

10 Классический симулятор одномерных задач квантовой механики на базе нитевидного кристалла с переменной площадью сечения

© М.С. Дунаевский

ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Mike.Dunaeffsky@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 25 марта 2026 г.
В окончательной редакции 25 мая 2026 г.
Принято к публикации 26 мая 2026 г.

На базе нитевидного кристалла с заданным продольным профилем $R(x)$ может быть создано макроскопическое вычислительное устройство — классический симулятор для решения 1D-уравнения Шрёдингера для частицы в потенциале $U(x)$.

Ключевые слова: нитевидный кристалл, продольные колебания, уравнение Вебстера, классический симулятор для квантово-механической задачи.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.16.63432.20694

До эры распространения мощных цифровых компьютеров ученые и инженеры искали способы наглядно представить и экспериментально исследовать странные законы квантового мира. Были созданы так называемые классические симуляторы — устройства, где макроскопические физические системы служили понятной аналогией для невидимой квантовой реальности. Так как квантовую частицу описывает волновая функция, подчиняющаяся уравнению Шрёдингера, можно найти классическую систему, поведение которой описывается математически аналогичными уравнениями. Исследуя такую систему в лаборатории, можно качественно понять поведение ее квантового „двойника“. К классическим симуляторам можно отнести: 1) колебания жидкости в резервуаре, которые могут демонстрировать интерференцию и дифракцию, аналогичные волнам де Бройля; 2) электромагнитные волны в волноводах или резонаторах, которые могут моделировать квантовую частицу в потенциальной яме и туннелирование через барьер, поскольку описываются тем же типом волнового уравнения; 3) механические системы, например цепочки связанных маятников, которые могут моделировать дискретные энергетические уровни. Следует отметить, что эти симуляторы остаются классическими системами. А значит, они не способны воспроизвести некоторые ключевые квантово-механические явления, например коллапс волновой функции при измерении.

В настоящей работе предложен классический симулятор на базе нитевидного кристалла с переменной площадью сечения и упругих продольных колебаний, возникающих в таком кристалле. С помощью предложенного симулятора можно будет решать одномерное стационарное уравнение Шрёдингера для частицы в потенциале $U(x)$.

Рассмотрим продольные упругие смещения и деформации в нитевидном кристалле (рис. 1, *a*) с переменным сечением $S(x)$ (и переменным радиусом $R(x)$). Огра-

ничение на размеры нитевидного кристалла следующее: $R_{\max} \ll a$, где R_{\max} — максимальное значение радиуса нитевидного кристалла, a — характерный продольный размер неоднородностей (сужений либо расширений) в нитевидном кристалле.

Разделим нитевидный кристалл на небольшие элементы объема и запишем для смещений $u(x, t)$ второй закон Ньютона (рис. 1, *b*). На элемент с двух сторон будут действовать силы упругости (закон Гука), пропорциональные величине деформации $\partial u / \partial x$:

$$S(x+dx)E \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - S(x)E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = S(x)dx\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Упрощая выражение (1), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{2}$$

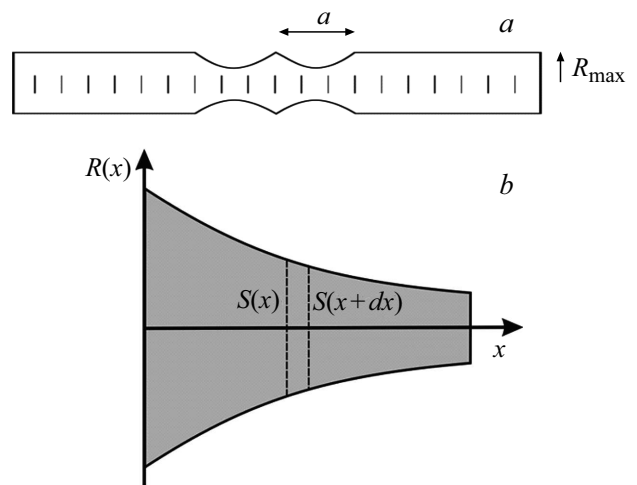


Рис. 1. *a* — схема нитевидного кристалла с переменным сечением; *b* — профиль поперечного сечения $R(x)$ нитевидного кристалла.

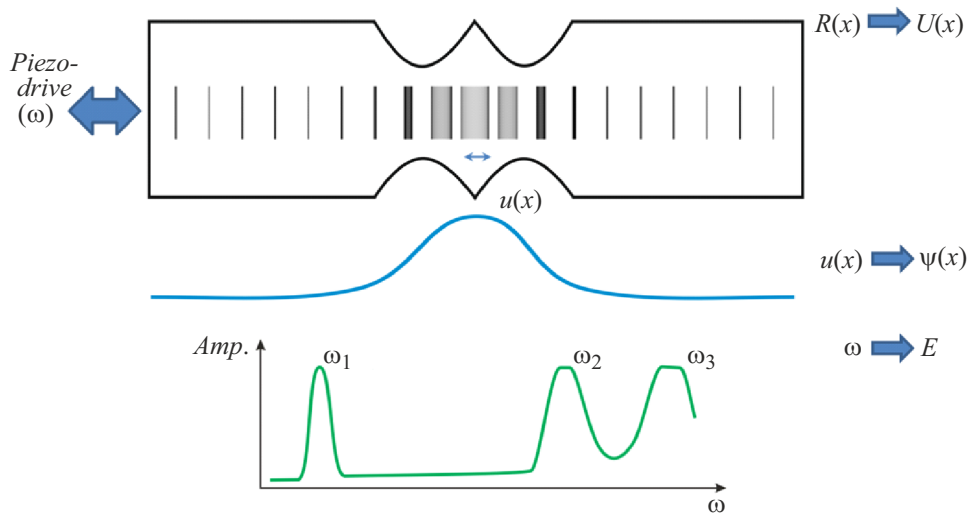


Рис. 2. Геометрическая схема классического симулятора для решения одномерного уравнения Шрёдингера на базе нитевидного кристалла и определения энергий стационарных состояний E_i и волновых функций $\psi_i(x)$ для частицы в потенциале $U(x)$.

Здесь E — модуль Юнга, ρ — плотность, $c_s = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость звука в кристалле. Выражение (2) — это уравнение Вебстера [1], возникающее при решении задач о поведении акустических звуковых волн в рупорах (сужающихся либо расширяющихся). В дальнейшем для простоты будем считать, что поперечное сечение либо круглое $S(x) = \pi R(x)^2$, либо изменяется пропорционально квадрату характерного линейного размера сечения $S(x) \sim R(x)^2$. В этом случае уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2 \frac{R'(x)}{R(x)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Будем искать решения, осциллирующие во времени $u(x,t) = u(x) \exp(i\omega t)$. Получим выражение

$$u''(x) + 2 \frac{R'(x)}{R(x)} u'(x) + \frac{\omega^2}{c_s^2} u(x) = 0. \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде $u(x) = \psi(x)/R(x)$. Подставляя это выражение в (4), получим уравнение для функции $\psi(x)$

$$\psi''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{R''(x)}{R(x)} \right) \psi(x) = 0. \quad (5)$$

Можно видеть, что уравнение (5) совпадает со стационарным уравнением Шрёдингера для частицы в потенциале $U(x)$, если заменить $\omega^2/c_s^2 \leftrightarrow (2m/\hbar^2)E$ и $R''(x)/R(x) \leftrightarrow (2m/\hbar^2)U(x)$. Можно сказать, что возникает подобие между продольными упругими колебаниями в стержне и квантово-механическим поведением частицы в потенциале $U(x)$. Аналогом энергии E частицы является (с точностью до размерного коэффициента) квадрат частоты ω^2 упругих колебаний

стержня. Аналогом волновой функции $\psi(x)$ является профиль амплитуды колебаний, умноженный на профиль радиуса стержня $u(x)R(x)$. При этом, задавая определенный профиль радиуса стержня $R(x)$, можно задавать потенциал, в котором будет находиться частица $U(x) = (\hbar^2/2m)R''(x)/R(x)$.

Это открывает возможность создания макроскопического классического симулятора для решения одномерного стационарного уравнения Шрёдингера. Симулятор (рис. 2) представляет собой: 1) нитевидный стержень с переменным радиусом сечения $R(x)$; 2) набор эквидистантных меток, нанесенных на боковую поверхность стержня; 3) систему подачи продольных колебаний с частотой ω в стержень (например, это может быть пьезоэлемент, прикрепленный к одному из торцов стержня); 4) фотоаппарат либо видеокамеру для измерения профиля амплитуд колебаний меток $u(x)$.

Варьируя частоту колебаний пьезоэлемента, можно найти резонансные частоты ω_i , при которых амплитуда колебаний меток $u(x)$ максимальна. Этим частотам соответствуют уровни энергии $E_i = (\hbar^2/2m)\omega_i^2/c_s^2$ стационарных (либо квазистационарных) состояний частицы с массой m в потенциале $U(x) = (\hbar^2/2m)R''(x)/R(x)$. При этом профили амплитуд $u_i(x)$ колебаний стержня (соответствующие этим резонансным частотам ω_i) могут быть пересчитаны в волновые функции по простой формуле $\psi_i(x) = u_i(x)R(x)$.

Рассмотрим конкретный пример — нитевидный кристалл „D-элемент“ (рис. 3,а), позволяющий смоделировать барьерную структуру, внутри которой есть узкая дельтаобразная яма. Радиус такого стержня задается следующим образом: 1) R_0 при $x < -2a$ и $x > 2a$; 2) $R_{\min} \cosh((x+a)/l)$ при $-2a < x < 0$; 3) $R_{\min} \cosh((x-a)/l)$ при $0 < x < 2a$. Здесь параметр a задает характерный продольный размер утончения на стержне (рис. 3,а), R_{\min} — радиус са-

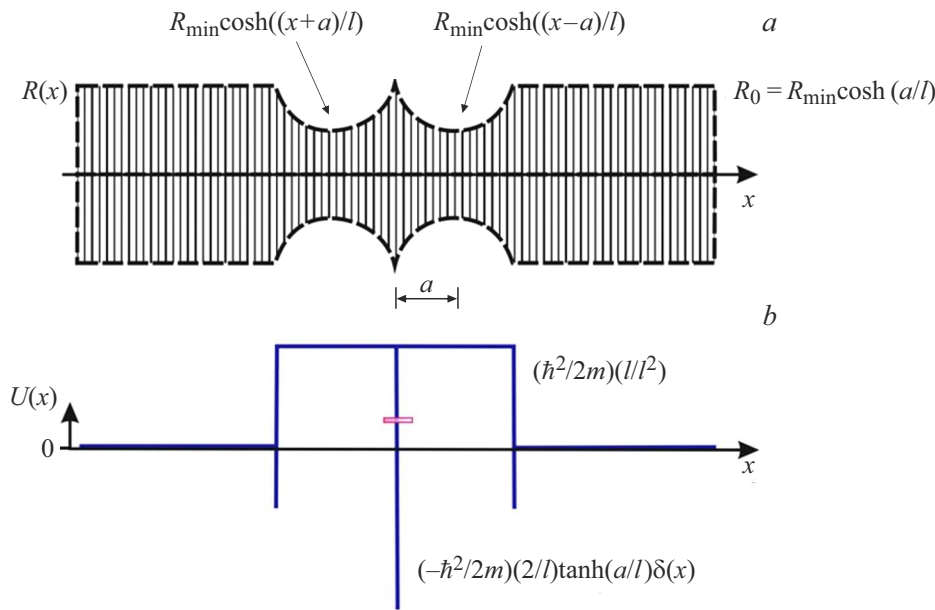


Рис. 3. *a* — схема продольного профиля $R(x)$ нитевидного кристалла „D-элемент“, позволяющего смоделировать барьерную структуру, внутри которой есть узкая дельтаобразная яма; *b* — потенциал $U(x)$, возникающий в „связанной“ квантово-механической задаче.

мой тонкой части (бутылочное горлышко). Параметр l (рис. 3, *a*), входящий в знаменатель функции $R(x) = R_{\min} \cosh((x-a)/l)$, — это характерная длина, на которой функция $R(x)$ возрастает в e раз. Чем меньше значение параметра l , тем „круче“ нарастает функция $R(x)$. Также для l справедливо соотношение $1/l^2 = R''(x)/R(x)$, когда $R(x) = R_{\min} \cosh((x-a)/l)$. Для стержня постоянного сечения параметр l равен бесконечности. Потенциал $U(x)$, возникающий в „связанной“ квантово-механической задаче, будет следующим (рис. 3, *b*): 1) $U(x) = 0$ при $x < -2a$ и $x > 2a$; 2) $U(x) = \hbar^2/(2ml^2)$ при $-2a < x < 0$ и $0 < x < 2a$; 3) из-за излома функции $R(x)$ вблизи точки $x = 0$ будет возникать особенность в виде отрицательной дельта-функции

$$U_{\delta}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{l} \tanh\left(\frac{a}{l}\right) \delta(x). \quad (6)$$

Известно, что подобный дельтаобразный потенциал в квантовой механике порождает ровно одно связанное состояние с положением уровня энергии относительно нуля

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2ml^2} \cosh^{-2}\left(\frac{a}{l}\right). \quad (7)$$

Для резонансной частоты продольных колебаний ω_1 получим выражение

$$\omega_1 = \frac{c_s}{l} \cosh^{-1}(a/l). \quad (8)$$

Таким образом, в стержне такой формы будет возникать одно высокодобротное резонансное состояние с частотой ω_1 .

Следует отметить, что это резонансное состояние обладает конечным временем жизни, так как значение энергии $E_1 > 0$ и будет происходить туннельное „утекание“ через барьеры (рис. 3, *b*) высотой $\hbar^2/(2ml^2)$ и шириной $2a$.

Также известна волновая функция $\psi_1(x)$, соответствующая энергии E_1 :

$$\psi_1(x) = A e^{-\frac{|x|}{l} \tanh(a/l)}. \quad (9)$$

Соответственно можно определить функцию смещения $u_1(x) = \psi_1(x)/R(x)$ для резонансного состояния. В диапазоне $-2a < x < 2a$ получим выражение

$$u_1(x) = A e^{-\frac{|x|}{l} \tanh(a/l)} / \cosh\left(\frac{|x| - a}{l}\right). \quad (10)$$

При этом в симуляторе можно будет наблюдать следующие явления.

1. При плавном изменении возбуждающей частоты ω вблизи значения ω_1 будет наблюдаться резонансное увеличение амплитуды колебаний эквидистантных меток, нанесенных на боковую поверхность стержня. Изменяя величину этих колебаний (рис. 2) в зависимости от значения возбуждающей частоты ω , можно точно определить значение резонансной частоты ω_1 и конечную добротность резонанса (обусловленную туннельным „утеканием“ через барьеры). Измерив экспериментально ω_1 , можно определить энергию состояния $E_1 = (\hbar^2/2m)\omega_1^2/c_s^2$ для частицы в соответствующем потенциале.

2. При возбуждении на резонансной частоте ω_1 амплитуда колебаний эквидистантных меток будет функцией

$u(x)$ положения метки на шкале x . Таким образом, можно будет экспериментально измерить (рис. 2) функцию пространственного распределения амплитуды колебаний $u_1(x)$ и волновую функцию $\psi_1(x) = u_1(x)R(x)$ для частицы в состоянии с энергией E_1 .

В качестве материалов для изготовления классического симулятора можно использовать кварцевое стекло либо кристаллический кварц. Эти материалы характеризуются высокими значениями добротности (рекордное значение в кварцевом стекле $Q \sim 4 \cdot 10^7$ [2], в кристаллическом кварце $Q \sim 10^9$ [3]) и, как следствие, низким уровнем акустических потерь при распространении продольных упругих волн. В приведенных выше уравнениях (1)–(5) материальные потери не учитываются. Однако в реальных материалах они присутствуют, что обуславливает необходимость выбора материалов с низким уровнем потерь. Выбор материала определяется компромиссом между ценой и качеством. Кварцевое стекло дешевле, но уступает кристаллическому кварцу по добротности.

Отметим, что приведенные выше значения добротностей являются рекордными, а для реальных приложений подходят материалы и с меньшими значениями добротностей. Для того чтобы можно было пренебречь материальными потерями, необходимо, чтобы добротность, обусловленная материальными потерями, была хотя бы на порядок выше, чем добротность резонансных состояний, возникающих в стержне: $Q_{mat} \gg Q_{res}$. Для нитевидных кристаллов, в которых реализована структура типа барьер–яма–барьер, добротность резонансных состояний будет определяться величиной коэффициента туннелирования через барьер $t \approx e^{-a/l}$. Величина добротности будет составлять $Q_{res} \approx e^{a/l} \approx 2 \cosh(a/l) = 2R_{max}/R_{min}$. Будем рассматривать „реалистичные“ нитевидные кристаллы, содержащие структуру барьер–яма–барьер, в которых соотношение R_{max}/R_{min} находится в диапазоне от 50 до 500. Величина добротности резонансных состояний в таких структурах будет составлять $Q_{res} < 10^3$. Для таких нитевидных кристаллов подойдет материал с уровнем материальных потерь в продольных колебаниях $Q_{mat} > 10^4$, в этом случае материальные потери можно не учитывать.

Выбор характерных размеров классического симулятора на базе нитевидного кристалла обусловлен необходимостью обеспечения удобства наблюдения продольных колебаний с помощью фотоаппарата либо видеокамеры. Исходя из этого шаг эквидистантных меток (Δx) можно установить около 1 см, характерный продольный размер неоднородности (a) на стержне — 10 см. Полную длину стержня (L) можно установить около 1 м. При таких габаритах характерные значения резонансных частот, возникающих из-за неоднородностей $R(x)$, могут составлять $f \sim 10$ kHz. Следует отметить, что современные камеры позволяют осуществлять высокоскоростную съемку со скоростью 10^6 fps [4], что позволит изучать не только амплитуды установившихся продольных колебаний, но и переходные процессы.

Серьезной проблемой является устойчивость предложенного классического симулятора к возникновению нежелательных изгибных колебаний. Действительно, при возбуждении пьезоэлементом продольных колебаний в нитевидном кристалле также могут возникать изгибные колебания. Для подавления изгибных колебаний необходимо, во-первых, определить области пучностей изгибных колебаний и, во-вторых, установить бесконтактные демпферы в этих областях. Области пучностей изгибных колебаний — это, как правило, самые тонкие области стержня, где $R(x)$ минимален. Одним из вариантов бесконтактного демпфера является магнитный демпфер на вихревых токах [5]. На самую тонкую область стержня устанавливается тонкое кольцо из проводящего немагнитного материала. Вокруг него с небольшим зазором размещаются постоянные магниты для создания магнитного поля вдоль оси стержня. При изгибных колебаниях проводящее кольцо пересекает магнитные силовые линии по нормали, в нем возникают вихревые токи, и возникает сила, тормозящая поперечное движение. Такой демпфер эффективно ограничивает поперечные изгибные перемещения, при этом продольное движение стержня вдоль оси остается свободным.

Дополнительным способом борьбы с изгибными колебаниями является „центрирование“ продольного возбуждения. Часто изгибные колебания возникают из-за несимметричного приложения продольной силы. Пьезоактуатор должен быть идеально центрирован относительно продольной оси стержня. Сила должна прикладываться строго по нормали к торцу в его геометрическом центре, чтобы ослабить появление изгибающего момента.

Следует отметить, что возможна и упрощенная схема классического симулятора, в которой отсутствует оптическая регистрация смещений эквидистантных рисок. Вместо этого на противоположной (от пьезоактуатора) стороне располагается пьезосенсор, с помощью которого можно измерять частотную зависимость амплитудного коэффициента пропускания $T(\omega) = |t(\omega)|^2$ и фазового коэффициента пропускания $\varphi(\omega) = \arg(t(\omega))$. Такая схема позволяет определять значения резонансных частот квазистационарных состояний ω_i (и соответствующих энергий E_i), но не позволяет определять вид соответствующих волновых функций ψ_i . Кроме того, такая упрощенная схема позволяет детально анализировать форму резонансных линий $T(\omega)$ и выявлять асимметричные профили, присущие резонансному туннелированию Фано. Также отметим, что упрощенная схема с пьезоактуатором и пьезосенсором может быть применена для случая миниатюрных нитевидных кристаллов, в которых оптическая регистрация затруднительна.

Таким образом, уравнение Вебстера для амплитуды продольных упругих колебаний в нитевидном кристалле с продольным профилем $R(x)$ может быть сведено к уравнению, подобному уравнению Шрёдингера для частицы в одномерном потенциале: $U(x) = (\hbar^2/2m)R''(x)/R(x)$.

Может быть создано макроскопическое „вычислительное устройство“ — классический симулятор на базе нитевидного кристалла с заданным профилем $R(x)$ для решения 1D-уравнения Шрёдингера для частицы в потенциале $U(x)$.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] A.G. Webster, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **5** (7), 275 (1919). DOI: 10.1073/pnas.5.7.27
- [2] K. Numata, S. Otsuka, M. Ando, K. Tsubono, Class. Quantum Grav., **19**, 1697 (2002). DOI: 10.1088/0264-9381/19/7/363
- [3] M. Goryachev, D.L. Creedon, E.N. Ivanov, S. Galliou, R. Bourquin, M.E. Tobar, AIP Conf. Proc., **1633**, 90 (2014). DOI: 10.1063/1.4903104
- [4] H.H. Kim, J.H. Kim, A. Ogata, J. Aerosol Sci., **42** (4), 249 (2011). DOI: 10.1016/j.jaerosci.2011.01.007
- [5] H.A. Sodano, J.-S. Bae, D.J. Inman, W.K. Belvin, J. Sound Vibr., **288**, 1177 (2005). DOI: 10.1016/j.jsv.2005.01.016