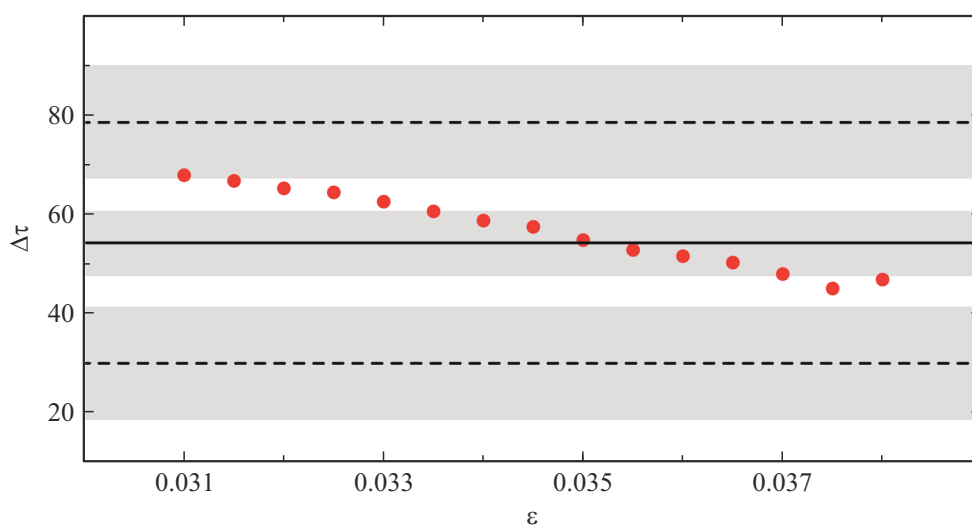


Рис. 4. Результат расчета оценки согласия на основе диаграммы Бланда–Альтмана для методов НВП паттернов и фазовых проскоков при определении средней длительности ламинарного поведения T при фиксированных управляющих параметрах систем (1) и (2). По оси абсцисс отложены значения интенсивности связи, по оси ординат — разность между результатами двух методов измерений. Сплошная линия — среднее смещение, штриховые линии — пределы согласия, серые полосы — доверительные интервалы для смещения и пределов согласия. Точками показаны полученные разности для рассматриваемых методов.

направлен на упрощение процесса детекции состояний синхронной/асинхронной динамики и в конечном итоге на унификацию и расширение возможностей анализа особенностей фазовой хаотической синхронизации в реальных биофизических сигналах и живых системах, где процесс введения мгновенной фазы не всегда является тривиальной задачей.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-44-10019 (<https://rscf.ru/project/25-44-10019/>).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (11), 1804 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804
- [2] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D. Abarbanel, *Phys. Rev. E*, **51** (2), 980 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980
- [3] J.M. Amigó, R. Dale, J.C. King, K. Lehnertz, *Chaos*, **34**, 123156 (2024). DOI: 10.1063/5.0235802
- [4] G.M. Mahmoud, E.E. Mahmoud, *Nonlinear Dyn.*, **67**, 1613 (2012). DOI: 10.1007/s11071-011-0091-6
- [5] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (8), 821 (1990). DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821
- [6] A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, *Chaos*, **14** (3), 603 (2004). DOI: 10.1063/1.1775991
- [7] E.B. Postnikov, *Phys. Rev. E*, **80** (5), 057201 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevE.80.057201
- [8] О.Е. Дик, А.Л. Глазов, *ЖТФ*, **91** (4), 678 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.04.50633.200-20 [О.Е. Дик, А.Л. Глазов, *Tech. Phys.*, **66**, 560 (2021). DOI: 10.1134/S1063784221040058].
- [9] Д.Э. Аверкиев, С.А. Дёмин, О.Ю. Панищев, *ЖТФ*, **94** (12), 1992 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.12.59241.340-24 [D.E. Averkiev, S.A. Demin, O.Yu. Panishev, *Tech. Phys.*, **69** (12), 1842 (2024). DOI: 10.61011/TP.2024.12.60399.340-24].
- [10] V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, A.S. Karavaev, A.R. Kiselev, V.I. Gridnev, B.P. Bezruchko, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **222** (10), 2687 (2013). DOI: 10.1140/epjst/e2013-02048-1
- [11] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C.E. Elger, *Physica D*, **144** (3-4), 358 (2000). DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00087-7
- [12] О.Е. Дик, А.Л. Глазов, *Neurocomputing*, **455**, 163 (2021). DOI: 10.1016/j.neucom.2021.05.038
- [13] K.H. Louie, J.P. Balakid, J.E. Bath, S. Song, H.F. Azgomi, J.H. Marks, J.T. Choi, P.A. Starr, D.D. Wang, *medRxiv* [Preprint], 2025.08.19.25333759 (2025). DOI: 10.1101/2025.08.19.25333759
- [14] A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 114101 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.114101
- [15] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (22), 4193 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193
- [16] S. Boccaletti, D.L. Valladares, *Phys. Rev. E*, **62** (5), 7497 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevE.62.7497
- [17] А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, **18** (1), 24 (2010). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-1-24-36

- [18] R. Suresh, D.V. Senthilkumar, M. Lakshmanan, J. Kurths, Phys. Rev. E, **86** (1), 016212 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016212
- [19] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Int. J. Bifurc. Chaos, **10** (10), 2291 (2000). DOI: 10.1142/S0218127400001481
- [20] A. Pikovsky, M. Rosenblum, G. Osipov, J. Kurths, Physica D, **104** (4), 219 (1997). DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00301-6
- [21] A. Runnova, M. Zhuravlev, R. Ukolov, I. Blokhina, A. Dubrovski, N. Lezhnev, E. Sitnikova, E. Saranceva, A. Kiselev, A. Karavaev, A. Selskii, O. Semyachkina-Glushkovskaya, T. Penzel, J. Kurths, Sci. Rep., **11** (1), 18505 (2021). DOI: 10.1038/s41598-021-97427-9
- [22] O.E. Rössler, Phys. Rev. A, **57** (5), 397 (1976). DOI: 10.1016/0375-9601(76)90101-8
- [23] S. Ahn, C. Park, L.L. Rubchinsky, Phys. Rev. E, **84** (1), 016201 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.016201
- [24] B. Torresani, *Continuous Wavelet Transform* (Savoire, Paris, 1995).
- [25] М.О. Журавлев, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, Письма в ЖТФ, **36** (10), 31 (2010). [М.О. Zhuravlev, M.K. Kurovskaya, O.I. Moskalenko, Tech. Phys. Lett., **36**, 457 (2010). DOI: 10.1134/S1063785010050202].
- [26] J.M. Bland, D.G. Altman, Lancet, **327** (8476), 307 (1986). DOI: 10.1016/S0140-6736(86)90837-8