

05,10

Нутационный резонанс в ферримагнетике во внешнем магнитном поле

© Н.В. Чукашев¹, А.С. Титов¹, С.В. Титов²

¹ Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Россия

² Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Фрязино, Россия

E-mail: chukashev.nv@phystech.edu

Поступила в Редакцию 8 апреля 2026 г.

В окончательной редакции 7 мая 2026 г.

Принята к публикации 7 мая 2026 г.

Для ферримагнетика с двумя подрешетками представлено исследование нутационных резонансов, обусловленных инерционностью намагниченностей подрешеток. Рассмотрены три различных состояния ферримагнетика, определяемые величиной внешнего магнитного поля и соответствующие антипараллельному, неколлинеарному и сонаправленному расположению устойчивых ориентаций намагниченностей подрешеток. Из линеаризованной системы инерционных уравнений Ландау–Лифшица–Гильберта связанных через обменное взаимодействие намагниченностей подрешеток выведены характеристические уравнения для изотропного ферримагнетика. На основе полученных аналитических решений характеристических уравнений проведен анализ влияния внешнего поля на прецессионные и нутационные частоты ферримагнетика в инерционном режиме для всех трех возможных состояний.

Ключевые слова: антиферромагнетик, ферромагнетик, уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта, инерционность намагниченности, крайне высокие частоты, терагерцовые частоты.

DOI: 10.61011/FTT.2026.05.63446.9408

1. Введение

Исследование ферримагнетиков представляет собой одно из востребованных направлений спинтроники в связи с их значимой ролью в различных областях науки и техники, таких как биомедицинские приложения, длительное хранение информации, магноники и др. [1,2]. Магнитное состояние ферримагнетиков во внешнем магнитном поле определяется взаимной ориентацией намагниченностей их подрешеток, которая, в свою очередь, зависит от напряженности этого поля [3,4]. Согласно современным представлениям, индуцированные полем изменения состояния ферримагнетика соответствуют фазовым переходам. Очевидно, что такие изменения состояний сопровождаются изменением ряда магнитных свойств и характеристик ферримагнетиков (магнитная восприимчивость, зависимость намагниченности от температуры, магнитострикция, собственные частоты колебаний намагниченности, магнитосопротивление и т.д.) [4]. Типичным примером переходов, индуцированных полем, являются спин-флоп-переходы, в которых одно состояние с энергетически выгодным антипараллельным направлением намагниченностей подрешеток переходит в другое энергетически выгодное состояние с их наклонным неколлинеарным расположением (т.н. опрокидывание). В достаточно сильных полях предпочтительная неколлинеарная ориентация намагниченно-

стей переходит в предпочтительную сонаправленную ориентацию.

Развитие терагерцовых (ТГц) технологий [5] и разработка быстродействующей памяти на основе спиновых систем [6,7], в частности, требуют изучения динамики намагниченности ферримагнетиков на ультракоротких временных интервалах, на которых необходимо учитывать инерционность намагниченности [8,9]. Инерционность намагниченности обуславливает более сложную магнитодинамику спиновой системы [10–14]. Помимо обычной прецессии вектора намагниченности вокруг эффективного поля, в инерционном режиме необходимо учитывать высокочастотные нутационные движения этого вектора. Нутационное движение вызвано периодической конверсией части потенциальной энергии вектора намагниченности, которой он обладает в результирующем поле, в его кинетическую энергию и обратно, причем эта часть очень мала в силу малой инерционности. Однако этого достаточно для проявления в ТГц-части спектра восприимчивости магнитного материала такого эффекта, как нутационный резонанс (НР). И хотя роль инерционных эффектов в магнитодинамике таких спиновых систем, как ферромагнетики (ФМ) [14–16] и антиферромагнетики (АФМ) [17–20] активно теоретически исследовалась на протяжении последних десяти лет, лишь совсем недавно были представлены убедительные экспериментальные данные по НР на ТГц-частотах для ФМ-пленок NiFe, CoFeB [21] и Co [22],

а также возбуждались ТГц-колебания в пленке $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ (пермаллой) [23]. Однако теоретического исследования НР в ферримагнетиках до этого не проводилось.

Ферримагнитные материалы, как и антиферромагнитные, как правило, состоят из нескольких подрешеток, каждая из которых имеет свою намагниченность. Вследствие существенного различия абсолютных величин намагниченностей подрешеток ферримагнетики обладают значительным спонтанным магнитным моментом [3], что отличает их от антиферромагнетиков. В силу этого магнитодинамика ферримагнетиков оказывается более сложной, чем магнитодинамика антиферромагнетиков [4]. В настоящей работе для простоты мы ограничиваемся рассмотрением двухподрешеточного ферримагнетика [24] с настолько слабой магнитной анизотропией, что ею можно пренебречь [4]. Кроме того, при произвольных значениях магнитной анизотропии допускается пренебрежение ей в приближении сильного внешнего магнитного поля [3]. Основное внимание в работе уделено исследованию крайне высокочастотных резонансов, а также частот этих резонансов в различных состояниях ферримагнетиков, определяемых внешним магнитным полем. Анализируется влияние времени инерционной релаксации на частоту прецессии намагниченности в различных состояниях ферримагнетика. Исследуется зависимость частот НР от напряженности внешнего поля.

Для исследования собственных колебаний спиновой системы мы используем общий метод теоретической механики по изучению малых колебаний координат сложных систем, который ранее успешно применялся для нахождения собственных частот колебаний намагниченностей ФМ [15,25] и АФМ [19,26]. Соответствующее обобщение данного метода позволяет решить задачу о собственных магнитных колебаниях в ферримагнитных структурах в инерционном режиме. При решении этой задачи предполагается, что намагниченности подрешеток совершают малые колебания вокруг метастабильных состояний, соответствующих минимумам потенциальной энергии системы. В инерционном режиме вводится дополнительное допущение о том, что незначительные изменения потенциальной энергии вследствие нутаций не влияют на основные положения минимумов. Эти допущения позволяют перейти от векторных инерционных уравнений Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) к скалярным уравнениям для компонент векторов намагниченностей в сферических координатах и затем линеаризовать результирующие уравнения по малым параметрам, характеризующим отклонения намагниченностей от их метастабильных состояний. Такой подход дает возможность получить аналитические выражения для частот прецессии (теперь скорректированные инерционностью намагниченности) и частот нутаций (которые, в свою очередь, определяют частоты НР) в различных состояниях ферримагнетика, определяемых значениями напряженности внешнего поля [5].

2. Характеристическое уравнение для двухподрешеточного ферримагнетика в инерционном режиме

Инерционная динамика намагниченностей подрешеток ферримагнетика, связанных обменным взаимодействием, может быть описана системой связанных уравнений ЛЛГ, дополненных инерционными членами [10–14]. Инерционный член включает производную по времени второго порядка от намагниченности и позволяет корректно описывать динамику намагниченности на ультракоротких временных интервалах. Теоретическое обоснование наличия дополнительных членов в уравнении ЛЛГ, основанное на микроскопических квантоворелятивистских теориях, можно найти в работах [27–30]. Здесь мы фокусируемся на непосредственном решении уравнений ЛЛГ с учетом инерционности намагниченности для случая изотропного ферримагнетика с двумя связанными подрешетками. Инерционное уравнение ЛЛГ для вектора намагниченности i -й подрешетки имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \gamma_i [\mathbf{H}_i^{\text{eff}} \times \mathbf{M}_i] + \frac{\alpha_i}{M_i} [\mathbf{M}_i \times \dot{\mathbf{M}}_i] + \frac{\tau_i}{M_i} [\mathbf{M}_i \times \ddot{\mathbf{M}}_i], \quad (1)$$

где $M_i = |\mathbf{M}_i|$ — величина намагниченности (не меняется при движении), γ_i — гиромагнитное отношение, α_i — безразмерный параметр диссипации, а τ_i — время инерционной релаксации i -й подрешетки. Индекс i в двухподрешеточном ферримагнетике принимает значения 1 и 2.

Входящее в уравнение (1) эффективное магнитное поле $\mathbf{H}_i^{\text{eff}}$ подрешетки определяется через функцию магнитной энергии материала $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ как

$$\mathbf{H}_i^{\text{eff}} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_i}, \quad (2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$ — магнитная постоянная в международной системе единиц СИ. Функция $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ имеет несколько локальных минимумов, положение которых зависит от напряженности внешнего магнитного поля. С изменением напряженности внешнего поля меняются положения минимумов, что позволяет выделить несколько различных состояний ферримагнетика.

Решение связанных уравнений является основой теории магнитных колебаний в сложных спиновых системах. Для нахождения решения векторные уравнения преобразуются в скалярные уравнения для компонент векторов (абсолютные значения векторов не меняются). Далее мы используем приближение тождественных параметров подрешеток ферримагнетика, а именно $\gamma = \gamma_i$, $\tau = \tau_i$ и $\alpha = \alpha_i$. С учетом этого уравнения (1) в сферической системе координат соответствуют скалярной

системе уравнений:

$$\tau \ddot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}_i \sin \vartheta_i - \tau \dot{\varphi}_i^2 \cos \vartheta_i \cdot \sin \vartheta_i + \gamma \kappa^{3-2i} \partial_{\vartheta_i} \bar{V} + \alpha \dot{\vartheta}_i = 0, \quad (3)$$

$$\tau \ddot{\varphi}_i \sin \vartheta_i + \dot{\vartheta}_i + 2\tau \dot{\vartheta}_i \dot{\varphi}_i \cos \vartheta_i + \gamma \kappa^{3-2i} \sin^{-1} \vartheta_i \partial_{\varphi_i} \bar{V} + \alpha \dot{\varphi}_i \sin \vartheta_i = 0, \quad (4)$$

где $\bar{V} = V/(\mu_0 \sqrt{M_1 M_2})$ — нормированная функция магнитной энергии и $\kappa = \sqrt{M_2/M_1}$ — параметр, определяющий степень различия намагниченностей подрешеток.

Для нахождения собственных частот ферримагнетика рассмотрим случай малых отклонений векторов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ от метастабильных направлений $\mathbf{M}_1^{(0)}(\vartheta_1^{\min}, \varphi_1^{\min})$ и $\mathbf{M}_2^{(0)}(\vartheta_2^{\min}, \varphi_2^{\min})$, соответствующих минимумам магнитной энергии V . В этом случае в динамическом процессе координаты этих векторов совершают малые колебания около угловых координат $\vartheta_i^{\min}$ и $\varphi_i^{\min}$, а именно $\vartheta_i(t) = \vartheta_i^{\min} + \Delta\vartheta_i(t)$ и $\varphi_i(t) = \varphi_i^{\min} + \Delta\varphi_i(t)$. Подставив эти выражения в уравнения и отбросив члены, нелинейные по $\Delta\vartheta_i$ и $\Delta\varphi_i$, мы получаем систему из восьми линейных дифференциальных уравнений для восьми переменных $\Delta\vartheta_i, \Delta\varphi_i, \omega_{\vartheta_i}$ и ω_{φ_i} ($i = 1, 2$), а именно,

$$\Delta\dot{\vartheta}_i = \omega_{\vartheta_i}, \quad \Delta\dot{\varphi}_i = \omega_{\varphi_i}, \quad (5)$$

$$\dot{\omega}_{\vartheta_i} = \frac{\omega_{\varphi_i}}{\tau} \sin \vartheta_i - \frac{\alpha}{\tau} \omega_{\vartheta_i} - \frac{\gamma \kappa^{3-2i}}{\tau} \sum_{j=1,2} (\bar{V}_{\vartheta_i \vartheta_j} \Delta\vartheta_j + \bar{V}_{\vartheta_i \varphi_j} \Delta\varphi_j), \quad (6)$$

$$\dot{\omega}_{\varphi_i} = \frac{\omega_{\vartheta_i}}{\tau \cdot \sin \vartheta_i} - \frac{\alpha}{\tau} \omega_{\varphi_i} - \frac{\gamma \kappa^{3-2i}}{\tau \cdot \sin^2 \vartheta_i} \sum_{j=1,2} (\bar{V}_{\varphi_i \vartheta_j} \Delta\vartheta_j + \bar{V}_{\varphi_i \varphi_j} \Delta\varphi_j), \quad (7)$$

При выводе уравнений и использовались линейные аппроксимации

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \vartheta_i} \approx \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \Big|_{\vartheta_{\min}} \Delta\vartheta_j + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \vartheta_i \partial \varphi_j} \Big|_{\vartheta_{\min}} \Delta\varphi_j \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi_i} \approx \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \varphi_i \partial \vartheta_j} \Big|_{\vartheta_{\min}} \Delta\vartheta_j + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\vartheta_{\min}} \Delta\varphi_j \right), \quad (9)$$

в которых все производные от $\bar{V}$ по координатам вычисляются в точке ее минимума $\vartheta_{\min} = \{\vartheta_1^{\min}, \varphi_1^{\min}, \vartheta_2^{\min}, \varphi_2^{\min}\}$, что гарантирует равенство всех первых производных нулю, т. е. $\partial_{\vartheta_i} \bar{V}|_{\vartheta_{\min}} = \partial_{\varphi_i} \bar{V}|_{\vartheta_{\min}} = 0$.

Систему линейных дифференциальных уравнений (5)–(7) удобно представить в виде матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{C}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{C}(t) = 0, \quad (10)$$

где вектор $\mathbf{C}(t)$ состоит из восьми переменных,

$$\mathbf{C}(t) = (\Delta\vartheta_1(t), \Delta\varphi_1(t), \Delta\vartheta_2(t), \Delta\varphi_2(t), \omega_{\vartheta_1}(t), \omega_{\varphi_1}(t), \omega_{\vartheta_2}(t), \omega_{\varphi_2}(t))^T,$$

а символ „ T “ означает транспонирование строки в столбец. Системная матрица $\mathbf{A}$ включает четыре подматрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{I}$ — нулевая и единичная подматрицы соответственно. Подматрица $\mathbf{B}$ определяется вторыми производными от функции $V(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$:

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{\tau} \begin{pmatrix} \frac{\kappa \bar{V}_{\vartheta_1 \vartheta_1}}{\sin^2 \vartheta_1} & \frac{\kappa \bar{V}_{\varphi_1 \varphi_1}}{\sin^2 \vartheta_1} & \frac{\kappa \bar{V}_{\vartheta_1 \vartheta_2}}{\sin^2 \vartheta_1} & \frac{\kappa \bar{V}_{\vartheta_1 \varphi_2}}{\sin^2 \vartheta_1} \\ \kappa^{-1} \bar{V}_{\vartheta_2 \vartheta_1} & \kappa^{-1} \bar{V}_{\vartheta_2 \varphi_1} & \kappa^{-1} \bar{V}_{\vartheta_2 \vartheta_2} & \kappa^{-1} \bar{V}_{\vartheta_2 \varphi_2} \\ \frac{\bar{V}_{\varphi_2 \vartheta_1}}{\kappa \cdot \sin^2 \vartheta_2} & \frac{\kappa \bar{V}_{\varphi_2 \varphi_1}}{\kappa \cdot \sin^2 \vartheta_1} & \frac{\bar{V}_{\varphi_2 \vartheta_2}}{\kappa \cdot \sin^2 \vartheta_2} & \frac{\bar{V}_{\varphi_2 \varphi_2}}{\kappa \cdot \sin^2 \vartheta_2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

тогда как матрица $\mathbf{D}$ задается как

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \alpha & -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \\ (\sin \vartheta_1)^{-1} & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\sin \vartheta_2 \\ 0 & 0 & (\sin \vartheta_2)^{-1} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В общем виде решение системы уравнений (10) дается равенством [31]

$$\mathbf{C}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}(0) = \mathbf{U} e^{-\lambda t} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{C}(0), \quad (15)$$

где λ — диагональная матрица, составленная из собственных значений $\{\lambda_k\}$ системной матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{U}$ — правосторонняя матрица, составленная из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Собственные значения системы $\lambda_k = -i\omega_k = -i(\omega'_k + i\omega''_k)$, определяющие частоты собственных колебаний ω'_k и их скорость затухания ω''_k , находятся из решения характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (16)$$

Следует заметить, что в антиферромагнитном пределе $\kappa \rightarrow 1$, в котором достигается полная компенсация намагниченностей подрешеток в условиях отсутствия внешнего поля, уравнения (5)–(7) и (16) формально сводятся к уравнениям работы [26], где исследовались собственные частоты антиферромагнетика в инерционном режиме. Однако в случае ферримагнетиков асимметрия намагниченностей и, как следствие, несимметричное расположение минимумов в неколлинеарном состоянии ферримагнетика делает решение уравнения (16) гораздо более сложным.

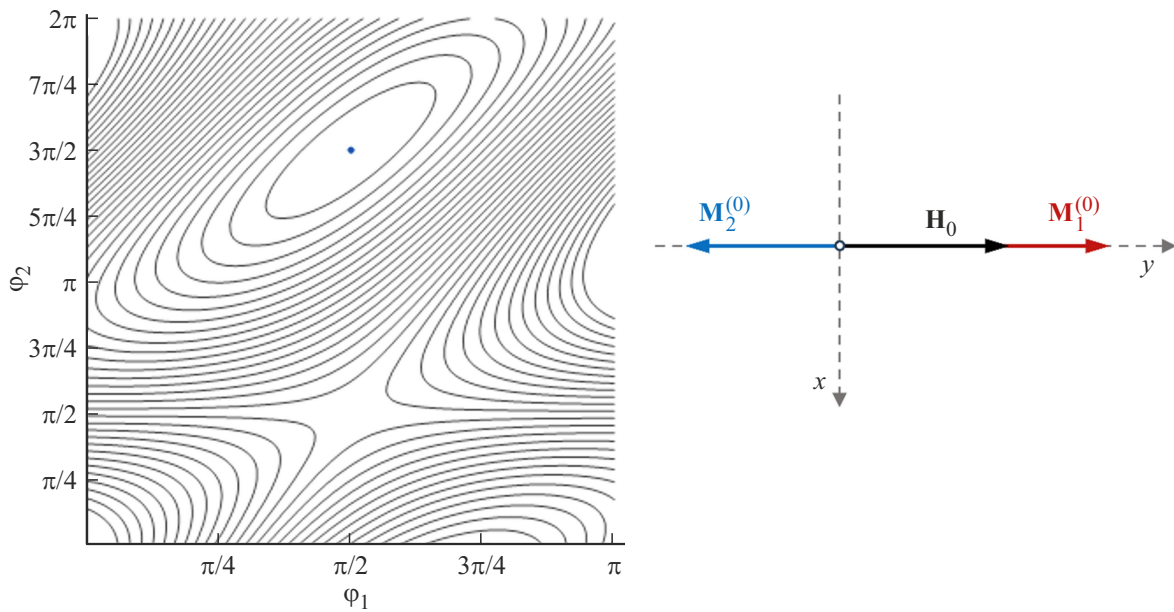


Рис. 1. Карта эквипотенциалей функции $\bar{V}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при напряженности внешнего поля $0 \leq H_0 \leq H_1$ (слева), соответствующей антипараллельной ориентации устойчивых положений намагниченностей подрешеток (схема справа). Точка на карте соответствует положению минимума функции $\bar{V}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при значениях углов $\varphi_1^{\min} = \pi/2$ и $\varphi_2^{\min} = 3\pi/2$.

3. Собственные частоты ферритмагнетика в инерционном режиме

Для решения уравнения необходимо конкретизировать вид функции магнитной энергии $\bar{V}$. В общем случае магнитная энергия $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ изотропного ферритмагнетика во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ складывается из обменной энергии и энергии Зеемана. Поскольку эффективные поля обменных взаимодействий внутри подрешеток не входят в уравнения движения, мы учитываем энергию обменного взаимодействия только между подрешетками. Тогда функция магнитной энергии $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ будет равна [3]

$$V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \frac{\Lambda}{M_1 M_2} \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 - \sum_{i=1,2} \mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M}_i, \quad (17)$$

где Λ — параметр обменного взаимодействия между подрешетками.

Положения минимумов $\vartheta_i^{\min}$ и $\varphi_i^{\min}$ функции $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = V(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$ (или ориентации устойчивых положений намагниченностей подрешеток $\mathbf{M}_1^{(0)}$ и $\mathbf{M}_2^{(0)}$, соответствующих координатам минимумов) меняются в зависимости от напряженности поля $\mathbf{H}_0$. Общая процедура нахождения $\vartheta_i^{\min}$ и $\varphi_i^{\min}$ и переход между состояниями с изменением внешнего поля $\mathbf{H}_0$ описаны в [3], где рассмотрена безынерционная динамика намагниченности. Из симметрии задачи следует, что устойчивые направления намагниченностей $\mathbf{M}_1^{(0)}$, $\mathbf{M}_2^{(0)}$ и поле $\mathbf{H}_0$ лежат в одной плоскости. Пусть это будет

плоскость XY лабораторной системы координат, а поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси Y . В соответствии с уравнением (17) нормированная функция магнитной энергии $\bar{V}$ в сферической системе координат для данной геометрии задачи имеет вид

$$\gamma \bar{V}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{i=1,2} \kappa^{2i-3} \omega_0 \sin \vartheta_i \sin \varphi_i + \omega_\Lambda (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2), \quad (18)$$

где $\omega_\Lambda = \gamma H_\Lambda$ и $H_\Lambda = \Lambda / (\mu_0 \sqrt{M_1 M_2})$ — поле, обусловленное обменным взаимодействием, а $\omega_0 = \gamma H_0$ — ларморовская частота прецессии во внешнем магнитном поле. Следуя работе [3] и решая систему уравнений $\partial_{\vartheta_i} \bar{V}^i|_{\theta_{\min}} = \partial_{\varphi_i} \bar{V}^i|_{\theta_{\min}} = 0$ при $\vartheta_1^{\min} = \vartheta_2^{\min} = \pi/2$, соответствующим плоскости XY , находим, что возможны три различных состояния.

Состояние А. Антипараллельное направление векторов $\mathbf{M}_1^{(0)}$ и $\mathbf{M}_2^{(0)}$

Для значений напряженности поля $H_0 \leq H_1$, где $H_1 = \omega_\Lambda (\kappa^{-1} - \kappa) / \gamma$, положения минимумов в плоскости XY задаются углами (рис. 1)

$$\varphi_1^{\min} = \pi/2, \quad \varphi_2^{\min} = 3\pi/2. \quad (19)$$

Подставляя $\vartheta_{1,2}^{\min} = \pi/2$ и $\varphi_i^{\min}$ из уравнения (19) в уравнение (16), получаем уравнения для собственных

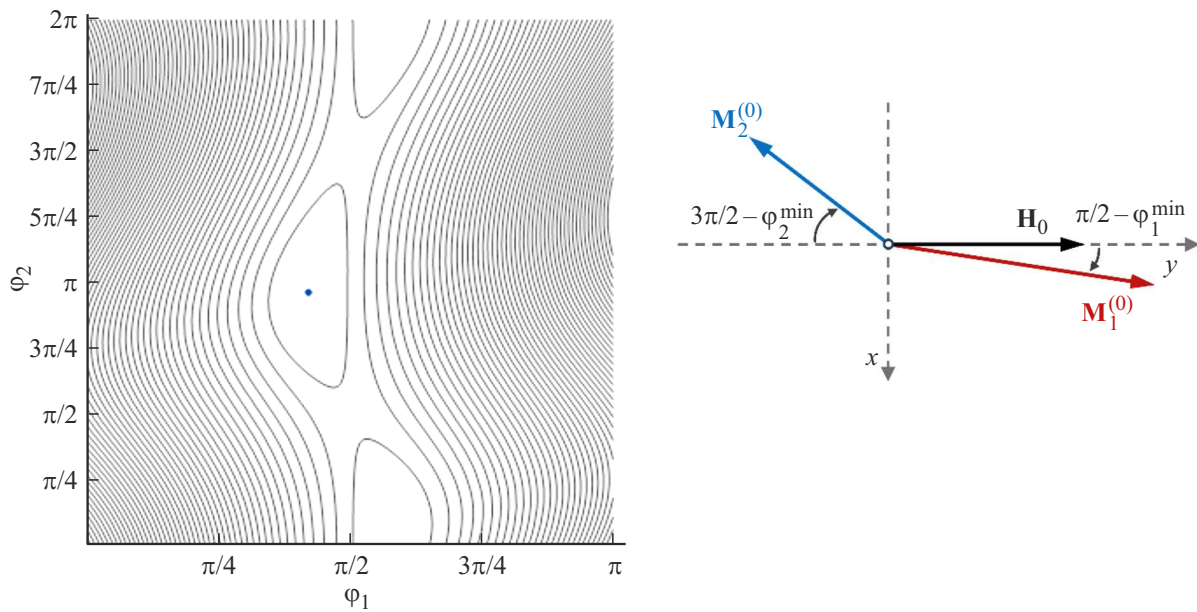


Рис. 2. Карта эквипотенциалов функции $\bar{V}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при величине внешнего поля $H_1 \leq H_0 \leq H_2$ (слева), соответствующей неколлинеарной ориентации устойчивых положений намагниченностей подрешеток (схема справа). Точка на карте соответствует положению минимума функции $\bar{V}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при значениях углов $\varphi_1^{\min}$ и $\varphi_2^{\min}$, заданных уравнениями (23) и (24).

частот ферримагнетика в состоянии **A**:

$$\omega^2(\tau\omega - i\alpha)^2 - (\omega_0 \pm \omega)^2$$

$$- [(\kappa + \kappa^{-1})\omega(\tau\omega - i\alpha) + (\kappa - \kappa^{-1})(\omega_0 \pm \omega)]\omega_\Lambda = 0. \quad (20)$$

Каждое из уравнений (20) является уравнением четвертой степени и имеет аналитические решения, которые могут быть найдены, например, с использованием метода Феррари [32]. Общий вид этих решений достаточно сложный. Однако, учитывая, что параметр τ существенно мал, а параметр α вносит основной вклад в комплексную часть решения, ответственную за уширение резонансных линий, можно получить простые аналитические выражения для разложений положительных решений по параметру τ в бездиссипативном случае ($\alpha = 0$), а именно,

$$\omega_{\pm}^{(p)} \approx \pm \omega_0 + \omega_\Lambda(\kappa^{\pm 1} - \kappa)$$

$$- \tau(\omega_0 - \omega_\Lambda(\kappa^{\pm 1} - \kappa))^2 \cdot \frac{1 + \kappa^2}{1 - \kappa^2}, \quad (21)$$

$$\omega_{\pm}^{(n)} \approx \frac{1}{\tau} \pm \omega_0 + \omega_\Lambda \kappa^{\pm 1}. \quad (22)$$

Состояние В. Неколлинеарное направление векторов $\mathbf{M}_1^{(0)}$ и $\mathbf{M}_2^{(0)}$

Для значений напряженности поля, лежащих в диапазоне $H_1 \leq H_0 \leq H_2$, где $H_2 = \omega_\Lambda(\kappa^{-1} + \kappa)/\gamma$, положения минимумов определяются из равенств (рис. 2)

$$\sin \varphi_1^{\min} = \frac{\kappa\omega_0}{2\omega_\Lambda} + \frac{\omega_\Lambda}{2\kappa\omega_0} (1 - \kappa^4), \quad (23)$$

$$\sin \varphi_2^{\min} = \frac{\omega_0}{2\kappa\omega_\Lambda} + \frac{\kappa\omega_\Lambda}{2\omega_0} (1 - \kappa^{-4}). \quad (24)$$

Подстановка $\varphi_{1,2}^{\min} = \pi/2$ и $\varphi_i^{\min}$ из уравнений (23) и (24) в уравнение (16) позволяет получить уравнение восьмой степени для собственных частот ферримагнетика в состоянии В. Поскольку аналитическое решение уравнения с высокой степенью находить не всегда представляется возможным, рассмотрим результирующее уравнение в бездиссипативном случае ($\alpha = 0$) после исключения тривиальных решений ($\omega = 0$), а именно

$$4\tau^6\omega^6\omega_\Lambda^2\kappa^5 - 8\tau^4\omega^4\omega_\Lambda^2\kappa^5(1 + \tau\omega_\Lambda(\kappa^{-1} + \kappa)) + \tau^2\omega^2a_1 + a_0 = 0, \quad (25)$$

где

$$a_1 = 4\omega_\Lambda^2\kappa^5 + 8\omega_\Lambda^3\kappa^4(1 + \kappa^2)\tau - \omega_0^4\kappa^5\tau^2 + 2\omega_0^2\omega_\Lambda^2\kappa^3(1 + \kappa^4)\tau^2 - \omega_\Lambda^4\kappa(1 + \kappa^2)^2(1 - 6\kappa^2 + \kappa^4)\tau^2, \quad (26)$$

$$a_0 = -4\omega_0^2\omega_\Lambda^2\kappa^5\tau^2 - 2\omega_0^2\omega_\Lambda^3\kappa^2\tau^3 + \omega_0^4\omega_\Lambda\kappa^4(1 + \kappa^2)\tau^3 + \omega_\Lambda^5(1 - \kappa^4)^2(1 + \kappa^2)\tau^3 - 2\omega_0^2\omega_\Lambda^3\kappa^4(1 + \kappa^2 + \kappa^4)\tau^3. \quad (27)$$

Это уравнение является уравнением третьей степени относительно переменной $x = (\tau\omega)^2$ и имеет аналитические решения. Для простоты приведем положительные решения уравнения (27) в виде разложения по параметру

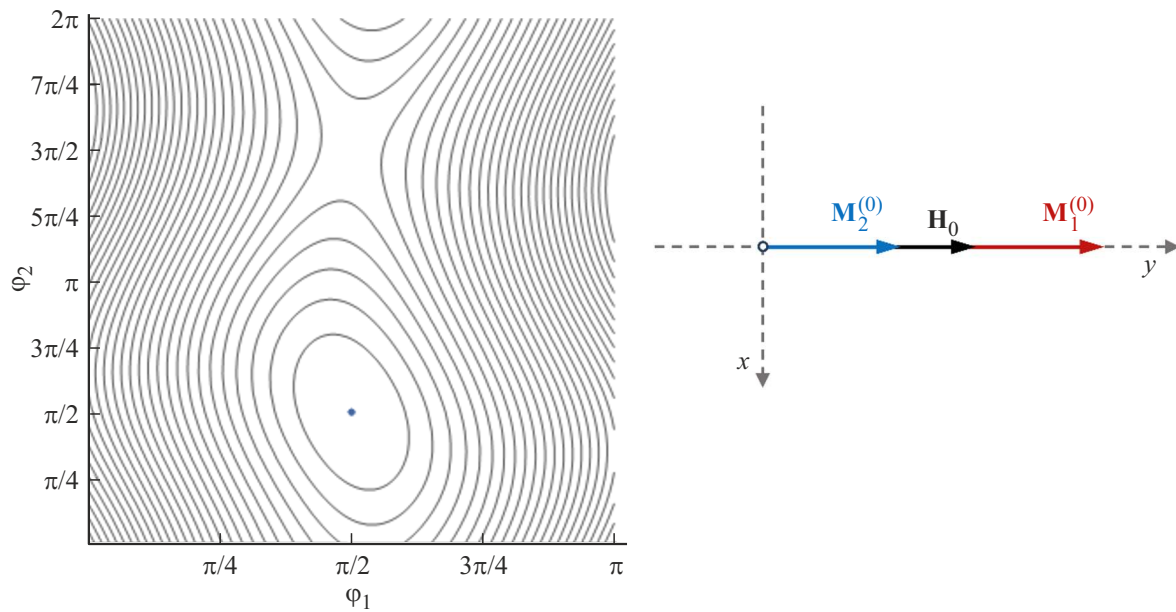


Рис. 3. Карта эквипотенциалей функции $\bar{V}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при напряженности внешнего поля $H_0 \leq H_2$ (слева), соответствующей сонаправленной ориентации устойчивых положений намагниченностей подрешеток (схема справа). Точка на карте соответствует положению минимума функции $\bar{v}(\pi/2, \varphi_1, \pi/2, \varphi_2)$ при значении углов $\varphi_1^{\min} = \varphi_2^{\min} = \pi/2$.

пу τ :

$$\omega^{(p)} \approx \omega_0 - \frac{\tau}{4} \left(\frac{\omega_0^3(1+\kappa^2)}{2\omega_\Lambda\kappa} + \frac{\omega_\Lambda^3(1-\kappa^4)^2(1+\kappa^2)}{2\omega_0\kappa^5} - \frac{\omega_0\omega_\Lambda(1-3\kappa^2-3\kappa^4+\kappa^6)}{\kappa^3} \right), \quad (28)$$

$$\omega_\pm^{(n)} \approx \frac{1}{\tau} + \frac{2\omega_\Lambda^2(\kappa^{-1}+\kappa) \pm \sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_\Lambda^2(\kappa^{-1}-\kappa)^2 + \omega_\Lambda^4(\kappa^{-2}-\kappa^2)^2}}{4\omega_\Lambda}. \quad (29)$$

Состояние С. Сонаправленное положение векторов $\mathbf{M}_1^{(0)}$ и $\mathbf{M}_2^{(0)}$

Для значений напряженности поля $H_0 \geq H_2$ положения минимумов в плоскости XY задаются углами (рис. 3)

$$\varphi_1^{\min} = \varphi_2^{\min} = \pi/2. \quad (30)$$

Подстановка $\vartheta_{1,2}^{\min} = \pi/2$ и $\varphi_{1,2}^{\min} = \pi/2$ в уравнение (16) дает уравнения для собственных частот ферромагнетика в состоянии С:

$$(\omega(\omega\tau - i\alpha) - \omega_0 \pm \omega) \times (\omega(\omega\tau - i\alpha) - \omega_0 + (\kappa + \kappa^{-1})\omega_\Lambda \pm \omega) = 0. \quad (31)$$

Уравнение имеет следующие положительные аналитические решения, справедливые при произвольных значе-

ниях α и τ :

$$\omega_1^{(p,n)} = \frac{\mp 1 + i\alpha + \sqrt{(1 \mp i\alpha)^2 + 4\tau\omega_0}}{2\pi}, \quad (32)$$

$$\omega_2^{(p,n)} = \frac{\mp 1 + i\alpha + \sqrt{(1 \mp i\alpha)^2 + 4\tau(\omega_0 - \omega_\Lambda(\kappa^{-1} + \kappa))}}{2\tau}. \quad (33)$$

4. Результаты и их обсуждение

Частоты прецессии $\omega_\pm^{(p)}$ и отклонения нутационных частот $\Delta\omega_\pm = \omega_\pm^{(n)} - \tau^{-1}$ в зависимости от величины внешнего поля для ферромагнетика в антипараллельном состоянии показаны на рис. 4. На рисунке видно хорошее согласие расчетов по формулам (21) и (22) с результатами численного решения уравнения (20).

Возрастающая линия на рис. 4, а соответствует частоте $\omega_+^{(p)}$ из выражения (21), которая не зависит от величины обменного взаимодействия даже с учетом инерционности намагниченности. В связи с этим этот тип колебаний принято называть ферромагнитным типом [3]. Для этого типа колебаний характерно то, что в процессе движения намагниченности подрешеток $\mathbf{M}_1(t)$ и $\mathbf{M}_2(t)$ остаются все время антипараллельными. В таком их положении не совершается работа против обменных сил, вследствие чего обменное взаимодействие не влияет на частоту $\omega_+^{(p)}$. Напротив, колебания с частотой $\omega_-^{(p)}$ зависят от ω_Λ . При колебаниях с частотой $\omega_-^{(p)}$ вектора $\mathbf{M}_1(t)$ и $\mathbf{M}_2(t)$ уже не антипараллельны. В противоположность ферромагнитному типу колебаний этот тип колебаний

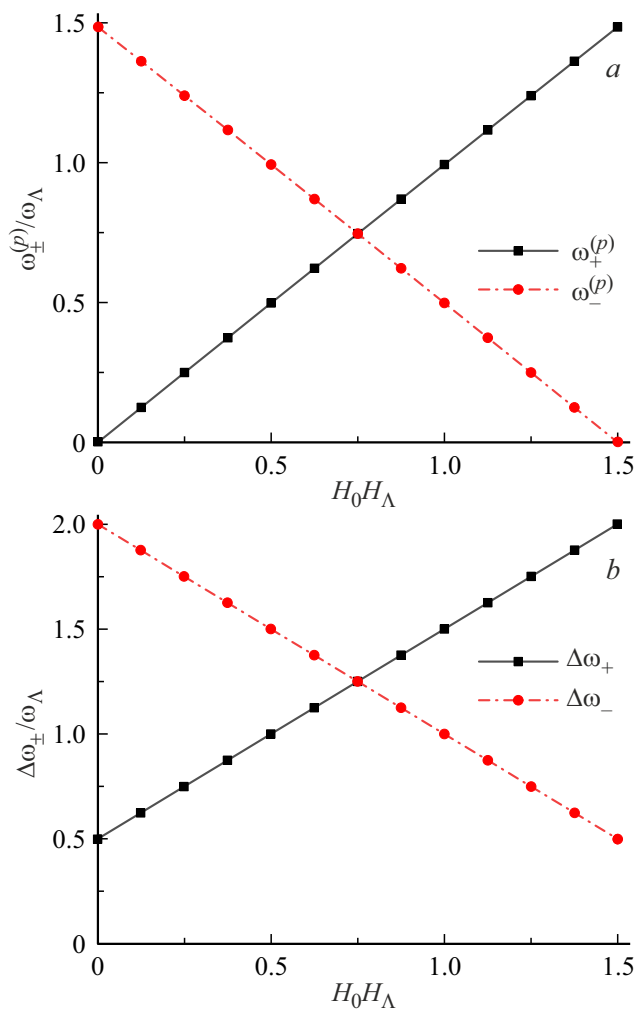


Рис. 4. а) Частоты прецессии $\omega_{\pm}^{(p)}$ и б) отклонения нутационных частот $\Delta\omega_{\pm} = \omega_{\pm}^{(n)} - \tau^{-1}$ в зависимости от величины внешнего поля для ферримагнетика в состоянии А при $\kappa = 0.5$, $\tau\omega_{\Lambda} = 0.004$, $\alpha = 0$. Сплошные линии — расчет по формулам (21) и (22), символы — численное решение уравнения (20).

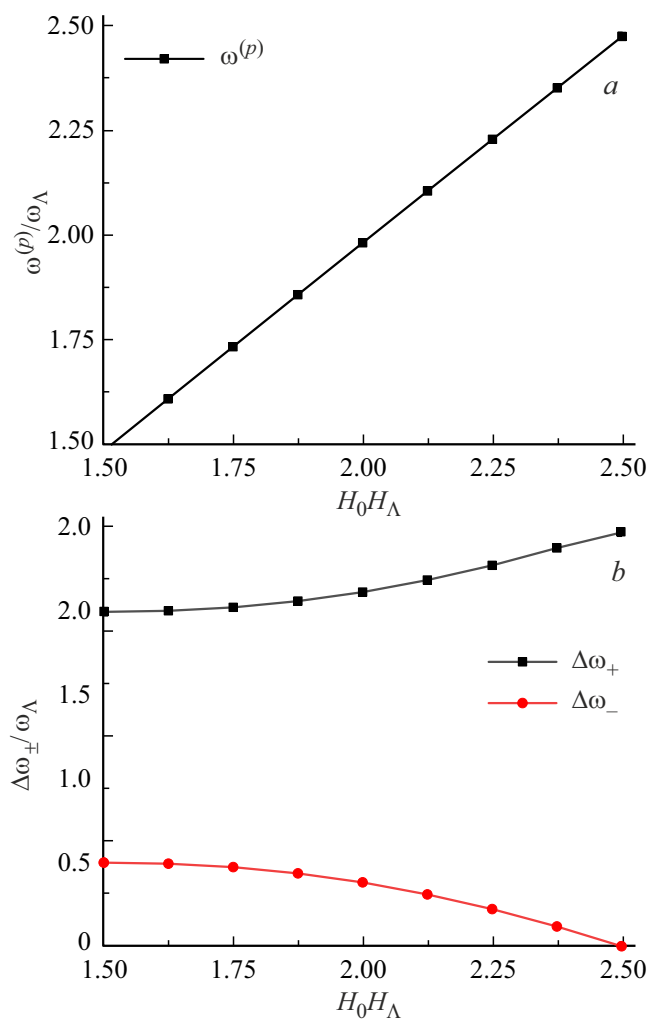


Рис. 5. а) Частота прецессии $\omega^{(p)}$ и б) отклонение нутационной частоты $\Delta\omega_{\pm} = \omega_{\pm}^{(n)} - \tau^{-1}$ в зависимости от величины внешнего поля для ферримагнетика в состоянии В при $\kappa = 0.5$, $\tau\omega_{\Lambda} = 0.004$, $\alpha = 0$. Сплошная линия — расчет по формулам (28) и (29), символы — численное решение уравнения (25).

называют обменным [3]. Ферромагнитное и обменное колебания экспериментально наблюдались, например, в работах [33,34]. Для оценки частот этих колебаний в работах [33,34] использовались выражения, которые в безынерционном изотропном приближении при $\gamma_1 = \gamma_2$ переходят в выражения (21). На рис. 4, б показаны отклонения нутационных частот $\Delta\omega_{\pm} = \omega_{\pm}^{(n)} - \tau^{-1}$ от основной частоты τ^{-1} , определяемой обратным временем инерционной релаксации. Как следует из выражения (22), наклон линий на рис. 4, б в нулевом приближении по τ не зависит от обменного взаимодействия, которое лишь корректирует основную частоту как $\Delta\omega_{\pm}|_{\omega_0=0} = \omega_{\Lambda}\kappa^{\pm 1}$.

На рис. 5 представлены собственные частоты ферримагнетика в неколлинеарном состоянии. Также как и в антипараллельном состоянии наблюдается хорошее

согласие расчетов по приближенным формулам (28) и (29) с результатами численного решения уравнения (25). Следует отметить, что неколлинеарное состояние соответствует относительно большим значениям внешнего поля, как правило, существенно большим анизотропного поля. В силу этого характер изменения собственных частот изотропного ферримагнетика с изменением внешнего поля аналогичен изменению частот антиферромагнетика в „опрокинутом“ состоянии при направлении внешнего поля вдоль сонаправленных легких осей его подрешеток [26]. Экспериментально неколлинеарное состояние исследовалось в работе [35].

Сонаправленное состояние ферримагнетика возникает в очень сильных магнитных полях. В силу этого, и поскольку для сонаправленного состояния получены точные решения, нет необходимости рассматривать это со-

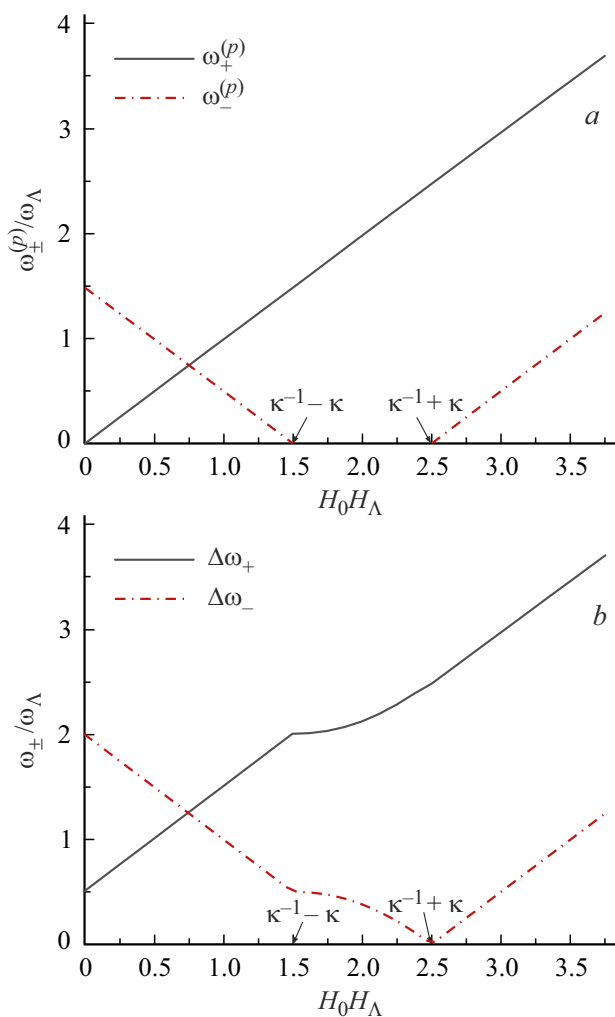


Рис. 6. а) Частоты прецессии $\omega_{\pm}^{(p)}$ и б) отклонения нутационных частот $\Delta\omega_{\pm}^{(n)} = -\tau^{-1}$ в зависимости от величины внешнего поля для ферримагнетика в состояниях А, В и С при $\kappa = 0.5$, $\tau\omega_\Lambda = 0.004$, $\alpha = 0$.

состояние отдельно. На рис. 6 для сравнения представлены частоты во всех трех возможных состояниях ферримагнетика. Как видно на рис. 6, переход от антипараллельного состояния к неколлинеарному происходит плавно при значении внешнего поля $H_1 = \omega_\Lambda(\kappa^{-1} - \kappa)/\gamma$. Это существенно отличается от изотропных ферримагнетиков, у которых при переходе к неколлинеарному состоянию наблюдается резкое опрокидывание намагниченностей подрешеток, что отражается на резком изменении собственных частот [26]. Спин-флоп-переходы в ферримагнетиках экспериментально наблюдались, например, в работах [36,37]. При этом в работе [37] для ферримагнетиков со слабыми анизотропными полями поле спин-флоп-перехода оценивалось как H_1 . Из рис. 6 также следует, что „схлопывание“ намагниченностей, соответствующее переходу в сонаправленное состояние при значении внешнего поля $H_2 = \omega_\Lambda(\kappa^{-1} + \kappa)/\gamma$, у ферримагнетиков также

происходит плавно. Этот процесс схож с аналогичным процессом в антиферромагнетиках [26].

5. Заключение

Проведено теоретическое исследование НР в изотропном двухподрешеточном ферримагнетике, находящемся во внешнем магнитном поле. Использование метода линейаризации системы инерционных уравнений ЛЛГ, описывающих инерционную динамику намагниченностей подрешеток ферримагнетика, позволило получить характеристические уравнения для собственных частот ферримагнетика в его различных магнитных состояниях. Полученные характеристические уравнения, несмотря на их сложный вид, допускают аналитические решения в приближении бесконечно малого значения параметра диссипации. Рассмотрены три характерных состояния, реализующиеся при различных значениях внешнего магнитного поля: антипараллельное, неколлинеарное и сонаправленное. Для каждого из этих состояний из характеристических уравнений получены аналитические выражения для собственных частот ферримагнетика, которые определяют частоты как ферримагнитных, так и проявляющихся исключительно вследствие учета инерционности намагниченности нутационных резонансов. Для простоты аналитические решения характеристического уравнения для антипараллельного и неколлинеарного состояний представлены в виде разложения по малому параметру, каковым является время инерционной релаксации. Показано, что в этих состояниях значения нутационных частот можно представить в виде суммы основной частоты, равной обратному времени инерционной релаксации, и отклонения от нее, зависящего от величин внешнего поля и обменного взаимодействия. В сонаправленном состоянии получены простые точные аналитические решения для собственных частот.

Проведен анализ зависимости нутационных частот от величины внешнего магнитного поля. Для антипараллельного состояния показано, что нутационные колебания, подобно прецессионным, распадаются на две характерные ветви, а именно ферромагнитную, частота которой не зависит от обменного взаимодействия, и обменную, на частоту которой влияет обменное взаимодействие. Для неколлинеарного состояния установлено, что поведение нутационных частот качественно аналогично изменению нутационных частот с изменением поля, наблюдаемому в антиферромагнетиках в „опрокинутом“ состоянии. Продемонстрировано, как переходы между состояниями ферримагнетика, индуцируемые внешним полем, отражаются на частотах резонансов. В частности, показано, что в отличие от антиферромагнетиков, где переход в неколлинеарное состояние сопровождается резким спин-флоп-переходом, в изотропных ферримагнетиках соответствующие изменения происходят плавно.

Полученные результаты имеют важное значение для понимания высокочастотной магнитодинамики ферри-

магнитных материалов. Исследования НР могут служить эффективным инструментом определения инерционного параметра системы — времени инерционной релаксации. В перспективе представляет интерес исследование затухающих собственных колебаний ферримагнетика. В силу малых значений безразмерного параметра затухания α , которые обычно находятся в диапазоне 10^{-3} – 10^{-1} , наличие диссипации в спиновой системе, как правило, не сильно влияет на резонансные частоты, поскольку диссипативная коррекция к частотам определяется членами с α^2 . Однако диссипация существенно влияет на полуширины резонансных линий. Применение представленного метода к диссипативным спиновым системам и рассмотрение вынужденных колебаний позволит провести исследование крайне высокочастотной магнитной восприимчивости ферримагнетиков [20]. Разработанный в работе подход обладает достаточной универсальностью и может быть обобщен на более сложные спиновые системы, включая многоподрешеточные ферримагнитные структуры. В дальнейшем представляет интерес исследование собственных частот ферримагнетиков с учетом магнитокристаллической анизотропии, а также рассмотрение более общего случая различных значений параметров их подрешеток, поскольку большинство экспериментальных результатов относится именно к таким ферримагнетикам [35]. Мы надеемся, что представленные результаты будут полезны при постановке будущих экспериментов по исследованию НР в ферримагнитных материалах.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-22-00119, <https://rscf.ru/project/25-22-00119/>.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] S.K. Kim, G.S.D. Beach, K.-J. Lee, T. Ono, T. Rasing, H. Yang. *Nature Mater.* **21**, 1, 24 (2022). <https://doi.org/10.1038/s41563-021-01139-4>
- [2] Y. Zhang, X. Feng, Z. Zheng, Z. Zhang, K. Lin, X. Sun, G. Wang, J. Wang, J. Wei, P. Vallobra, Y. He, Z. Wang, L. Chen, K. Zhang, Y. Xu, W. Zhao. *Appl. Phys. Rev.* **10**, 1, 011301 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0104618>
- [3] А.Г. Гуревич. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. Наука, М. (1973).
- [4] A.K. Zvezdin. *Handbook of magnetic materials* **9**, 405 (1995). [https://doi.org/10.1016/S1567-2719\(05\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S1567-2719(05)80008-3)
- [5] *Handbook of Terahertz Technology for Imaging, Sensing and Communications* / Ed. D. Saeedkia. Woodhead Publishing Ltd, Sawston (2013).
- [6] J.-Y. Bigot, M. Vomer, E. Beaurepaire. *Nature Phys.* **5**, 7, 515 (2009). <https://doi.org/10.1038/nphys1285>
- [7] C.D. Stanciu, A. Tsukamoto, A.V. Kimel, F. Hansteen, A. Kirilyuk, A. Itoh, Th. Rasing. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 21, 217204 (2007). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.217204>
- [8] A. Kimel, B. Ivanov, R. Pisarev, P.A. Usachev, A. Kirilyuk, Th. Rasing. *Nature Phys.* **5**, 10, 727 (2009). <https://doi.org/10.1038/nphys1369>
- [9] S. Wienholdt, D. Hinzke, U. Nowak. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 24, 247207 (2012). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.247207>
- [10] M.-C. Ciornei, J.M. Rubí, J.-E. Wegrowe. *Phys. Rev. B* **83**, 2, 020410(R) (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.020410>
- [11] J.-E. Wegrowe, M.-C. Ciornei. *Am. J. Phys.* **80**, 7, 607 (2012). <https://doi.org/10.1119/1.4709188>
- [12] D. Böttcher, J. Henk. *Phys. Rev. B* **86**, 2, 020404(R) (2012). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.020404>
- [13] S. Giordano, P.-M. Déjardin. *Phys. Rev. B* **102**, 21, 214406 (2020). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.214406>
- [14] E. Olive, Y. Lansac, J.-E. Wegrowe. *Appl. Phys. Lett.* **100**, 19, 192407 (2012). <https://doi.org/10.1063/1.4712056>
- [15] S.V. Titov, W.J. Dowling, Yu.P. Kalmykov. *J. Appl. Phys.* **131**, 19, 193901 (2022). <https://doi.org/10.1063/5.0093226>
- [16] M. Cherkasskii, M. Farle, A. Semisalova. *Phys. Rev. B* **102**, 18, 184432 (2020). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.184432>
- [17] R. Mondal, L. Rózsa, M. Farle, P.M. Oppeneer, U. Nowak, M. Cherkasskii. *J. Magn. Magn. Mater.* **579**, 170830 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.170830>
- [18] R. Mondal, S. Großenbach, L. Rózsa, U. Nowak. *Phys. Rev. B* **103**, 10, 104404 (2021). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.104404>
- [19] S.V. Titov, W.J. Dowling, A.S. Titov, A.S. Fedorov. *J. Appl. Phys.* **135**, 9, 093903 (2024). <https://doi.org/10.1063/5.0196622>
- [20] A.C. Титов, Н.В. Чукашев, С.В. Титов. *ФТТ* **67**, 9, 1681 (2025). DOI: 10.61011/FTT.2026.05.63446.9408
- [21] K. Neeraj, N. Awari, S. Kovalev, D. Polley, N.Z. Hagström, S.S.P.K. Arekapudi, A. Semisalova, K. Lenz, B. Green, J.-C. Deinert, I. Ilyakov, M. Chen, M. Bowatna, V. Scalera, M. D'Aquino, C. Serpico, O. Hellwig, J.-E. Wegrowe, M. Gensch, S. Bonetti. *Nature Phys.* **17**, 2, 245 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41567-020-01040-y>
- [22] V. Unikandanunni, R. Medapalli, M. Asa, E. Albisetti, D. Petti, R. Bertacco, E.E. Fullerton, S. Bonetti. *Phys. Rev. Lett.* **129**, 23, 237201 (2022). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.237201>
- [23] A. De, J. Schlegel, A. Lentfert, L. Scheuer, B. Stadtmüller, P. Pirro, G. von Freymann, U. Nowak, M. Aeschlimann. *Phys. Rev. B* **111**, 1, 014432 (2025). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.014432>
- [24] С.В. Тябликов. Методы квантовой теории магнетизма, 2-е изд. Наука, М. (1975).
- [25] M. Cherkasskii, I. Barsukov, R. Mondal, M. Farle, A. Semisalova. *Phys. Rev. B* **106**, 5, 054428 (2022). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.054428>
- [26] С.В. Титов, А.С. Федоров, А.С. Титов, Н.В. Чукашев. *ФТТ* **67**, 1, 145 (2025). DOI: 10.61011/FTT.2025.01.59781.283
- [27] S. Bhattacharjee, L. Nordström, J. Fransson. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 5, 057204 (2012). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.057204>
- [28] M. Fähnle, D. Steiauf, C. Illg. *Phys. Rev. B* **84**, 17, 172403 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.172403>

- [29] R. Mondal, M. Berritta, A.K. Nandy, P.M. Oppeneer. Phys. Rev. B **96**, 2, 024425 (2017).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.024425>
- [30] R. Mondal, M. Berritta, P.M. Oppeneer. J. Phys.: Condens. Matter **30**, 26, 265801 (2018). <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aac5a2>
- [31] R. Bellman. Introduction to matrix analysis. McGraw-Hill, New York (1960).
- [32] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы и формулы. Наука, М. (1973). [G.A. Korn, T.M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. McGraw-Hill (1968).]
- [33] M. Deb, P. Molho, B. Barbara. Phys. Rev. B **105**, 1, 014432 (2022). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.014432>
- [34] M. Deb, P. Molho, B. Barbara, J.-Y. Bigot. Phys. Rev. B **94**, 5, 054422 (2016).
- [35] D.M. Krichevsky, N.A. Gusev, D.O. Ignatyeva, A.V. Prisyazhnyuk, E.Yu. Semuk, S.N. Polulyakh, V.N. Berzhansky, A.K. Zvezdin, V.I. Belotelov. Phys. Rev. B **108**, 17, 174442 (2023).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.174442>
- [36] I.A. Dolgikh, F. Formisano, K.H. Prabhakara, M.V. Logunov, A.K. Zvezdin, P.C.M. Christianen, A.V. Kimel. Appl. Phys. Lett. **120**, 1, 012401 (2022).
<https://doi.org/10.1063/5.0076442>
- [37] J. Becker, A. Tsukamoto, A. Kirilyuk, J.C. Maan, Th. Rasing, P.C.M. Christianen, A.V. Kimel. Phys. Rev. Lett. **118**, 11, 117203 (2017).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.117203>

Редактор Е.В. Толстякова