

01

Некоторые свойства высокоразмерного хаоса на примере дискретной версии ансамбля осцилляторов ван дер Поля и хаотической системы Кислова—Дмитриева

© А.П. Кузнецов¹, Ю.В. Седова^{1,2}¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия² Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“, Нижний Новгород, Россия

E-mail: sedovayv@yandex.ru, kuzalexpr@yandex.ru

Поступило в Редакцию 12 мая 2026 г.

В окончательной редакции 23 мая 2026 г.

Принято к публикации 11 июня 2026 г.

Рассмотрена простая модель, демонстрирующая возможность и особенности высокоразмерного хаоса с несколькими нулевыми показателями Ляпунова. Проведен двухпараметрический анализ, который выявил точки бифуркаций коразмерности два, ассоциирующиеся с квазипериодичностью с разным числом несоизмеримых частот и хаосом с несколькими нулевыми показателями. Обнаружены универсальные структуры, известные как „креветки“, но на базе квазипериодических режимов, включая высокое число характерных частот.

Ключевые слова: показатели Ляпунова, хаос, квазипериодичность, бифуркации.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.18.63541.20766

Как известно, критерием хаоса в диссипативных динамических системах является наличие положительного показателя Ляпунова. Такой хаос возможен начиная с размерности фазового пространства, равной трем. Если размерность четыре и выше, могут наблюдаться разновидности хаоса, отличающиеся появлением дополнительных нулевых показателей. Коллекция таких систем разной физической природы постепенно пополняется: это климатическая модель с сезонным воздействием [1], связанные радиофизические генераторы [2], система двух идентичных сверхпроводящих квантовых интерференционных устройств (СКВИД) [3], джозефсоновский переход вида сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник [4], система трех взаимодействующих микропузырьков в жидкости [5], механическая система [6]. Соответствующие разновидности хаоса возможны также и в дискретных отображениях. Для них из спектра показателей Ляпунова один нулевой выпадает. Поэтому для отображений ситуация хаоса обсуждаемого типа возникает начиная уже с одного нулевого показателя Ляпунова. Такое поведение было обнаружено и исследовано для некоторых модельных отображений (см. работу [7] и ссылки в ней).

Представленные выше примеры относятся к случаю одного дополнительного нулевого показателя Ляпунова. Однако возможны ситуации и большего их числа, например, когда система с многочастотной квазипериодичностью взаимодействует с хаотической [8,9]. Физически это могут быть радиофизические генераторы с соответствующими колебательными режимами. При этом при вариации параметров возможны своеобразные бифуркации добавления нулевых показателей в хаосе.

Чтобы изучить данный феномен более детально, необходимо подобрать соответствующую простую и удобную модель. Здесь она будет сконструирована отчасти искусственно, поскольку основная цель — это демонстрация возможности искомых феноменов и бифуркаций. Еще один момент в мотивации — построенная система должна быть удобной для двухпараметрического анализа, что важно в теории бифуркаций [10]. В результате будут выявлены новые точки (точки коразмерности два), связанные с квазипериодичностью и данными типами хаоса. Мы будем опираться на систему с непрерывным временем [9], где использовалась связь набора генераторов (осцилляторов) ван дер Поля и генератора Кислова—Дмитриева. Последний представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного элемента [11]. Для упрощения мы, во-первых, уменьшим число осцилляторов ван дер Поля до трех. Во-вторых, построим дискретную версию системы, заменив производные по времени конечными разностями по схеме Эйлера. Такой прием сейчас популярен для построения моделей в популяционной биологии, динамике нейронов, эпидемий, генных сетей и др. (см. обсуждение и примеры ссылок в [12]). Отметим, что индивидуальный и два связанных дискретных осциллятора ван дер Поля обсуждались в [12], где, в частности, исследовано влияние величины параметра дискретизации на картину режимов. Показано, что используемое нами далее значение 0.1 дает хорошее согласие с потоком-прототипом.

Мы считаем осцилляторы ван дер Поля связанными каждый с каждым, а связь с генератором Кислова—Дмитриева осуществляется через третий осциллятор, как схематически показано на рис. 1, а. С уче-

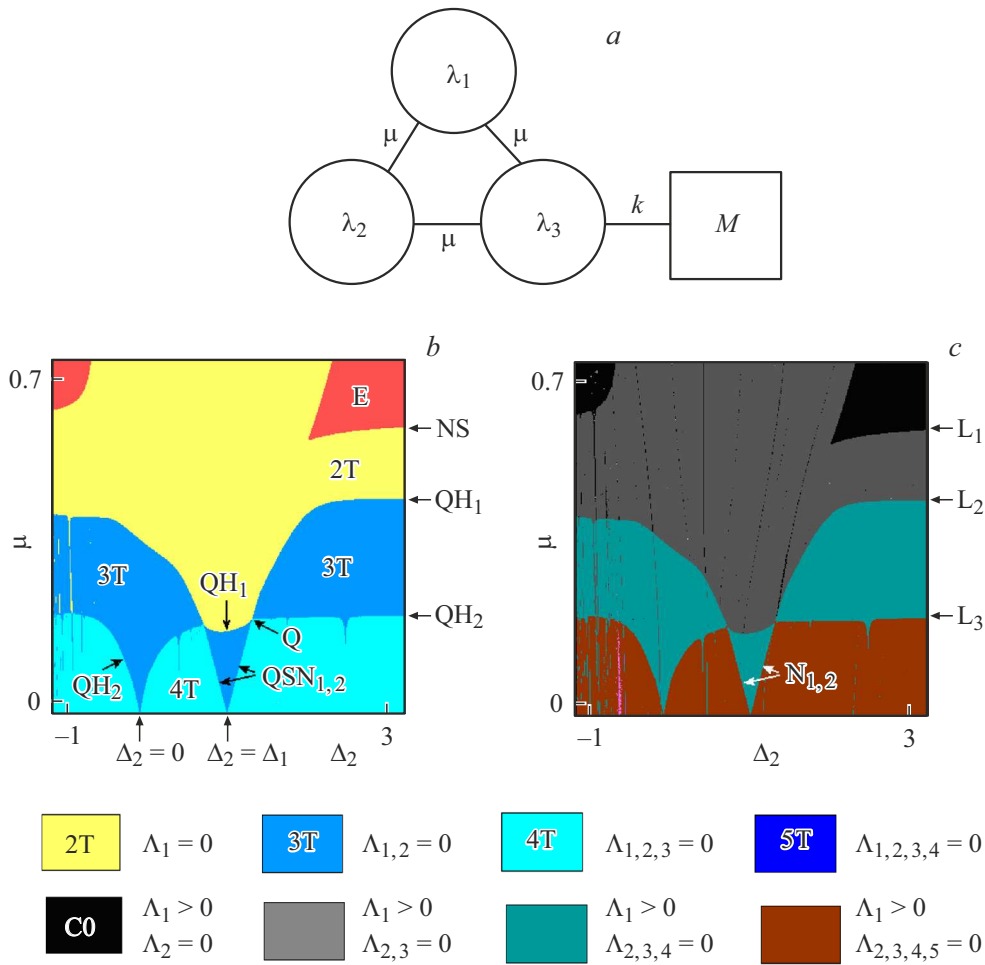


Рис. 1. *a* — схематическое изображение исследуемой системы. Окружностями показаны соответствующие осцилляторы ван дер Поля, квадратом — система Кислова–Дмитриева. *b* — карта показателей Ляпунова ансамбля дискретных осцилляторов ван дер Поля. NS — бифуркация Неймарка–Сакера, QH_{1,2} — квазипериодические бифуркации Хопфа, QSN_{1,2} — квазипериодические седло-узловые бифуркации, Q — квазипериодическая бифуркация коразмерности два. Параметры $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.4$, $\lambda_3 = 0.6$, $\Delta_1 = 1$, $\varepsilon = 0.1$. *c* — карта объединенной системы (1) для величины связи $k = 0.0035$ и параметров системы Кислова–Дмитриева $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$. L и N — бифуркации добавления нулевых показателей в хаосе. Цветной вариант рисунков представлен в электронной версии статьи.

том дискретизации по аналогии с [12] имеем

$$\begin{aligned}
 x_{i,n+1} &= x_{i,n} + \varepsilon y_{i,n+1}, \\
 y_{i,n+1} &= y_{i,n} + \varepsilon(\lambda_i - x_{i,n}^2)y_{i,n} - \varepsilon(1 + \Delta_{i-1})x_{i,n} \\
 &\quad - \varepsilon \frac{\mu}{2}(2y_{i,n} - y_{i+1,n} - y_{i-1,n}), \\
 x_{3,n+1} &= x_{3,n} + \varepsilon y_{3,n+1}, \\
 y_{3,n+1} &= y_{3,n} + \varepsilon(\lambda_3 - x_{3,n}^2)y_{3,n} - \varepsilon(1 + \Delta_2)x_{3,n} \\
 &\quad - \varepsilon \frac{\mu}{2}(2y_{3,n} - y_{1,n} - y_{2,n}) - \varepsilon k(y_{3,n} - y_n), \\
 x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\
 y_{n+1} &= y_n - \frac{\varepsilon}{Q}y_n - \varepsilon\omega_0^2x_n - \varepsilon k(y_n - y_{3,n}) + \varepsilon z_n, \\
 z_{n+1} &= z_n - \frac{\varepsilon}{T}z_n + \frac{\varepsilon}{T}Mx_n \exp(-x_n^2). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь $x_{i,n}$, $y_{i,n}$ — переменные осцилляторов ван дер Поля, i — номера осцилляторов, а n — номер итерации, $\lambda_{1,2,3}$ — параметры возбуждения осцилляторов, μ — величина их взаимной связи, $\Delta_{1,2}$ — частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого. Для системы Кислова–Дмитриева x_n , y_n , z_n — переменные, M — коэффициент усиления, T — время релаксации инерционного элемента, Q — параметр затухания RLC-фильтра, ω_0 — собственная частота. Параметр k — величина связи квазипериодической и хаотической подсистем. Величина ε — параметр дискретизации, который далее полагаем $\varepsilon = 0.1$.

Сначала обсудим динамику индивидуальных подсистем ($k = 0$). На рис. 1, *b* показана карта показателей Ляпунова Λ_m для трех дискретных осцилляторов ван дер Поля. Для вычисления показателей Ляпунова отображение итерруется совместно с комплектами уравнений в

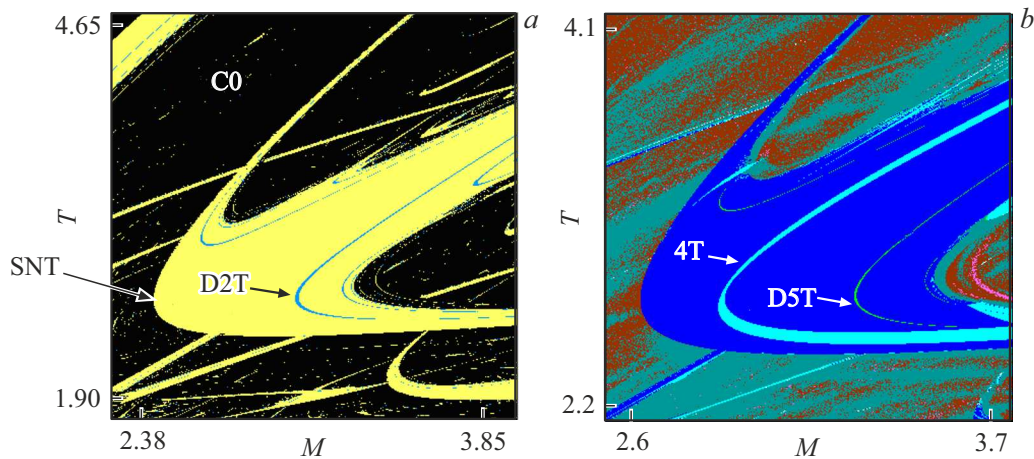


Рис. 2. *a* — карта показателей Ляпунова дискретной системы Кислова–Дмитриева. Параметры $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$. D2T — линия удвоения, SNT — линия седло-узловой бифуркации инвариантной кривой. *b* — аналогичная карта объединенной системы (1) для $\mu = 0.1$ и $k = 0.0035$, портрет пятичастотной квазипериодической криветки. D5T — линия удвоения пятичастотного тора, 4T — резонансное окно четырехчастотного тора.

вариациях, при этом по ходу вычислений производятся перенормировка и ортогонализация векторов возмущений по Граму–Шмидту [13]. Цвет на карте определяется типом режима, цветовая палитра указана внизу рисунка. При этом Е — состояние равновесия, 2Т — двухчастотный режим (аттрактор — инвариантная кривая), 3Т — трехчастотный режим, а 4Т — четырехчастотный режим (аттракторы — соответствующие торы). На карте можно видеть два характерных резонансных трехчастотных языка, острия которых $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_2 = \Delta_1$ отвечают совпадению частот первого–третьего и второго–третьего осцилляторов. Вдоль правого обреза карты наблюдаются последовательные бифуркации Неймарка–Сакера NS и квазипериодические бифуркации Хопфа $QH_{1,2}$ (тип бифуркаций определялся с помощью однопараметрического ляпуновского анализа по методике [14], что будет пояснено далее). Такая динамика обусловлена поэтапным выходом за порог возбуждения очередного осциллятора ван дер Поля при условии, что величина связи $\mu \approx \lambda_{1,2,3}$. Интересный момент состоит в возможности перехода от режима 3Т к 2Т внутри правого языка при возрастании связи μ через квазипериодическую бифуркацию Хопфа QH_1 . Это приводит к квазипериодическим бифуркациям коразмерности два Q , когда линия QH_1 внутри языка испытывает контакт с его границами.

Фрагмент карты на плоскости параметров дискретной системы Кислова–Дмитриева (M , T) приведен на рис. 2, *a*. Он демонстрирует интересную характерную бифуркационную структуру, известную как „креветка“ (shrimp). Такие периодические структуры обнаружены в огромном количестве систем различной природы. Особенность данной креветки в том, что она возникает на базе квазипериодического режима 2Т. Внутри креветки можно видеть линию бифуркации удвоения инвариантной кривой D2T, на которой в соответствии с [14] $\Lambda_{1,2} = 0$. Примеры квазипериодических креветок пока

единичны. Они обнаружены для механической системы с непрерывным временем [6], связанных радиофизических генераторов [2], дискретных версий климатической системы Лоренца-84 [7] и моделей популяционной биологии [15,16]. Интересно отметить, что креветка на рис. 2, *a* встроена в область хаоса обсуждаемого типа C0 с нулевым показателем Ляпунова. Таким образом, эти два феномена взаимосвязаны.

На рис. 1, *c* и 2, *b* приведены аналогичные карты, но уже для объединенной системы (1). В первом случае можно видеть структуры, по конфигурации аналогичные приведенным на рис. 1, *b*, но для хаоса с одним, двумя, тремя и четырьмя нулевыми показателями. При этом квазипериодические бифуркации Хопфа QH и седло-узел QSN превращаются в их аналоги бифуркаций хаоса L и N, связанных с изменением числа нулевых показателей, подобных наблюдавшимся при однопараметрическом анализе в потоках [8,9].

Рис. 2, *b* демонстрирует новый феномен — пятичастотную креветку. Оказывается, для многочастотной динамики креветка может иметь свою внутреннюю структуру. Так, внутри нее кроме линии удвоения пятичастотного тора D5T возникает дополнительное резонансное окно четырехчастотного тора 4Т, причем теперь креветку окружает хаос уже двух разновидностей: с тремя и четырьмя нулевыми показателями Ляпунова.

Мы рассмотрели пока случай малых значений величины связи подсистем k , чтобы продемонстрировать преобладание некоторых черт объединенной системы по отношению к устройству пространства параметров индивидуальных подсистем. На рис. 3 показаны графики показателей Ляпунова Λ_m в зависимости от величины связи k для $\mu = 0.1$. На этих графиках в областях четырехчастотных торов 4Т $\Lambda_{1,2,3} = 0$, а в областях пятичастотных 5Т — $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. Такие графики в соответствии с методикой [14] в данной работе исполь-

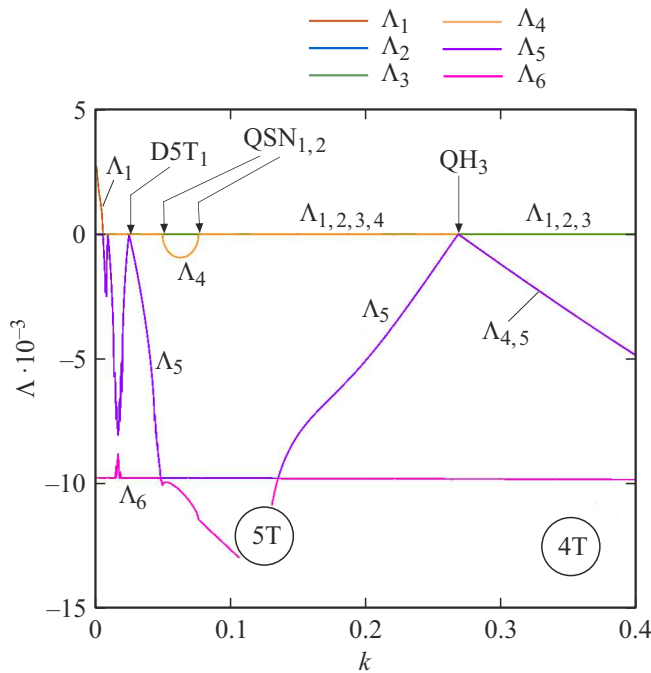


Рис. 3. Графики показателей Ляпунова системы (1) в зависимости от параметра связи k для $\mu = 0.1$.

зовались для идентификации типа квазипериодических бифуркаций. Так, признаком квазипериодической бифуркации Хопфа QH_3 мягкого рождения пятичастотного тора из четырехчастотного является равенство до ее порога показателей $\Lambda_4 = \Lambda_5$. После точки бифуркации они расходятся, причем Λ_4 становится нулевым. Седло-узловым бифуркациям $QSN_{1,2}$, ограничивающим область резонансного четырехчастотного тора, отвечает характерный „провал“ показателя Λ_4 в отрицательную область. В точке удвоения пятичастотного тора $D5T_1$ показатель Λ_5 обращается в нуль, оставаясь в целом отрицательным в ее окрестности.

Представим теперь двухпараметрический анализ плоскости параметров связи (k, μ) (рис. 4). В правой части рис. 4 при уменьшении связи осцилляторов ван дер Поля μ наблюдается чередование квазипериодических областей с последовательным увеличением числа несоизмеримых частот (от двух до пяти). Границами этих областей являются линии квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3}$. Таким образом, за счет связи хаос во второй подсистеме подавлен, и картина режимов оказывается аналогичной правой части рис. 1, б, но с увеличением на единицу числа наблюдаемых несоизмеримых частот за счет колебательного режима системы Кислова—Дмитриева.

Еще один характерный момент состоит в том, что в области 4Т и 5Т встроен резонансный язык, расширяющийся с уменьшением величины связи μ . В пятичастотной области его границами являются седло-узловые бифуркации торов $QSN_{1,2}$. С ростом μ резонансный язык сужается и переходит в четырехчастотную

область. В этой области его границами являются седло-узловые бифуркации уже трехчастотных торов. Соответственно, возникают точки коразмерности два (обозначены на рисунке как $R_{1,2}$). В этих точках меняется размерность торов, участвующих в седло-узловой бифуркации, а линии седло-узловых бифуркаций пересекаются с линией квазипериодической бифуркации Хопфа, причем последняя меняет тип с QH_3 на QH_2 . В малой окрестности точек $R_{1,2}$ наблюдается по одной трех- и пятичастотной области и две трехчастотные.

Внутри квазипериодических областей на рис. 4 просматриваются также линии удвоения торов. В нижней части рисунка, в пятичастотной области, такие линии отвечают удвоениям пятичастотного тора $D5T_{1,2}$. Видно, что при увеличении параметра μ линия $D5T_1$ переходит в четырехчастотную область, превращаясь в линию удвоения четырехчастотного тора $D4T_1$, и т.д. до линии удвоения инвариантной кривой $D2T_1$.

Соответственно, на плоскости параметров рис. 4 располагаются точки коразмерности два $D_{1,2,3}$. Они лежат на пересечении линий удвоения торов и квазипериодических бифуркаций Хопфа. В этих точках на линии удвоения тора меняется его размерность. Имеется система таких точек: на рисунке стрелками отмечены точки $D_{1,2,3}$. При этом за счет вырождения в точке D_1 равны нулю три показателя Ляпунова $\Lambda_{1,2,3} = 0$, в точке D_2 — четыре, а в точке D_3 — пять. Отметим, что линия $D4T_1$ пересекает также трехчастотный резонансный язык, что отвечает еще паре точек коразмерности два.

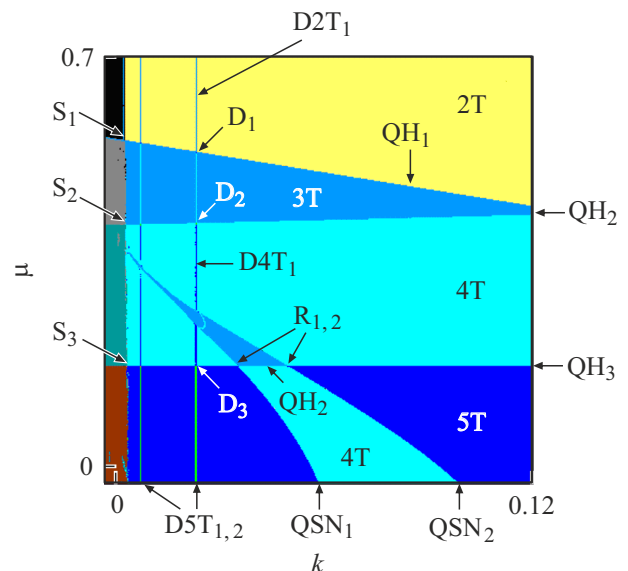


Рис. 4. Карта показателей Ляпунова системы (1) на плоскости параметров связи. Остальные параметры аналогичны приведенным для рис. 1. QH — линии квазипериодических бифуркаций Хопфа, QSN — линии седло-узловых бифуркаций четырехчастотного тора, $D5T$ и $D4T$ — линии удвоений пяти- и четырехчастотных торов, R и D — точки квазипериодических бифуркаций коразмерности два, S — точки коразмерности два квазипериодичность—хаос.

Еще один тип точек коразмерности два $S_{1,2,3}$ отвечает концевым точкам линий квазипериодической бифуркации Хопфа, заканчивающихся переходом к хаосу. В малой окрестности точки такого типа реализуются квазипериодические режимы с N и $(N + 1)$ числом несоизмеримых частот и хаос с $(N - 1)$ и N нулевыми показателями Ляпунова. На рис. 4 стрелками отмечены три такие точки $S_{1,2,3}$, отвечающие $N = 2, 3$ и 4 . Отметим, что левее точек S располагаются линии бифуркаций типа L [9], отвечающие последовательному добавлению нулевых показателей в хаосе.

Таким образом, введена простая модель, которая демонстрирует особенности и свойства высокоразмерного хаоса с несколькими нулевыми показателями Ляпунова. При двухпараметрическом анализе обнаружено несколько новых ситуаций коразмерности два, связанных с квазипериодичностью с разным числом несоизмеримых частот, а также с хаосом с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова. Отметим, что тонкое устройство окрестностей этих точек может оказаться более сложным, что может служить предметом последующих исследований. Результаты работы могут быть использованы в разных областях, примеры которых были приведены во вводной части.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 25-21-00903).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] H. Broer, C. Simó, R. Vitolo, *Nonlinearity*, **15** (4), 1205 (2002). DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312
- [2] N.V. Stankevich, N.A. Shchegoleva, I.R. Sataev, A.P. Kuznetsov, *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, **15** (11), 111001 (2020). DOI: 10.1115/1.4048025
- [3] J. Shena, N. Lazarides, J. Hizanidis, *Chaos*, **30** (12), 123127 (2020). DOI: 10.1063/5.0018362
- [4] A.E. Botha, Yu.M. Shukrinov, J. Tekić, M.R. Kolahchi, *Phys. Rev. E*, **107** (2), 024205 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevE.107.024205
- [5] I. Garashchuk, A. Kazakov, D. Sinelshchikov, *Chaos Solit. Fract.*, **182**, 114785 (2024). DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785
- [6] S.L.T. de Souza, A.M. Batista, R.O. Medrano-T, I.L. Caldas, *Chaos*, **34** (12), 123146 (2024). DOI: 10.1063/5.0234904
- [7] A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, N.V. Stankevich, L.V. Turukina, *Chaos*, **35** (6), 062101 (2025). DOI: 10.1063/5.0273932
- [8] A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina, *Physica D*, **470**, 134425 (2024). DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425
- [9] А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, **33** (6), 785 (2025). DOI: 10.18500/0869-6632-003172
- [10] Yu.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory* (Springer, 2023). DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4
- [11] А.С. Дмитриев, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, **32** (4), 423 (2024). DOI: 10.18500/0869-6632-003119
- [12] A.P. Kuznetsov, Y.V. Sedova, *Nonlinear Dyn.*, **114** (8), 601 (2026). DOI: 10.1007/s11071-026-12475-y
- [13] С.П. Кузнецов, *Динамический хаос* (Физматлит, 2006).
- [14] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó, *Regul. Chaot. Dyn.*, **16**, 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
- [15] N.C. Pati, *Chaos*, **34** (8), 083126 (2024). DOI: 10.1063/5.0208457
- [16] N.C. Pati, P. Datta, B. Ghosh, *Chaos*, **35** (2), 023101 (2025). DOI: 10.1063/5.0233509