

05,14

## Неоднородные магнитные состояния, индуцированные краевыми дислокациями в ферромагнитном кристалле

© А.А. Фраерман

Институт физики микроструктур РАН,  
Нижний Новгород, Россия  
E-mail: andr@ipmras.ru

Поступила в Редакцию 8 апреля 2026 г.

В окончательной редакции 9 апреля 2026 г.

Принята к публикации 9 апреля 2026 г.

В рамках феноменологической модели исследованы неоднородные состояния, индуцируемые краевыми дислокациями в ферромагнитном кристалле. Найдены аналитические выражения для вектора намагниченности как в случае одиночной дислокации, так и для „стенки“ дислокаций, которая моделирует границу кристаллитов в поликристалле. Показано, что наличие такой „дислокационной стенки“ приводит к нарушению магнитной киральной симметрии ферромагнетика. В поликристалле следствием этого нарушения является дополнительный вклад в формирование стохастического распределения магнитного момента, известного как „рябь намагниченности“.

**Ключевые слова:** краевая дислокация, деформации, ферромагнетик, поликристалл.

DOI: 10.61011/FTT.2026.04.63319.9406

Механические деформации приводят к изменению кристаллической структуры, а в некоторых случаях, к нарушению симметрии кристалла относительно операции пространственной инверсии. В ферромагнитном кристалле это нарушение ведет к возникновению деформационно-индуцированного взаимодействия Дзялошинского–Мория [1,2]. В работах [3,4] показано, что упругие деформации кручения нарушают симметрию „левых“ и „правых“ магнитных спиралей в геликоидальном магнетике. Нарушение киральной симметрии возможно и в случае неоднородного расширения/сжатия кристалла [5,6]. Особое внимание при изучении киральной симметрии ферромагнетиков уделяется линейным дефектам кристаллической структуры — дислокациям [7–10]. При наличии дислокаций в кристалле нарушается симметрия кристаллической решетки относительно операции пространственной инверсии. В этой работе мы покажем, что наличие „дислокационной стенки“, моделирующей границу кристаллитов, приводит к нарушению магнитной киральной симметрии ферромагнетика. В поликристаллическом ферромагнетике следствием этого нарушения является дополнительный вклад в формирование стохастического распределения магнитного момента, известного как „рябь намагниченности“.

Феноменологическое описание деформационно-индуцированного взаимодействия Дзялошинского–Мория дано в работах [3–5]. Будем характеризовать деформированный ферромагнетик единичным вектором намагниченности  $\mathbf{n}$  и вектором смещения  $\mathbf{u}$ . Для кирального вклада в плотность энергии ферромагнетика имеем

$$\varepsilon_{DM} = \frac{1}{2} D_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \text{rot}_\alpha \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \text{rot}_i \mathbf{u} \right) \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} \right]_\alpha + \frac{1}{2} D_2 e_{ian} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \text{div} \mathbf{u} \right) \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} \right]_\alpha. \quad (1)$$

Первое слагаемое отвечает за влияние деформаций кручения/изгиба, а второе — за неоднородные деформации сжатия/растяжения,  $e_{ian}$  — тензор Леви–Чивита. Предполагается, что микроскопические механизмы, ответственные за эти вклады могут быть различными. Поэтому константы  $D_1$  и  $D_2$ , вообще говоря, различны. Из (1) следует, что деформации порождают неоднородные магнитные состояния, которые, однако, повышают обменную энергию ферромагнетика. Поэтому равновесные распределения намагниченности определяются минимизацией функционала энергии, включающего обменный вклад

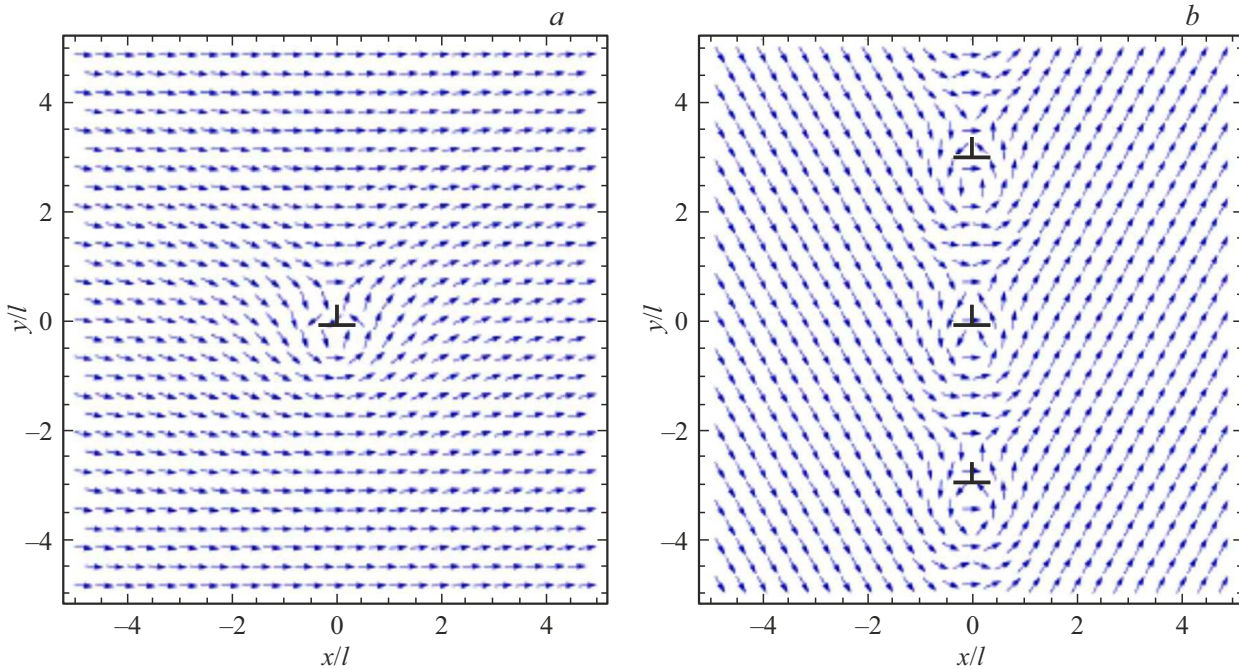
$$E = \int \left[ \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} \right)^2 + \varepsilon_{DM} \{ \mathbf{n} \} \right] dV, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — константа обменной „жесткости“. Ранее нами были найдены неоднородные магнитные состояния, индуцированные винтовой дислокацией [3]. В этой работе мы найдем неоднородные магнитные состояния вокруг краевой дислокации.

Рассмотрим влияние упругих деформаций, индуцированных одиночной краевой дислокацией. Пусть линия этой дислокации параллельна оси  $oZ$ , а вектор Бюргера ориентирован вдоль оси  $oX$ ,  $\mathbf{b} = (b, 0, 0)$ . Воспользуемся известными формулами для компонент вектора смещения, которые справедливы вдали от ядра дислокации [11]

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right\}, \quad (3)$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right\}, \quad (4)$$



*a* — распределение намагниченности, индуцированное одиночной краевой дислокацией, постоянный угол  $\theta_0$  выбран равным нулю; *b* — распределение намагниченности, индуцированное дислокационной стенкой при  $h/l = 3$ .

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. Используя выражения (3) и (4), легко рассчитать  $\text{rot } \mathbf{u}$  и  $\text{div } \mathbf{u}$

$$\text{rot } \mathbf{u} = -\frac{b}{\pi} \left( 0, 0, \frac{x}{x^2+y^2} \right); \quad \text{div } \mathbf{u} = -\frac{b}{2\pi} \frac{1-2\sigma}{(1-\sigma)} \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{5}$$

Таким образом, упругие деформации имеют как компоненты кручения, так и компоненты неоднородного сжатия. Подставляя (5) в (1), получим

$$\varepsilon_{DM} = \frac{1}{2} \tilde{D} \left\{ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \right]_z + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right]_z \right\}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{D} = \frac{b}{\pi} \left( D_1 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} D_2 \right).$$

Предполагая, что вектор намагниченности лежит в плоскости перпендикулярной линии дислокации и не зависит от координаты  $z$  вдоль этой линии  $\mathbf{n} = (\cos \theta(x, y), \sin \theta(x, y), 0)$ , энергия ферромагнетика на единицу длины дислокации примет вид

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} \alpha \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{\tilde{D}}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] dx dy, \quad f = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{7}$$

Варируя функционал энергии (7), для равновесного распределения угла  $\theta$  получим уравнение

$$\Delta \left( \theta - \frac{l}{2} f \right) = 0, \quad l = \frac{\tilde{D}}{\alpha}, \tag{8}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Решение этого уравнения

$$\theta = \theta_0 + \frac{lx}{x^2+y^2}, \tag{9}$$

где  $\theta_0$  — константа,  $l$  — характерная длина, зависящая от отношения констант взаимодействия Дзялошинского–Мория и обменной „жесткости“. Соответствующее распределение магнитного момента при  $\theta_0 = 0$  представлено на рис. *a*. В среднем по площади это распределение намагниченности не обладает киральностью, т.к. все компоненты тензора киральности  $\langle [\mathbf{n} \times \delta \mathbf{n} / (\delta x_i)] \rangle$  равны нулю.

Рассмотрим далее „стенку“ краевых дислокаций, представляющую собой одномерную периодическую решетку дислокаций, расположенных на расстоянии  $h$  друг от друга вдоль оси  $oY$ . Такое распределение дислокаций реализуется, например, на границе двух кристаллитов [12]. При этом расстояние между дислокациями определяется углом между кристаллографическими осями кристаллитов  $\Omega$ ,  $h \sim b/\Omega$ . Отметим, что разориентация кристаллитов может быть описана аксиальным вектором  $\Omega_{12}$ , направление которого указывает направление оси вокруг которой требуется вращать один из кристаллитов, а его модуль равен величине угла поворота на который нужно повернуть один из кристаллитов, чтобы совместить его с другим. Индексы указывают направление вращения от кристаллита „1“ к кристаллиту „2“,  $\Omega_{12} = -\Omega_{21}$ . В выбранной геометрии вектор  $\Omega_{12}$  направлен вдоль оси  $oZ$ . Учитывая линейность задачи о деформациях, выражение для энергии в случае „стенки“

дислокаций примет вид

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} \alpha \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{\tilde{D}}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial f_n}{\partial y} \right) \right] dx dy, \quad (10)$$

$$f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + (y - nh)^2)^2}.$$

Используя формулу суммирования Пуассона и ограничиваясь расстоянием  $x \geq h$ , выражение для суммы в (10) может быть существенно упрощено [11]. Для неоднородного распределения намагниченности, которое определяется углом  $\theta(x, y)$ , получим

$$\theta(x, y) = \theta_0 + \frac{\pi l}{h} \text{sign}(x) \left[ 1 + 2 \exp(-2\pi|x|/h) \cos \frac{2\pi y}{h} \right]. \quad (11)$$

Соответствующее распределение представлено на рис. *b*. Отметим что в отличие от распределения (9), это распределение намагниченности обладает киральностью, знак которой зависит от знака константы  $\tilde{D}$ . Действительно, магнитные моменты слева и справа от дислокационной „стенки“ оказываются развернутыми на угол  $\delta = 2\pi l/h$ . Как уже отмечалось, периодическая решетка дислокаций возникает на границе двух кристаллитов. Таким образом, граница кристаллитов в ферромагнетике индуцирует киральное распределение намагниченности. Отвлекаясь от „тонкой“ структуры распределения намагниченности вблизи „стенки“, энергия рассматриваемой системы может быть представлена в виде

$$E = -J(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) + D_{12} \cdot [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2], \quad (12)$$

где  $\mathbf{n}_{1,2}$  — вектора, определяющие направление намагниченности в первом и втором кристаллите соответственно. Первое слагаемое в (12) описывает обменное взаимодействие на границе кристаллитов ( $J > 0$ ), а второе слагаемое представляет собой энергию индуцированного деформациями „межкристаллитного“ взаимодействия Дзялошинского–Мория. Аксиальный вектор константе взаимодействия  $\tilde{D}$  и аксиальному вектору поворота кристаллитов  $\Omega_{12}$ . Таким образом, с точностью до константы, выражение (12) описывает разворот намагниченности (11). В реальном поликристаллическом образце усредненный вектор Дзялошинского равен нулю  $\langle \mathbf{D}_{12} \rangle = 0$ , т.к. краевые дислокации с противоположным направлением вектора Бюргера встречаются равномерно. Однако, указанный механизм приводит к дополнительному вкладу в формирование стохастического распределения намагниченности в ферромагнитном поликристалле („рябь“ намагниченности, см. работу [13]), которое следует учитывать при анализе его магнитных свойств.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим модель „одномерного“ поликристалла, в котором угол, на который повернуты кристаллографические оси каждого кристаллита зависит только от одной координаты  $x$ . Размеры кристаллитов вдоль оси  $OX$  одинаковы ( $d$ ) и не зависят от координат  $y, z$ . Обобщая формулу (12) на случай многих границ, запишем

$$E = \sum_n (-J \cos(\theta_n - \theta_{n-1}) + D_n \sin(\theta_n - \theta_{n-1})), \quad (13)$$

где  $\theta_n$  — угол, определяющий направление намагниченности в кристаллите с номером  $n$ ,  $D_n$  — константа Дзялошинского–Мория на границе кристаллитов  $n, n-1$ . Как отмечалось, эта константа зависит от угла между кристаллографическими осями соседних кристаллитов  $D_n = D\Omega_n$  и, в случае поликристалла, является случайной величиной, зависящей от номера границы. Минимизируя (13) по  $\theta_n$  и предполагая, что угол разориентации магнитных моментов в соседних кристаллитах мал, получим

$$J(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) + D_n - D_{n+1} = 0. \quad (14)$$

Считая, что намагниченность медленно изменяется на масштабах  $\sim d$ , перейдем от разностных уравнений к дифференциальным и получим

$$\theta(x) = -\frac{D}{J \cdot d} \int_0^x \Omega(y) dy, \quad (15)$$

где  $\Omega(y)$  — случайная величина, которую будем считать гауссовой и  $\delta$ -коррелированной. Последнее предположение означает отсутствие корреляций углов поворота на соседних границах кристаллитов

$$\langle \Omega(y) \cdot \Omega(y_1) \rangle = \omega^2 d \delta(y - y_1), \quad (16)$$

где  $\omega^2$  — дисперсия углов между кристаллитами, среднее значение угла разворота равно нулю. Отметим, что в силу соотношения (15)  $\theta(x)$  также является гауссовой случайной величиной. Определение корреляционной функции магнитных моментов

$$\langle \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{M}(x_1) \rangle = \langle \cos(\theta(x) - \theta(x_1)) \rangle$$

сводится к усреднению характеристического функционала от гауссовой случайной величины

$$\langle \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{M}(x_1) \rangle = \left\langle \exp \left( i \int \theta(\tilde{x}) U(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) \right\rangle,$$

$$U(\tilde{x}) = \delta(\tilde{x} - x) - \delta(\tilde{x} - x_1).$$

Известно, что это среднее равно [14]

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{M}(x_1) \rangle &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint \langle \theta(\tilde{x}) \cdot \theta(\tilde{x}_1) \rangle U(\tilde{x}) U(\tilde{x}_1) d\tilde{x} d\tilde{x}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая (15), (16), для коррелятора магнитного момента получаем

$$\langle \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{M}(x_1) \rangle = \exp(-|x - x_1|/L_c). \quad (18)$$

Таким образом, в рамках рассмотренной модели корреляции намагниченности спадают экспоненциально на длине

$$L_c = \frac{2d}{\omega^2} \left( \frac{J}{d} \right)^2.$$

Так как  $J \gg D$ , то  $L_c \gg d$  и наше приближение, сделанное при переходе от разностного уравнения (14) к (15), справедливо. Интересно сравнить полученный результат с известной оценкой масштаба магнитной стохастической структуры, возникающей при учете случайной магнитной анизотропии (см., например, работу [15]), когда масштаб „ряби“ намагниченности определяется отношением размера кристаллита к толщине доменной стенки  $l_w \sim \sqrt{K/J}$ ,  $K$  — константа анизотропии. В одномерном случае эта модель дает  $l_c \sim l_w(l_w/d)^{4/3}$ . Детальный анализ влияния „межкристаллитного“ взаимодействия Дзялошинского–Мория на свойства ферромагнитных поликристаллов выходит за рамки данной работы.

## Благодарности

Автор благодарит Р.В. Горева за помощь в оформлении рисунков.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 25-22-00126.

## Список литературы

- [1] I.E. Dzyaloshinskii. Sov. Phys. JETP **5**, 1259 (1957).
- [2] Т. Мория. Phys. Rev. **120**, 91 (1960).
- [3] А.А. Фраерман. ЖЭТФ **163**, 822 (2023).
- [4] М.А. Kuznetsov, А.А. Fraerman. arxiv.org/2511.21400
- [5] A. Kitchaev, I.J. Beyerlein, A. Van der Ven. Phys. Rev. B **98**, 214414 (2018).
- [6] Y. Zhang, J. Liu, Y. Dong et al. Phys. Rev. Lett. **127**, 117204 (2021).
- [7] A. Arrott. J. Appl. Phys. **34**, 1108 (1963).
- [8] K.L. Metlov, A. Michels. Phys. Rev. B **91**, 054404 (2015).
- [9] K.L. Metlov, K. Suzuki, D. Honecker, A. Michels. Phys. Rev. B **101**, 214410 (2020).
- [10] A.V. Butenko, U.K. Röbfler. EPJ Web of Conf. **40**, 08006 (2013).
- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987).
- [12] Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, М. (1972).
- [13] E.M. Chudnovsky, W.M. Saslow, R.A. Scrota. Phys. Rev. B **33**, 251 (1986).
- [14] С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Наука, М. (1978).
- [15] А.А. Берзин, А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **64**, 3 (2022).

Редактор А.Н. Смирнов