01

Корреляционные соотношения, тепловое излучение и поглощение для графена

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: davidovichmv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 27 октября 2025 г.
В окончательной редакции 28 февраля 2026 г.
Принято к публикации 5 марта 2026 г.

Используя метод Рытова–Левина–Лифшица введения флуктуационных источников тока в уравнения Максвелла, найдены поля и их корреляции, выраженные через указанные поверхностные флуктуационные источники (плотности поверхностного тока) на одном импедансном листе в равновесном тепловом поле. Импедансный лист может соответствовать графену или другому двумерному материалу. Рассмотрение ведется с использованием классических вакуумных функций Грина электродинамики на основе пространственно-спектральных преобразований Фурье. Рассмотрена задача о возбуждении графена диполем, и получены корреляционные соотношения по методу Левина–Рытова. Найдено тепловое излучение графена.

Ключевые слова: графен, корреляционные соотношения, дисперсионные силы.

DOI: 10.61011/JTF.2026.07.63120.298-25

Введение

Для определения дисперсионных сил или сил Казимира–Лифшица и теплового излучения необходимы корреляционные соотношения (КС) для полей $< \mathbf{E}, \mathbf{E} >$ и $< \mathbf{H}, \mathbf{H} >$, которые входят в тензор напряжений Максвелла (ТНМ) $\hat{T}$. Интеграл от нормальной компоненты последнего по поверхности тела (с внутренней нормалью) определяет втекающий в него импульс поля, т. е. переданный ему импульс [1–3] и дисперсионную силу [1,3–7]. Обычно для однородной среды КС для полей получаются из флуктуационно-диссипационной теоремы [4–6]. Также их можно получить, исходя из принципа детального равновесия Кирхгофа: в равновесной системе тело на каждой частоте излучает столько, сколько поглощает [4]. Это сразу позволяет получить КС для плотностей флуктуационного тока в явном виде для толстой пластины, зависящие только от диссипации в ней и одинаковые для всех ее точек [4] (в системе СИ):

$$\langle J_l^0(\mathbf{r}), J_k^0(\mathbf{r}')\rangle = \omega\varepsilon''(\omega)\delta_{lk}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Theta(\omega,T)/\pi. \qquad (1)$$

В системе Гаусса следует разделить правую часть (1) на 4π. Здесь введена средняя энергия квантового осциллятора $\Theta(\omega, T)$ [4] и использована скалярная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$. Обобщение (1) для тензорной проницаемости с пространственной дисперсией весьма простое [4]. Корреляционные соотношение (1) понимаются как статистическое усреднение по ансамблю Гиббса произведения первого члена на комплексно сопряженный второй. В силу соотношения $\mathbf{J}(\omega) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1)\mathbf{E}(\omega)$ их можно записать и для случайных полей [5]. Однако эти соотношения связаны только с тепловыми флуктуациями и не учитывают вакуумные нулевые флуктуации. В отсутствии диссипации при нуле температуры (для идеального диэлектрика в этом случае $\varepsilon'' = 0$) тела также взаимодействуют за счет вакуумных флуктуаций [7,8], поскольку изменяют граничные условия. Используя (1), подставляя $J_\alpha^0(\mathbf{r}) = j_\alpha^0(x,y)\delta(z)$, $\sigma(x,y) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon(x,y,z)-1)\delta(z)$, из (1) для листа графена получим КС вида

$$\langle j_\alpha^0(\boldsymbol{\rho}), j_\beta^0(\boldsymbol{\rho}')\rangle = \sigma'(\omega)\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\Theta(\omega,T)/\pi, \qquad (2)$$

в которые входит реальная часть проводимости. Их можно записать в спектральном виде

$$\langle j_\alpha^0(\mathbf{q}), j_\beta^0(\mathbf{q}')\rangle = 4\pi\sigma'(\omega)\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\Theta(\omega,T).$$

Далее двумерные плотности токов мы описываем через дельта-функции, например, $\mathbf{J}(x,y,z) = \mathbf{j}(x,y)\delta(z)$. Используем пространственные спектральные функции для полей и плотности тока в виде интегралов от них с величиной $\exp(i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})dxdy$, а также и обратные фурье-преобразования как интегралы от $(2\pi)^{-2}\mathbf{j}(k_x,k_y)\exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})dk_xdk_y$ (в случае поверхностного тока). Также используем обозначения $\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} = k_xx + k_yy$, $\tilde{k}_z = -i\kappa = \sqrt{k_0^2 - q^2}$, $|\mathbf{q}|^2 = q^2 = k_x^2 + k_y^2$, $y_e = \tilde{k}_z/\tilde{k}_0 = 1/y_h$, $y_{e,h} = 1/\rho_{e,h}$, $\tilde{d}(q,d) = \exp(-\kappa d) = \exp(-i\tilde{k}_zd)$. Реальные части обозначаем штрихом, мнимые — двойным штрихом. Вводим безразмерную проводимость $\xi = \sigma\eta_0$, $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\Omega$ и комплексную величину $\eta = \xi/(2ik_0\kappa) = -\xi/(2k_0\tilde{k}_z)$, обратную квадрату длины. Ее ведение позволяет записать более компактно ряд формул. Проводимость считаем скалярной без учета пространственной дисперсии. Это весьма хорошее приближение для корреляционных сил, поскольку основное влияние в них оказывают низкие частоты [1,4–8].

КС (1) получены для толстой пластины [4], а графен таковой структурой не является. В случае одного листа на нем существует только флуктуационная плотность $\mathbf{j}_1^0(x, y)$ за счет взаимодействия с тепловым полем. Она возникает за счет поглощения излучения и она же создает излученное тепловое поле. Определяя излученное источником тепловое поле и приравнивая его к тепловым потерям на графене за счет планковской плотности излучения, можно найти КС [9]. В случае возбуждения графена диполем (или при наличии второго листа) возникает также дифракционная компонента. Все случайные величины имеют нулевые средние и определены через корреляции. Сначала мы рассматриваем графен как бесконечный лист тока, обладающий поверхностной проводимостью σ или импедансом $\rho = \sigma^{-1}$. Конечный лист рассмотрим далее. Учет тензорной проводимости σ_{xx}, σ_{yy}, приведенной к главным осям, не представляет труда. Однако различие этих компонент в графене невелико, а пространственная дисперсия на низких частотах слабая. Для определения дисперсионного взаимодействия двух листов графена, согласно [4], также следует рассмотреть их возбуждение диполями. Это несколько более сложная задача здесь не рассматривается.

Планковская спектральная плотность энергии равновесного излучения есть [4]:

$$u_p(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi c^3}\,\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi c^3}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}\right). \quad (3)$$

Здесь учтены и „нулевые“ флуктуационные колебания вакуума. При переносе тепла их будем исключать, что будем обозначать штрихом $\Theta'(\omega, T)$, опуская в (1) в скобке 1/2. Формально тепловое излучение можно учитывать в уравнениях Максвелла как стороннее поле [1]. Используем концепцию Рытова–Левина–Лифшица введения в уравнения Максвелла сторонних флуктуационных источников, эквивалентных действию указанного поля. Тогда вместо стороннего теплового поля $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ таких источников, следует вводить сами эти источники $\mathbf{J}^0$. В случае одиночного листа поверхностные источники расположены при $z = 0$, а спектральные уравнения Максвелла приобретают вид

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{j}_1^0(x, y)\delta(z),$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = -i\omega\mu_0\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}).$$

Для двух и более листов можно просто добавить соответствующие токи. При этом возникают и дифракционные компоненты плотностей токов $\mathbf{j}_{1,2}^d(x, y)$, связанные с взаимодействием листов. Определив индукцию $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) + \sigma\mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{r})\delta(z)/\omega$, первое уравнение можно записать в виде

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{j}_1^0(x, y)\delta(z). \quad (4)$$

Индексом „0“ сверху обозначены поверхностные флуктуационные источники, эквивалентные действию теплового поля, а индексом „d“ — дифракционные источники, возникающие за счет дифракции флуктуационного поля на листах и описывающие импедансные свойства листов: $\mathbf{j}_{1,2}^d = \sigma\mathbf{E}$. Индекс d будем опускать. Индекс τ везде означает поперечные координаты (x, y). В случае одного листа в тепловом поле дифракционные источники не возникают. Флуктуационные же источники определяют поля $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Давление теплового поля $p(\omega, T) = k_0^2\Theta'(\omega, T)/(3\pi^2 c)$ с обеих сторон листа одинаковое, поэтому два листа взаимодействуют за счет корреляций токов.

Цель настоящей работы — рассмотреть возбуждение листа диполями, определить КС для листа графена и его тепловое излучение. КС определяются двумя способами: на основе принципа Кирхгофа и путем решения задачи о возбуждении импедансного листа точечными диполями. Дисперсионное взаимодействие двух листов может быть получено с использованием решения задачи о возбуждении двух листов диполями с использованием ТНМ, а также с использованием корреляций и силы Лоренца [4]. Это — дальнейшая задача, требующая отдельного решения. Следует отметить, что ее решение может быть получено на основе формулы Лифшица [1], в которую следует подставлять коэффициенты отражения E-мод и H-мод от листа графена $R_{e,h} = -\xi/(2y_{e,h} + \xi)$ (см. формулу (21.12) в [7]). Также решение этой задачи дается формулой Ван–Кампена [10–13], в которую входят дисперсионные функции $f_{e,h}(\mathbf{q}, k_0)$ E-мод и H-мод плазмон-поляритонов (ПП) для двух листов графена. Нули этих функций $f_{e,h}(\mathbf{q}, k_0) = 0$ определяют дисперсию медленных эванесцентных и быстрых излучаемых ПП, которая рассмотрена, например, в работах [14–16]. Под интегралом в формуле Ван–Кампена стоят величины $f_{e,h}^{-1}(\mathbf{q}, k_0)$, определяющие согласно принципу аргумента „суммы“ энергий квантовых осцилляторов, аналогично подходу работы [8]. В работах [10–13] показано, что формула Ван–Кампена полностью совпадает с формулой Лифшица. Заметим, что в работе [17] формула Лифшица также получена без привлечения ТНМ из вариационного принципа.

1. Возбуждение импедансного листа диполем

Расположенный при $z = z_0$, $x = y = 0$ с моментом $\mathbf{p}_e = \mathbf{x}_0 p_e$ вдоль оси x диполь $\mathbf{J}(x, y, z) = \mathbf{p}_e\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$ имеет вектор-потенциал [18]:

$$\mathbf{A}_d(x,y,z)=\mathbf{p}_e G(x,y,z-z_0),$$

$$\mathbf{A}_d(x,y,z)=\frac{\mathbf{p}_e}{8\pi^2}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-ik_x x-ik_y y-i\tilde{k}_z|z-z_0|)}{i\tilde{k}_z}\,d^2k, \qquad (5)$$

где использована функция Грина (ФГ)

$$G(x,y,z-z_0)=\frac{1}{4\pi r}\exp(-ik_0 r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}-i\tilde{k}_z(z-z_0)\right)}{k_x^2+k_y^2+k_x^2-k_0^2+i0}\,d^3k,$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$, $d^2k=dk_xdk_y=qdqd\varphi$. По своему смыслу p_e определяет плотность тока и имеет размерность [A·m], т.е. является производной по времени от обычного дипольного момента. Компонента E_x его электрического поля возбуждает компоненту $j_x(x,y)=\sigma E_x(x,y,0)$, а компонента E_y соответственно $j_y(x,y)=\sigma E_y(x,y,0)$. При $\mathbf{p}_e=\mathbf{x}_0 p_e$ имеем компоненты падающего поля диполя на графене [18]:

$$E_{dx}(x,y,0)=p_e\frac{k_0^2+\partial_x^2}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\frac{\exp(-ik_0r)}{r},$$

$$E_{dy}(x,y,0)=p_e\frac{\partial_y\partial_x}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\frac{\exp(-ik_0r)}{r},$$

причем производные от $\exp(-ik_0r)/r$ определяются по формулам (2.118) из [18]. Они имеет особенность в нуле и убывают с ростом r. Однако свернутый вид ФГ не удобен для нашей задачи, как не удобен и полностью развернутый вид. Мы будем использовать ФГ

$$G(x,y,z-z_0)=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-i\mathbf{q}\mathbf{p}-i\tilde{k}_z|z-z_0|\right)}{i\tilde{k}_z}\,d^2k, \qquad (6)$$

согласно которой определена компонента (5). Через нее x-компоненту на графене можно записать и так:

$$E_{dx}(x,y,0)=\frac{p_e}{7\pi^2}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}(k_x^2-k_0^2)\frac{\exp(-ik_xx-ik_yy-i\tilde{k}_z|z_0|)}{\omega\varepsilon_0\tilde{k}_z}\,d^2k,$$

а для y-компоненты надо заменить $(k_x^2-k_0^2)\to k_xk_y$. Для рассеянного поля, возбуждаемого плотностями тока на листе, имеем

$$E_x(x,y,0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(k_x^2-k_0^2)j_x(q)+k_xk_yj_y(q)}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\tilde{k}_z}\times\exp(-ik_xx-ik_yy)d^2k,$$

и аналогично для E_y при замене $x\leftrightarrow y$. Здесь использованы фурье-трансформанты. Указанные представления определяют ПП как излучаемые (при $q<k_0$), так и затухающие (при $q>k_0$), причем затухание в точке z происходит по закону (при $q<k_0$) $\exp(-\kappa|z-z_0|)$. Обозначим $\tilde{d}_0=\exp(-i\kappa|z_0|)$. В более общем случае вводим функцию $\tilde{d}(q,z)=\exp(-\kappa|z_0|))$. Для компонент полных полей должны выполняться условия $j_x(x,y)=\sigma E_x(x,y,0)$, $j_y(x,y)=\sigma E_y(x,y,0)$. Переходя к спектральным величинам, с учетом $\eta=-\xi/(2k_0\tilde{k}_z)$ имеем

$$j_x(\mathbf{q})=p_{ex}\tilde{d}_0\times\frac{\eta(k_0^2-k_x^2)\left[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\right]+(\eta k_xk_y)^2}{\left[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\right]\left[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\right]-(\eta k_xk_y)^2}, \qquad (7)$$

$$j_y(\mathbf{q})=p_{ex}\tilde{d}_0\times\frac{\eta k_xk_y\left[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\right]+\eta^2k_xk_y(k_0^2-k_x^2)}{\left[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\right]\left[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\right]-(\eta k_xk_y)^2}. \qquad (8)$$

Рассеянное графеном в точке z поле с использованием (7), (8) имеет множитель $\exp(-i\tilde{k}_z|z-z_0|)/\tilde{k}_z$. При $q<k_0$ в дальней зоне это излученное поле. Оно имеет вид несимметричной сферической волны, разложенной по неоднородным плоским волнам. К нему следует добавить и поле самого диполя в дальне зоне $E_{dx}(x,y,0)=p_e\eta_0k_0\exp(-ik_0r)/(4\pi ir)$. При $q>k_0$ в дальней зоне рассеянное поле исчезает. Если диполь ориентирован по оси y, достаточно поменять $x\leftrightarrow y$. Если диполь ориентирован по оси z, то

$$E_{dx}(x,y,0)=\frac{-p_{ez}}{8\pi^2}\operatorname{sgn}(z_0)\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_x\frac{\exp(-ik_xx-ik_yy-i\tilde{k}_z|z_0|)}{\omega\varepsilon_0}\,d^2k,$$

а $E_{dy}(x,y,0)$ получается заменой $k_x\leftrightarrow k_y$. Переходя к спектральным величинам, имеем

$$j_x(\mathbf{q})=\frac{p_{ez}\tilde{d}_0\eta k_x\tilde{k}_z(\eta k_0^2-1)}{\left[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\right]\left[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\right]-(\eta k_xk_y)^2}, \qquad (9)$$

$$j_y(\mathbf{q})=\frac{p_{ez}\tilde{d}_0\eta k_y\tilde{k}_z(\eta k_0^2-1)}{\left[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\right]\left[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\right]-(\eta k_xk_y)^2}. \qquad (10)$$

Для магнитного диполя вводим магнитный вектор-потенциал

$$\mathbf{A}^m(x,y,z)=\frac{\mathbf{p}_m}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-ik_xx-ik_yy-i\tilde{k}_z|z-z_0|)}{i\tilde{k}_z}\,d^2k. \qquad (11)$$

Вектор $\mathbf{p}_m$ имеет размерность [V·m] и определяет магнитную плотность тока. Определяя $\mathbf{E}^m = -\nabla \times \mathbf{A}^m$, имеем падающее поле диполя при ориентировании его по оси x: $E_{mx} = 0$,

$$E_{my}(x, y, z) = -\frac{p_{mx}}{8\pi^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-ik_x x - ik_y y - i\tilde{k}_z|z - z_0|\Big) d^2k.$$

В этом случае компонента j_x не возбуждается, и имеем решение

$$j_y(\mathbf{q}) = -\frac{p_{mx}\eta_0^{-1}\xi\tilde{d}_0}{1 + \eta(k_y^2 - k_0^2)}. \tag{12}$$

При ориентации вдоль оси y будет $E_{my} = 0$, $j_y = 0$,

$$E_{mx}(x, y, z) = -\frac{p_{my}}{8\pi^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-ik_x x - ik_y y - i\tilde{k}_z|z - z_0|\Big) d^2k,$$

$$j_x(\mathbf{q}) = -\frac{p_{mx}\eta_0^{-1}\tilde{d}_0\xi}{\Big[1 + \eta(k_x^2 - k_0^2)\Big]}. \tag{13}$$

Здесь использована нормированная проводимость $\xi = \sigma\eta_0$. При ориентации вдоль оси z:

$$E_{mx}(x, y, z) = -\frac{p_{mz}}{8\pi^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} k_y \frac{\exp\Big(-ik_x x - ik_y y - i\tilde{k}_z|z - z_0|\Big)}{\tilde{k}_z} d^2k,$$

компонента $E_{my}(x, y, z)$ получается заменой $x \leftrightarrow y$ и изменением знака, при этом

$$j_x(\mathbf{q}) = -\frac{p_{mz}\eta_0^{-1}\tilde{d}_0\xi k_y\Big[1+\eta(k_y^2-k_0^2)\Big]/\tilde{k}_z + p_{mz}\eta_0^{-1}\tilde{d}_0\xi\eta k_x^2 k_y/\tilde{k}}{\Big[1 + \eta(k_x^2 - k_0^2)\Big]\Big[1 + \eta(k_y^2 - k_0^2)\Big] - (\eta k_x k_y)^2}, \tag{14}$$

$$j_y(\mathbf{q}) = -\frac{p_{mx}\eta_0^{-1}\tilde{d}_0\xi k_x\Big[1+\eta(k_x^2-k_0^2)\Big]/\tilde{k}_z + p_{mz}\eta_0^{-1}\tilde{d}_0\xi\eta k_y^2 k_x/\tilde{k}}{\Big[1 + \eta(k_x^2 - k_0^2)\Big]\Big[1 + \eta(k_y^2 - k_0^2)\Big] - (\eta k_x k_y)^2}. \tag{15}$$

Эти соотношения дают решение задачи о возбуждении импедансного листа магнитным диполем. Тепловое поле при этом не рассматривалось. Для листа графена в тепловом поле компонента E_x в точке расположения диполя при $p_e = 1$ определяет корреляцию [4] $< E_x, E_x >$. Мы далее положим $z_0 = 0$. Учитывая связь $\varsigma = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - 1)$ удельной проводимости ς с диэлектрической проницаемостью, переходя к поверхностной проводимости $\varsigma = \sigma\delta(z)$ и к поверхностной плотности тока $\mathbf{j} = \mathbf{J}_\tau\delta(z)$, а также учитывая корреляционные соотношения

$$\langle J_\alpha(\mathbf{r}), J_\beta(\mathbf{r}')\rangle = -i\omega\varepsilon_0\Theta(\omega, T)\,(\varepsilon^*(\omega) - \varepsilon(\omega)) \times\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/(2\pi),$$

найдем для графена

$$\langle j_\alpha^0(\mathbf{q}), j_\beta^0(\mathbf{q}')\rangle = F(\omega)\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')\Theta(\omega, T), \tag{16}$$

где $F(\omega) = 4\pi\sigma'(\omega)$. Далее считаем, что функция F подлежит определению.

2. Лемма Лоренца и корреляции

Пусть диполь вдоль оси x возбуждает графен в тепловом поле. Электрическое и магнитное поле удовлетворяют следующим уравнениям Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1(x, y)\delta(z) + \mathbf{x}_0 p_1\delta(x_1)\delta(y_1)\delta(z_1), \tag{17}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -i\omega\mu_0\mathbf{H}_1. \tag{18}$$

Плотность тока $\mathbf{j}_1(x, y)$ наведена диполем и определяется по вышеприведенным формулам, причем $\mathbf{j}_1(x, y) = \sigma\mathbf{E}_{1\tau}(x, y)$. Диполь смещен в точку (x_1, y_1, z_1) от нуля системы координат. Пусть другой диполь, смещенный в точку (x_2, y_2, z_2), также возбуждает графен. Результат отличается от (17) и (18) заменой 1 на 2. Применяя комплексную лемму Лоренца к двум полям во всем пространстве, имеем

$$\begin{aligned} p_1E_{2x}^*(x_1, y_1, z_1) + p_1E_{1x}(x_2, y_2, z_2) = 4Q \\ = -i\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\mathbf{E}_1(x, y, z)\mathbf{E}_2^*(x, y, z) \\ - \mathbf{E}_2^*(x, y, z)\mathbf{E}_1(x, y, z)\Big]dxdydz \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sigma\mathbf{E}_1(x, y, 0)\mathbf{E}_2^*(x, y, 0) \\ + \sigma^*\mathbf{E}_{2\tau}^*(x, y, 0)\mathbf{E}_1(x, y, z)\Big]dxdy. \end{aligned} \tag{19}$$

Первый интеграл в правой части (19) есть нуль, поэтому для смешенных тепловых потерь двух полей на графене получаем

$$Q = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sigma\mathbf{E}_{1\tau}(x, y, 0)\mathbf{E}_2^*(x, y, 0) + \sigma^*\mathbf{E}_{2\tau}^*(x, y, 0)\mathbf{E}_1(x, y, z)\Big]dxdy.$$

Если поля 1 и 2 совпадают и взяты для диполя с единичным моментом, то

$$\mathrm{Re}E_{1x}(x, y, z) = 2Q,$$

т. е. флуктуационное поле определяется через дифракционые потери. В общем случае электрического и магнитного диполей $\mathbf{J}_d = \mathbf{p}_e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, $\mathbf{J}_m = \mathbf{p}_m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ в силу леммы Лоренца имеем

$$\mathbf{p}_e\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0e}(x, y, 0)\mathbf{j}_{1,e}(x, y)dxdy,$$

$$\mathbf{p}_m\mathbf{H}(\mathbf{r}_2) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0m}(x, y, 0)\mathbf{j}_{1,e}(x, y)dxdy,$$

где $\mathbf{E}_{0e}$, $\mathbf{E}_{0m}$ — поля диполей, $\mathbf{j}_{1,e}$ — флуктуационная плотность электрического тока. Направив электрический диполь по оси x, получим

$$\langle E_x(x, y, 0), E_x(x, y, 0)\rangle = \frac{F(\omega, T)\Theta(\omega, T)}{p_e^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} |E_{0\alpha}(x, y, 0)|^2 dxdy. \quad (20)$$

Здесь $F(\omega, T) = \sigma'(\omega, T)/\pi$ и мы преобразовали четырехкратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{0\alpha}(x, y, 0)E_{0\beta}(x', y', 0)\langle j_{e\alpha}(x, y), j_{e\beta}(x', y')\rangle dxdydx'dy',$$

используя (15). Размерность слева и справа в (20) J^2/s, поскольку корреляции предполагаются спектральными, т. е. взятыми для полосы 1 Hz. Далее их следует интегрировать по частоте. Полагая $p_{ex} = 1\,\mathrm{A{\cdot}m}$, мы оставляем размерность [$\mathrm{J/m^2}$]. Это спектральная плотность. После интегрирования по частоте получаем $\mathrm{W/m^2}$. Корреляция оказалась пропорциональной тепловым дифракционным потерям поля диполя $\langle E_x(x, y, 0), E_x(x, y, 0)\rangle = 2\Theta(\omega, T)Q/\pi$. Это общее правило [4], согласно которому если A и B какие-либо из шести компонент флуктуационного поля, $\mathbf{J}_1 = \mathbf{p}_{1(e.m)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ и $\mathbf{J}_2 = \mathbf{p}_{2(e.m)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ — единичные точечные источники электрического и/или магнитного типа ($|\mathbf{p}_{n1(e.m)}| = 1$), а $Q_{AB}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — смешанные дифракционные тепловые потери, то для корреляций имеем [4]:

$$\langle A(\mathbf{r}_1)B(\mathbf{r}_2)\rangle = \pm 2\Theta(\omega, T)Q_{AB}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)/\pi. \quad (21)$$

Знак плюс берется, если компоненты одного типа (электрического или магнитного), а минус — при компонентах разного типа. Если $A = B$, то $\langle A(\mathbf{r}_1)A(\mathbf{r}_2)\rangle = \pm 2\Theta(\omega, T)Q_{AB}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)/\pi$. Для изотропной диэлектрической (немагнитной) среды тепловые потери следует определить как

$$Q_{AB}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -i\frac{\omega}{4}\int_{-\infty}^{\infty}(\varepsilon^*(\omega, \mathbf{r}) - \varepsilon(\omega, \mathbf{r}))\mathbf{E}_0^A\mathbf{E}_0^{B*}d^3r.$$

Индекс ноль означает поле соответствующего диполя, верхний индекс означает направление диполя. Введем обозначения для единичных дипольных моментов $\mathbf{p}_e = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{p}_m = \mathbf{m}_0$, $e_0 = 1\,\mathrm{A{\cdot}m}$ и $m_0 = 1\,\mathrm{V{\cdot}m}$. Учитывая (20), для корреляций флуктуационных компонент в тепловом поле можно записать [4]:

$$\langle E_{p_{1e}}(\mathbf{r}_1), E_{p_{2e}}(\mathbf{r}_2)\rangle = -\Theta(\omega, T)\mathrm{Re}(\mathbf{e}_{02}\mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}_2))/(\pi e_0^2),$$

$$\langle H_{p_{1m}}(\mathbf{r}_1), H_{p_{2m}}(\mathbf{r}_2)\rangle = -\Theta(\omega, T)\mathrm{Re}(\mathbf{m}_{02}\mathbf{H}_{01}(\mathbf{r}_2))/(\pi m_0^2),$$

$$\langle E_{p_{1e}}(\mathbf{r}_1), H_{p_{2e}}(\mathbf{r}_2)\rangle = i\Theta(\omega, T)\mathrm{Im}(\mathbf{m}_{02}\mathbf{H}_{01}(\mathbf{r}_2))/(\pi e_0 m_0) = -i\Theta(\omega, T)\mathrm{Im}(\mathbf{e}_{01}\mathbf{E}_{02}(\mathbf{r}_1))/(\pi e_0 m_0). \quad (22)$$

Эти корреляции пропорциональны проекциям полей диполей, т. е. имеют место даже в отсутствии диссипации. Единичные величины можно не писать, подразумевая соответствующие размерности. Соотношения (22) в частности показывают, что средний вектор Пойнтинга равен нулю, т. е. падающий на графен и отраженный поток теплового поля одинаковые, а электрические и магнитное поля не коррелированы.

Пусть имеет место задача (17), (18). В качестве второй задачи для леммы Лоренца возьмем графен в тепловом поле:

$$\nabla \times \mathbf{H}_3 = i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_3 + \mathbf{j}_3(x, y)\delta(z), \quad (23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_3 = -i\omega\mu_0\mathbf{H}_3. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{j}_3$ — флуктуационные источники. Применяя лемму Лоренца в случае, когда диполь расположен в произвольной точке (x, y, z), имеем

$$p_1E_{3x}^*(x, y, z) = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_{1x}(x, y, 0)\mathbf{j}_3^*(x, y)dxdy = -\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^*\mathbf{E}_{1x}(x, y, 0)E_{3x}^*(x, y)dxdy.$$

Положим $p_1 = 1$ и образуем корреляцию $\langle E_{3x}(x, y, z), E_{3x}^*(x', y', z')\rangle$. Преобразовывая интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{1x}(x, y, 0)E_{3x}^*(x, y, 0)\langle\mathbf{j}_3^*(x, y), \mathbf{j}_3^*(x', y')\rangle dxdydx'dy'$$

с использованием $\langle\mathbf{j}_3^*(x, y), \mathbf{j}_3^*(x', y')\rangle = F(\omega, T)\Theta(\omega, T)$ $\delta(x - x')\delta(y - y')$, получим ту же формулу (20).

3. Тепловое излучение и поглощение графена

Графен поглощает из теплового поля удельную (на единицу площади) мощность $P = \mathrm{Re}(\mathbf{j}^0\mathbf{E}^{0*})/2 = \mathrm{Re}(\sigma|\mathbf{E}_\tau^0|^2)/2 = \sigma'|\mathbf{E}_\tau^0|^2/2$. Здесь введены флуктуационные поле и плотность тока, т.е.

$$|\mathbf{E}_\tau^0|^2 = \langle \mathbf{E}_\tau^0, \mathbf{E}_\tau^0\rangle = \langle E_\alpha^0, E_\alpha^0\rangle = 2\langle E_x^0, E_x^0\rangle$$

$$= 2\langle E_y^0, E_y^0\rangle = \frac{2\Theta'(\omega, T)}{\pi}\,\mathrm{Re}(\mathbf{E}_{0x}(x, y, 0)),$$

где $\mathbf{E}_{0x}(x, y, 0)$ — поле диполя, возбуждающего графен. Графен излучает такую же мощность

$$P = \frac{\sigma'\Theta'(\omega, T)}{\pi}\,\mathrm{Re}(\mathbf{E}_{0x}(x, y, 0)). \tag{25}$$

Используем спектральную плотность теплового излучения $u_p(\omega) = \Theta'(\omega, T)\omega^2/(\pi^2 c^3)$. Штрих означает, что нулевые колебания опушены, т.е. $\Theta'(\omega, T) = \hbar\omega f_{BE}(\omega, T)$, где обозначена функция Бозе–Эйнштейна. Полная плотность получается интегрированием по положительным частотам и равна $U = 4\sigma_{SB}T^4/c$ (σ_{SB} — постоянная Стефана–Больцмана). Тепловое поле можно рассматривать как набор плоских случайных волн разных направлений, имеющих одинаковые амплитуды, зависящие от частоты. Каждая волна с амплитудой E_0 имеет среднюю плотность энергии $\varepsilon_0 E_0^2/2$ (с учетом магнитной энергии). Учитывая движение во всем телесном угле, имеем спектральную плотность квадрата средней амплитуды волны любого направления $\langle E_0^2\rangle = \Theta'(\omega, T)k_0^2/(2\pi^3 c\varepsilon_0)$ или $\langle E_0^2\rangle = \eta_0\Theta'(\omega, T)k_0^2/(2\pi^3)$. При малой проводимости графен слабо изменяет граничные условия, поэтому можно считать, что плотность энергии на графене равна u_p. Тогда получим спектральную плотность поглощенной мощности:

$$P = \sigma'\langle|\mathbf{E}_\tau^0|^2\rangle/2 = \sigma'\langle|E_x^0|^2 + |E_y^0|^2\rangle/2 = 2\sigma' u_p(\omega)/(3\varepsilon_0),$$

т.е. тепловые потери определяются в виде $Q(\omega) = 2\sigma'\eta_0\Theta'(\omega, T)k_0^2/(3\pi^2)$. Поглощаемую мощность также можно определить, рассматривая тепловое поле как набор плоских волн всех направлений [9] с амплитудой E_0. Такие волны можно рассматривать как падающие с обеих сторон E-волны и H-волны. Пусть такая волна падает под углом θ в плоскости x, z. Вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости, перпендикулярной лучу и имеет проекции амплитуд $E_{0\perp} = E_0\cos(\varphi')$, $E_{0y} = E_0\sin(\varphi')$, $E_{0\perp} = E_{0x}^2 + E_{0z}^2$. Здесь угол φ' отсчитывается вокруг луча от плоскости падения. В самой плоскости падения

$$E_x = E_0\cos(\theta)\exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\Big[\exp(-ik_z z) + R_e\exp(ik_z z)\Big],$$

$$E_z = E_0\sin(\theta)\exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\Big[\exp(-ik_z z) + R_e\exp(ik_z z)\Big],$$

где $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$. Прошедшая волна имеет поперечную компоненту

$$E_x = E_0\cos(\theta)T_e\exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\Big[\exp(-ik_z z) + R_e\exp(ik_z z)\Big].$$

Это E-волна. При $\varphi' = \pi/2$ (в плоскости, перпендикулярной падению) будет

$$E_y = E_0\exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\Big[\exp(-ik_z z) + R_e\exp(ik_z z)\Big].$$

Это H-волна. При произвольном угле φ' будут обе волны. Усредняя квадраты поперечных амплитуд по углу φ', найдем $\tilde{E}_{\tau e}^2 = E_0^2\cos^2(\theta)/\pi$, $\tilde{E}_{\tau h}^2 = E_0^2/\pi$. Оба типа волн можно рассматривать как поперечные, идущие под углом $\theta = \arctan(q/k_z)$ к оси z. На графене имеют место поперечные амплитуды $E_{\tau(e,h)}(1 + R_{e,h}) = E_{\tau(e,h)}T_e$. Тепловые потери E-волны

$$Q_e = \mathrm{Re}(E_x j_x^* + E_y j_y^*)/2 = \mathrm{Re}\Big(\sigma^*|\mathbf{E}_{\tau e}|^2\Big)/2. \tag{26}$$

Здесь $\rho_e = 1/y_e = k_x/k_0 = \sqrt{k_0^2 - q^2}/k_0$ — нормированное волновое сопротивление, $T_e = 1+R_e = 2/2(2+\xi/y_e)$ коэффициент прохождения, выраженный через коэффициент отражения, поэтому $Q_e(\omega, \mathbf{q}) = 4\sigma' E_0^2\cos^2(\theta)/\Big(|2+\xi/y_e|^2\Big)/\pi$. Учитывая что $k_x = q\cos(\varphi)$, $k_y = q\sin(\varphi)$ (угол φ отсчитывается вокруг оси z), видим, что результат не зависит от угла, т.е. для учета всех углов φ (всех поляризаций) его следует умножить на 2π: $Q_e(\omega, q) = 8\sigma' q^2\langle E_0^2\rangle\cos^2(\theta)/\Big(k_0^2|2 + \xi/y_e|^2\Big)$. Это означает, что мы рассмотрели все возможные плоскости падения волн. Здесь мы взяли $\cos^2(\theta) = q^2/k_0^2$ и $E_0^2 = \langle E_0^2\rangle$. Скользящая E-волна ($\theta = \pi/2$) имеет только нормальную к графену компоненту поля, идет без отражения и не вносит вклад потери. Для учета всех углов падения следует проинтегрировать по углу $d\theta = \cos^2\theta dq(1 + q^2/k_z^2)/k_z = dq/k_z$. Для учета потерь от волн, падающих с другой стороны, результат следует удвоить:

$$Q_e(\omega) = 16\sigma'(\omega)\langle E_0^2(\omega)\rangle\int\limits_0^{k_0}\frac{k_z\,dq}{k_0^2|2 + \xi/y_e|^2}. \tag{27}$$

H-волна также идет под углом θ. Для нее

$$Q_h(\omega) = 16\sigma'(\omega)\langle E_0^2(\omega)\rangle\int\limits_0^{k_0}\frac{dq}{|2 + \xi/y_h|^2 k_z}. \tag{28}$$

Для определения потерь следует вычислить интегралы. При бесконечно малой проводимости интеграл в (27) равен $\pi/16$, а в (4) соответственно $\pi/8$, т.е. имеем $Q(\omega) = 3\sigma'(\omega)\langle E_0^2(\omega)\rangle$ или $Q(\omega) = 3\sigma'(\omega)\eta_0\Theta'(\omega, T)k_0^2/(2\pi^3)$, что в $9/(4\pi) = 0.717$ раз меньше, чем полученное значение в приближении наличия на графене планковской плотности излучения. Интегралы вычисляем путем замены $u^2 = k_0^2 - q^2$, $udu = -qdq$. Результаты принимают вид

$$I_e(\omega) = \int_0^{k_0} \frac{u^2 du}{\left[(2k_0 + \xi' u)^2 + \xi''^2 u^2\right]\sqrt{k_0^2 + u^2}}, \quad (29)$$

$$I_h(\omega) = \int_0^{k_0} \frac{u^2 du}{\left[(2u + \xi' k_0)^2 + \xi''^2 k_0^2\right]\sqrt{k_0^2 + u^2}}, \quad (30)$$

$Q(\omega) = 16\sigma'(\omega)\langle E_0^2(\omega)\rangle(I_e(\omega) + I_h(\omega))$. Интегралы вычислены в Приложении путем разложения корня. Таким образом, потери можно вычислить точно через ряд. Именно

$$Q_{e,h}(\omega) = 16\sigma'(\omega)\langle E_0^2(\omega)\rangle \times \left(I_{e,h}^{(0)} - \frac{1}{2} I_{e,h}^{(2)} + \frac{1}{2\cdot 4} I_{e,h}^{(4)} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} I_{e,h}^{(6)} + \ldots\right).$$

Приведенной результат можно рассматривать как падение плоских тепловых волн на плоскость графена под всевозможными углами. Следует отметить, что он сложным образом зависит от компонент проводимости ξ', ξ''.

Вычислим теперь тепловое излучение графена. Оно определяется вектором Пойнтинга $P_z = \mathrm{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*)/2$. Излучение бесконечного листа представляет собой плоскую волну. Имеем $H_y(\mathbf{q}) = -j_{0x}(\mathbf{q})$, $H_x(\mathbf{q}) = -j_{0y}(\mathbf{q})$ и для компонент полей получаем

$$E_x(\mathbf{r}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_0^2 - k_x^2) j_{0x}(\mathbf{q}) - k_x k_y j_{0y}(\mathbf{q})}{\omega\varepsilon_0 \tilde{k}_z(\mathbf{q})} \times \exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - i\tilde{k}_z|z|) d^2k, \quad (31)$$

$$H_y(\mathbf{r}) = \frac{-1}{8\pi^2} \mathrm{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} j_{0x}(\mathbf{q}') \exp(-i\mathbf{q}'\boldsymbol{\rho} - i\tilde{k}_z|z|) d^2k'. \quad (32)$$

Излучение ищем при $z > 0$. Образовывая корреляции и используя $\langle j_{0x}(q), j_{0y}(q')\rangle = 0$, $\langle j_{0x}(q), j_{0x}(q')\rangle = (2\pi)^2 F(\omega, T)\Theta(\omega, T)\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, получаем

$$\langle E_x(\boldsymbol{\rho}, +0), H_y(\boldsymbol{\rho}, +0)\rangle = \frac{F(\omega, T)\Theta(\omega, T)\eta_0}{8\pi k_0} \times \int_0^{k_0} \frac{k_0^2 - q^2/2}{\sqrt{k_0^2 - q^2}} q dq.$$

Здесь мы проинтегрировали по углу, учитывая $k_x^2 = q^2\cos^2(\varphi)$, а также распространили интегрирование только на излучаемые моды, т.е. взяли реальную часть интеграла, поскольку результат исчезает для эванесцентных мод при $q^2 > k_0^2$. Вычисляя, получаем

$$\langle E_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r})\rangle = \frac{\eta_0 F(\omega, T)\Theta'(\omega, T) k_0^2}{12\pi}.$$

Учитывая ортогональную поляризацию $-E_y$, H_x, этот результат следует удвоить:

$$P_z(\omega) = \frac{\eta_0 F(\omega, T)\Theta'(\omega, T) k_0^2}{6\pi}. \quad (33)$$

Поскольку волна плоская, результат не зависит от точки наблюдения. Это спектральная плотность. Величина $\eta_0 F(\omega, T)$ безразмерная, поэтому после интегрирования по частоте получаем плотность мощности в W/m^2. Полная корреляция вектора Пойнтинга в тепловом поле, согласно (22), равна нулю. Это означает, что есть противоположный (29) поток теплового поля в графен и поглощенная им мощность одностороннего потока $Q(\omega)/2 = \sigma'\eta_0\Theta'(\omega, T)k_0^2/(3\pi)$. Учитывая излучение в противоположную сторону и приравнивая величину потерь и излучения, получаем $F(\omega, T) = \sigma'/\pi$, что совпадает с моделью среды (2). Если же использовать результаты вычисления потерь через интегралы и принцип Кирхгофа, получим сложную формулу, которая при малой проводимости дает немного большее значение $F(\omega, T) = 9\sigma'(\omega)/(2\pi^2) \approx 0.456\sigma'(\omega)$.

Рассмотрим второй способ получения корреляций. Согласно (22), имеем

$$C_{xy}^{eh} = \langle E_x(\mathbf{r}_1), H_y(\mathbf{r}_2)\rangle = -i\Theta(\omega, T)\mathrm{Im}(E_{02x}(\mathbf{r}_1))/\pi, \quad (34)$$

где $E_{02x}(\mathbf{r}_1)$ — компонента поля второго (магнитного) диполя, ориентированного по оси y, взятая в точке расположения первого электрического диполя, ориентированного по оси x. В правой части (10) мы опустили $p_e/p_m = 1$ (S). Пусть первый диполь расположен в точке $\mathbf{r}_1 = (0, 0, z_1)$, а второй — в точке $\mathbf{r}_2 = 0$. Корреляция (34) в общем случае может быть записана как комплексная $C_{xy}^{eh} = P_{xy}^{eh} - iS_{xy}^{eh}$. Часть корреляции P_{xy}^{eh} соответствует вектору Пойнтинга и равна нулю [4]. Физически это означает, что имеются два компенсирующих потока мощности: от графена (вычисленный выше на основе функции F и пропорциональный диссипации σ'), и поток теплового поля в графен. Эта часть связана с тепловыми флуктуациями. Вторую часть следует связать с вакуумными флуктуациями. Они имеют место даже при $\sigma' = 0$ и не переносят энергию. Поэтому следует рассмотреть часть поля диполя, связанную с эванесцентными модами (ближним полем), при этом мы должны ввести новую функцию $\tilde{F}$, пропорциональную

$\eta_0\Theta$. Образуя корреляцию (10), имеем

$$\langle E_x(0,0,z), H_y(0)\rangle = \frac{\eta_0\tilde{F}(\omega,T)\Theta(\omega,T)}{8\pi k_0} \times \int_0^{\infty} \frac{k_0^2 - q^2/2}{\tilde{k}_z} \exp(-i\tilde{k}_z|z_1|)qdq, \quad (35)$$

$$C_{xy}^{eh} = P_{xy}^{eh} - iS_{xy}^{eh}, \quad (36)$$

$$P_{xy}^{eh} = \frac{\eta_0\tilde{F}(\omega,T)\Theta(\omega,T)}{8\pi k_0} \times \int_0^{k_0} \frac{k_0^2 - q^2/2}{\sqrt{k_0^2 - q^2}} \cos\Big(\sqrt{k_0^2 - q^2}|z_1|\Big)qdq, \quad (37)$$

$$S_{xy}^{eh} = \frac{\eta_0\tilde{F}(\omega,T)\Theta(\omega,T)}{8\pi k_0} \times \Big[\int_0^{k_0} \frac{k_0^2 - q^2/2}{\sqrt{k_0^2 - q^2}} \sin\Big(\sqrt{k_0^2 - q^2}|z_1|\Big)qdq + \int_{k_0}^{\infty} \frac{q^2/2 - k_0^2}{\sqrt{q^2 - k_0^2}} \exp\Big(-\sqrt{q^2 - k_0^2}|z_1|\Big)qdq\Big]. \quad (38)$$

Электрическая компонента падающего поля единичного магнитного диполя есть

$$E_{0mx} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-i\tilde{k}_z|z_1|\Big)d^2k, \quad (39)$$

а компонента рассеянного графеном поля равна

$$E_x(0,0,z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_x^2 - k_0^2)j_x(\mathbf{q})}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\tilde{k}_z} \exp\Big(-i\tilde{k}_z|z_1|\Big)d^2k, \quad (40)$$

где $j_x(\mathbf{q}) = j_x'(q) + i j_x''(q)$, а реальные и мнимые части приведены в Приложении (П4)–(П6). Эти величины пропорциональны единичному дипольному магнитному моменту $p_{0m} = m_0 = 1$ (который мы опустили), т.е. имеют обычную размерность [A·m] для спектральных величин. Компонента (39) действительная, и мы ее опускаем. Она исчезает при больших z_1 и обращается в бесконечность на графене, что связано с сингулярностью поля диполя. Компоненту (40) мы преобразуем к виду

$$E_x(0,0,z_1) = 4\int_0^{k_0} \frac{(q^2\cos(\varphi) - k_0^2)[j_x'(q) + i j_x''(q)]}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\sqrt{k_0^2 - q^2}} \times \exp\Big(-i\sqrt{k_0^2 - q^2}|z_1|\Big)qdqd\varphi + 4i\int_{k_0}^{\infty} \frac{(q^2\cos(\varphi) - k_0^2)[j_x'(q) + i j_x''(q)]}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\sqrt{q^2 - k_0^2}} \times \exp\Big(-\sqrt{q^2 - k_0^2}|z_1|\Big)qdqd\varphi,$$

в котором интегрирование по углу идет в области 0, $\pi/2$, а $k_x = q\cos(\varphi)$. Оставляя в этом выражении только мнимые части, получаем

$$\mathrm{Im}(E_x(0,0,z_1)) = -4\int_0^{k_0} \frac{(q^2\cos(\varphi) - k_0^2)j_x'(q)}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\sqrt{k_0^2 - q^2}} \sin\Big(\sqrt{k_0^2 - q^2}|z_1|\Big)qdqd\varphi + 4\int_0^{k_0} \frac{(q^2\cos(\varphi) - k_0^2)j_x''(q)}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\sqrt{k_0^2 - q^2}} \cos\Big(\sqrt{k_0^2 - q^2}|z_1|\Big)qdqd\varphi + 4\int_{k_0}^{\infty} \frac{(q^2\cos(\varphi) - k_0^2)j_x'(q)}{8\pi^2\omega\varepsilon_0\sqrt{q^2 - k_0^2}} \exp\Big(-\sqrt{q^2 - k_0^2}|z_1|\Big)qdqd\varphi.$$

Отсюда находим $S_{xy}^{eh} = \mathrm{Im}(E_x(0,0,z_1))$, что позволяет определить $\tilde{F}(\omega,T)$. Поскольку $\eta = -\xi/(2k_0\tilde{k}_z)$, то при $q < k_0$ $\eta' = -\xi'/(2k_0\tilde{k}_z)$, $\eta'' = -\xi''/(2k_0\tilde{k}_z)$, а при $q > k_0$ соответственно $\eta = -i\xi/(2k_0\kappa)$ и $\eta' = \xi''/(2k_0\kappa)$, $\eta'' = -\xi'/(2k_0\kappa)$. Интегрирование по углу выполним по теореме о среднем значении в средней точке $\pi/4$, т.е. взяв $k_x^2 = q^2/2$ и умножая результат на $\pi/2$. Обозначим (38) как

$$S_{xy}^{eh} = \frac{\eta_0\tilde{F}(\omega,T)\Theta(\omega,T)}{8\pi k_0} I_{xy}^{eh}.$$

Тогда $C_{xy}^{eh} = \langle E_x(\mathbf{r}_1), H_y(\mathbf{r}_2)\rangle = -i\Theta(\omega,T)\mathrm{Im}(\mathbf{E}_{02x}(\mathbf{r}_1))/\pi$, откуда получаем

$$\eta\tilde{F}(\omega,T) = \frac{8k_0\mathrm{Im}(E_x(0,0,z_1))}{I_{xy}^{eh}}, \quad (41)$$

$$\mathrm{Im}(E_x(0,0,z_1)) = 2\pi\eta_0 I_{1e} + 2\pi\eta_0 I_{2e}, \quad (42)$$

$$I_{1e} = \int_0^{k_0} \frac{(q^2/2 - k_0^2)j_x''(q)}{8\pi^2 k_0\sqrt{k_0^2 - q^2}} qdq, \quad (43)$$

$$I_{2e} = \int_{k_0}^{\infty} \frac{(q^2/2 - k_0^2)j_x'(q)}{8\pi^2 k_0\sqrt{q^2 - k_0^2}} \exp\Big(-\sqrt{q^2 - k_0^2}|z_1|\Big)qdq. \quad (44)$$

Первый интеграл (43) в выражении (42) связан с излучаемыми модами. В дальней зоне второй интеграл бесконечно мал, а при $z_1 = 0$ логарифмически расходится. В этих соотношениях $j'_x(q) = \eta_0^{-1}\tilde{j}'_x(q)$, $j''_x(q) = \eta_0^{-1}\tilde{j}''_x(q)$ и

$$\tilde{j}'_x(q) = -\frac{\xi' + \xi'\eta'(q^2/2 - k_0^2) + \xi''\eta''(q^2/2 - k_0^2)}{1 + 2\eta'(q^2/2 - k_0^2) + |\eta|^2(q^2/2 - k_0^2)^2}, \quad (45)$$

$$\tilde{j}''_x(q) = -\frac{\xi'' + \xi'\eta''(k_x^2 - k_0^2) + \xi''\eta'(k_x^2 - k_0^2)}{1 + 2\eta'(k_x^2 - k_0^2) + |\eta|^2(k_x^2 - k_0^2)^2}, \quad (46)$$

$$\eta' = \xi''/(2k_0\kappa), \quad \eta'' = -\xi'/(2k_0\kappa),$$

$$|\eta|^2 = |\xi|^2/(4k_0^2\kappa^2).$$

Поскольку $j'_x(q)$ и $j''_x(q)$ пропорциональны проводимости η_0^{-1}, функция $\tilde{F}$ имеет размерность проводимости. При больших q имеем $\eta' = \xi''/(2k_0q)$, $\eta'' = -\xi'/(2k_0q)$, $|\eta|^2 = |\xi|^2/(4k_0^2q^2)$ и

$$j'_x(q) = \frac{-\eta_0^{-1}\xi'}{1 + \xi''q/(2k_0) + |\xi|^2/(8k_0^2)^2}, \quad (47)$$

т.е. величины (45) и (46) стремятся к нулю. Вычисляя (41) при малых расстояниях, имеем

$$\tilde{F}(\omega, T) = \frac{2\eta_0^{-1}}{\pi}\,\frac{I_{1e} + I_{2e}}{\int\limits_{k_0}^{\infty} \frac{q^2/2 - k_0^2}{\sqrt{q^2 - k_0^2}}\exp\left(-\sqrt{q^2 - k_0^2}|z_1|\right) q\,dq}. \quad (48)$$

С учетом единичных электрического и магнитного дипольных моментов величину (45) следует считать безразмерной. Поэтому (48) имеет размерность проводимости. Результат для (48) получен в Приложении (П7).

Корреляция $C_{xx}^{ee} = \langle E_x(\mathbf{r}_1), E_x(\mathbf{r}_2)\rangle = -\Theta(\omega, T) \times \times \mathrm{Re}(E_{02x}(\mathbf{r}_1))/\pi$ и аналогичные ей связаны с энергией теплового поля и вакуумных флуктуаций, энергия которых расходится. Они не могут быть вычислены с использованием корреляций флуктуационных плотностей тока, поскольку расходится интеграл:

$$\langle E_x(\mathbf{r}), E_x(\mathbf{r}')\rangle = \frac{\eta_0^2 4\pi^2 \tilde{F}(\omega, T)\Theta(\omega, T)}{8\pi^2 8\pi^2 k_0^2}$$

$$\times 4\int\limits_{k_0}^{\infty} \frac{(k_0^2 - k_x^2)^2 + (k_x k_y)^2}{\tilde{k}_z(\mathbf{q})\tilde{k}_z^*(\mathbf{q})} \exp\Big(-i\mathbf{q}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$$

$$- i\tilde{k}_z|z| + i\tilde{k}_z^*|z'|\Big) d^2k.$$

Эта расходимость связана с появлением в знаменателе особенности $k_0^2 - q^2$, что можно трактовать как влияние бесконечной энергии вакуума. При $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ правая часть формулы (34) также расходится, поскольку поле диполя в точке его расположения имеет особенность.

4. Конечный лист графена

Рассмотрим, как конечные размеры листа L_x, L_y влияют на его излучение. Это намного более сложная задача, поскольку нельзя сразу на основе фурье-метода получить алгебраические соотношения, а надо решать интегральные уравнения (ИУ). Задача о возбуждении диполем приводит к поверхностному ИУ для плотности тока на диполе. В частности, разлагая ток в виде

$$L_x(x, y) = \sum_{m=1,n=0}^{N} \alpha_{nm}\cos((2m-1)\pi x/L_x)\cos(2n\pi y/L_y), \quad (49)$$

и аналогично J_y с коэффициентами β_{nm}, найдем электрическое поле как совокупность поля диполя и указанного тока. Поскольку $E_x = \sigma_{xx}^{-1}L_x(x, y)$, $E_y = \sigma_{yy}^{-1}L_y(x, y)$, это ИУ, из которого определяем коэффициенты α_{nm} и β_{nm} через дипольные моменты. Определение требует обращения матрицы высокого порядка. В результате можно получить корреляционные соотношения для коэффициентов α_{nm} и β_{nm}. Корреляции тока зависят от точки на листе графена и могут сильно возрастать у его краев. Из-за конечной проводимости бесконечного возрастания тока на краях нет. Тем не менее в конечном листе достигающие края ПП могут излучаться, а также могут существовать и краевые ПП. Все это усложняет расчет излучения в ближней и средней зоне.

С дугой стороны, рассматриваемая графеновая частица или кластер поддерживает локализованные плазмоны: колебания конечной добротности, которые излучают. Найти их комплексные собственные частоты можно методом поверхностного плазмонного резонанса [26]. Кластер графена возбуждается тепловым полем. Для его излучения необходимо использовать корреляции. При комнатной температуре максимум теплового излучения соответствует длине волны $10\,\mu$m. Важно соотношение размеров листа, этой длины волны и дистанции, на которой рассмотрено излучение. В дальней зоне можно взять в (49) два члена: дипольный и квадрупольный и использовать полученные выше корреляционные соотношения для бесконечного листа, считая их как средние значения.

Графен хорошо прозрачен [19], поэтому его тепловое излучение мало [6]. Для его оценки следует использовать модель проводимости графена. Наиболее точная формула с учетом пространственной дисперсии приведена в работе [20] (формула (8)). Она предполагает интегрирование по всей зоне Бриллюэна в модели сильной связи [21]. Однако учет пространственной дисперсии не существенен для сил Казимира–Лифшица, вклад в которые в основном вносят низкие частоты. Также не существенно влияние межзонной проводимости. Поэтому можно использовать простые модели проводимости, рассматривая дисперсия безмассовых дираковских фермионов (см. [22–25] и ряд других работ). Здесь используем проводимость в виде

$$\sigma(\omega, T) = \frac{\sigma(0, T)}{1 + i\omega/\omega_{c0}(\omega)}, \tag{50}$$

$$\sigma(0, T) = \frac{4\sigma_0 k_B T}{\pi\hbar\omega_{c0}} \ln\Big(2 + 2\cosh\Big(\frac{\mu_c}{k_B T}\Big)\Big), \tag{51}$$

где $\sigma_0 = e^2/(4\hbar) = 6.085 \cdot 10^{-5}$ S, $\sigma(0) = 4\sigma_0\mu_c/(\pi\hbar\omega_{c0})$, T — температура, μ_c — химический потенциал, ω_{c0} — частота столкновений. Мы пренебрегли межзонными переходами, существенными для оптических частот, которые почти не дают вклад в тепловое излучение. Формула (33) дает плотность излучения в ближней зоне вблизи центра листа

$$P_z \approx \frac{\eta_0\sigma(0)\omega_{c0}^2}{6\pi^2 c^2}\Bigg[(1 - \ln 2)\frac{\hbar(\omega_{c0})^2}{2} + k_B T\omega_{c0}\exp\Big(-\frac{\hbar\omega_{c0}}{k_B T}\Big) + \frac{(k_B T)^2}{\hbar}\Bigg]. \tag{52}$$

Для оценки мы разбили интеграл на две части: $(0, \omega_{c0})$ и (ω_{c0}, ∞). При $T = 300$ K, $\mu_c = 0.1$ eV и при весьма большом значении $\omega_{c0} = 4 \cdot 10^{13}$ Hz имеем результат $P_z = 9.37\,\mathrm{W/m^2}$, что примерно в 50 раз меньше излучения абсолютно черного тела. Это связано с тем, что графен практически (на 98%) прозрачен [19]. Реальная частота столкновений может быть на два порядка меньше, т. е. излучение может уменьшиться примерно еще на 4 порядка.

Дальняя зона для кластера $L_x = L_y = 100\,\mu$ наступает на расстоянии 1 mm и более. В ней важно дипольное излучение. Рассмотрим графеновый кластер как два перпендикулярных диполя с дипольными моментами $p_{ex} = J_x(0)L_x L_y$ и $p_{ey} = J_y(0)L_x L_y$. Записывая поля в дальней зоне кластера [18] и вектор Пойнтинга, имеем

$$P_r(\omega) = \frac{k_B\eta_0\sigma(0)L_x L_y}{16\pi^3 r^2 c(1 + \omega^2/\omega_{c0}^2)} \times \frac{\hbar\omega^2}{\exp(\hbar\omega/(k_B T)) - 1}\sin^2(\theta). \tag{53}$$

Размерность спектрального выражения (53) $\mathrm{J/m^2}$. После интегрирования по частоте она будет $\mathrm{W/m^2}$. Такой интеграл легко вычислить, считая температуру либо очень малой и пренебрегая частотами $\omega < k_B T/\hbar$, либо очень большой. Для малых температур и малой частоты столкновений получаем

$$P_r = \frac{k_B T\eta_0\sigma(0)\omega_{c0}^2 k_0 L_x L_y}{16\pi^3 r^2 c} \times[1 - \exp(-\hbar\omega_{c0}/(k_B T))]\sin^2(\theta).$$

Безразмерная величина проводимости $\eta_0\sigma(0)$ мала, как мала и энергия $k_B T$. Также $L_x L_y/r^2 \ll 1$. Поэтому такое излучение весьма мало. Альтернативный случай больших температур приводит к формуле

$$P_r(\omega) = \frac{\omega_{c0}^2 k_B T\eta_0\sigma(0)L_x L_y}{16\pi^3 r^2 c} \times\Bigg[\frac{k_B T}{\hbar} - \omega_{c0}\arctan\Big(\frac{k_B T}{\hbar\omega_{c0}}\Big)\Bigg]\sin^2(\theta). \tag{54}$$

Результат сильно зависит от соотношений между μ_c, ω_{c0} и температурой. При малой частоте столкновений он пропорционален квадрату температуры. На расстоянии $r = 1$ mm при $\theta = \pi/2$ этот результат на порядок меньше, чем приведенный выше.

Заключение

Приведенные соотношения можно использовать для определения теплового излучения и дисперсионных сил. Однако уже для взаимодействия двух листов графена соотношения сильно усложняются, поскольку кроме флуктуационных источников возникают дифракционные источники (плотности токов), обусловленные взаимодействием листов. Также усложняется задача о возбуждении структуры из двух листов диполями. Решения таких задач позволяет альтернативным способом получить формулу для взаимодействия листов графена, как это сделано в [4] для формулы Лифшица для полуплоскостей. Преимуществом метода работы [4] является то, что можно использовать теплопередачу между телами с разной температурой, находящимися в тепловом поле, температура которого также отличается от температуры тел. Сложность состоит в том, что необходимо строить ФГ структуры, т. е. решать задачи о возбуждении ее точечными источниками. Вдоль поверхностей тел возможны ПП, которые могут быть как медленными поверхностными, так и быстрыми излучаемыми. В работах [10–13] сила Казимира определена на основе дисперсионных уравнений для ПП. В работах [27,28] показана тесная связь дисперсионных сил и КС с плазмон-поляритонами в диссипативных структурах.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00226) и при поддержке Министерства образования и науки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2026-0006).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Е.М. Лифшиц. ЖЭТФ, **29**, 1, 94 (1955).
[2] М.В. Давидович. Phys. Usp., **53** 595 (2010). DOI: 10.3367/UFNe.0180.201006e.0623
[3] М.В. Давидович. Опт. и спектр., **131** (9), 1224 (2023). DOI: 10.61011/OS.2023.09.56609.3990-23 [M.V. Davidovich. Opt. Spectr., **131** (9), 1224 (2023). DOI: 10.61011/OS.2023.09.56609.3990-23]
[4] М.В. Левин, С.М. Рытов. *Теория равновесных тепловых флюктуаций в электродинамике* (Наука, М., 1967) [M.V. Levin, S.M. Rytov. *Theory of equilibrium thermal fluctuations in electrodynamics* (Nauka, M., 1967)]
[5] С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля* (Наука, М., 1978) [S.M. Rytov, Yu.A. Kravtsov, V.I. Tatarsky. *Introduction to statistical radiophysics. Part 2. Random Fields* (Nauka, M., 1978)]
[6] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния* (Наука, М., 1978)
[7] W.M.R. Simpson, U. Leonhardt. *Forces of the quantum vacuum: an introduction to Casimir physics*, ed. W.M.R. Simpson (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015)
[8] H.B.G. Casimir. Proc. K. Ned. Akad. Wet., **51**, 793 (1948).
[9] М.В. Давидович, О.Е. Глухова. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Физика, **23** (2), 167 (2023). [M.V. Davidovich, O.E. Glukhova. Izvestiya of Saratov University Physics, **23** (2), 167 (2023). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-2-167-178]
[10] N.G. Van Kampen, B.R.A. Nijboer, K. Schram. Phys. Lett. A, **26**, 307 (1968). DOI: 10.1016/0375-9601(68)90665-8
[11] K. Schram. Phys. Lett. A, **43** (3), 282 (1973). DOI: 10.1016/0375-9601(73)90307-1%20
[12] S.K. Lamoreaux. Reps. Progr. Phys., **65**, 201 (2005). DOI: 10.1088/0034-4885/68/1/R04
[13] P.W. Milonni. *The Quantum Vacuum* (San Diego, CA: Academic, 1994)
[14] М.В. Давидович. ЖТФ, **94** (3), 385 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57376.312-23 [M.V. Davidovich. Tech. Phys., **69** (3), 365 (2024).]
[15] М.В. Давидович. Письма в ЖЭТФ, **109** (11), 804 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19110146
[16] M. Davidovich. *Dispersion interaction of two graphene sheets*, arXiv:2508.17999 (2025). https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.17999.
[17] J. Schwinger, L.L. DeRaad, K.A. Milton. Ann. Phys., **115** (1), 676 (1978). DOI: 10.1016/0003-4916(78)90172-0
[18] Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. *Возбуждение электромагнитных волн* (Радио и связь, М., 1983)
[19] Л.А. Фальковский. УФН, **178** (9), 923 (2008). DOI: 10.1070/PU2008v051n09ABEH006625
[20] L.A. Falkovsky, A.A. Varlamov. Eur. Phys. J. B, **56**, 281 (2007). DOI: 10.1140/epjb/e2007-00142-3
[21] R. Wallace. Phys. Rev., **71**, 9, 622 (1947). DOI: 10.1103/PHYSREV.71.622
[22] G.W. Hanson. J. Appl. Phys., **103**, 064302 (2008). DOI: 10.1063/1.2891452
[23] G. Lovat, G.W. Hanson, R. Araneo, P. Burghignoli. Phys. Rev. B, **87**, 115429 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.115429
[24] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. Rev. Mod. Phys., **81**, 109 (2009). DOI: 10.1103/RevModPhys.81.109
[25] S. Das Sarma, S. Adam, E.H. Hwang, E. Rossi. Rev. Mod. Phys., **83** (2), 407 (2011). DOI: 10.1103/RevModPhys.83.407
[26] М.В. Давидович. ЖТФ, **95** (5), 865 (2025). DOI: 10.61011/JTF.2025.05.60276.438-24 [M.V. Davidovich. Tech. Phys., **70** (5), 813 (2025). DOI: 10.61011/TP.2025.05.61117.438-24]
[27] F. Intravaia, R. Behunin. Phys. Rev. A, **86**, 062517 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.86.062517.
[28] F. Intravaia. Intern. J. Modern Phys. A, **37** (19), 2241014 (2022). DOI: 10.1142/S0217751X22410147

Приложение

Интегралы (4.5), (4.6) имеют вид

$$I_{e.h}=\int\limits_0^{k_0}\frac{u^2du}{(au^2+bu+c)\sqrt{k_0^2+u^2}},$$

где для E-волн $a=|\xi|^2$, $b=4k_0\xi'$, $c=4k_0^2$, а для H-волн $a=4$, $b=4k_0\xi'$, $c=|\xi|^2k_0^2$. Интегралы вычисляем путем разложения корня ($x=u/k_0$):

$$\frac{1}{k_0\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{k_0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\right).$$

Имеем интегралы

$$I_{e.h}^{(n)}=\int\limits_0^1\frac{x^ndx}{(ax^2+bx+c)},$$

где для E-волн $a=|\xi|^2$, $b=4\xi'$, $c=4$, а для H-волн $a=4$, $b=4\xi'$, $c=|\xi|^2$. Интегралы $I_{e,h}^{(0)}$ получаем по формуле (160.01):

$$I_{e.h}^{(0)}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\left[\arctan\left(\frac{2a+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)-\left(\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right].$$

Интегралы $I_{e.h}^{(1)}$ поучаем по формуле (156.11), а интегралы $I_{e.h}^{(2)}$ — по формуле (160.21). Все остальные интегралы получаем по рекуррентной формуле

$$I_{e.h}^{(n)}=\frac{1}{(n-1)a}-\frac{c}{a}I_{e.h}^{(n-2)}-\frac{b}{a}I_{e.h}^{(n-1)}.$$

Делая замену $u^2=k_0^2-q^2$, $qdq=-udu$ в первом интеграле (4.24) и $u^2=q^2-k_0^2$, $qd=udu$ в остальных, величину (4.24) в пренебрежении первым интегралом преобразуем к виду

$$\tilde{F}(\omega,T)=\frac{2\eta_0^{-1}}{\pi}\frac{\tilde{I}_{1e}+\tilde{I}_{2e}}{\int\limits_0^\infty(u^2-6k_0^2)\exp(-u|z_1|)du},\qquad(\text{П1})$$

$$\tilde{I}_{1e} = -\int_0^{k_0} (u^2 + k_0^2)\tilde{j}_x''(u)du, \quad (\Pi 2)$$

$$\tilde{I}_{2e} = \int_{k_0}^{\infty} (u^2 - 6k_0^2)\tilde{j}_x'(u)\exp(-u|z_1|)du. \quad (\Pi 3)$$

Интеграл в знаменателе имеет значение $6k_0^2/|z_1| - 2/|z_1|^3$. Интеграл (П3) в числителе (П1) вычисляем с учетом, что в него входит функция $\Phi(u) = (u^2 - 6k_0^2)\tilde{j}_x'(u)$, где

$$\tilde{j}_x'(u) = -\frac{16k_0^2u^2\xi'}{16k_0^2u^2 + 8k_0u\xi''(u^2 - k_0^2) + |\xi|^2(u^2 - k_0^2)^2}. \quad (\Pi 4)$$

Она имеет нуль второго порядка. Интеграл вычисляем интегрированием по частям. В силу указанного нуля первые два интегрирования дают при подстановке нуль, и получаем значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \Phi(u)\exp(-u|z_1|)du = \frac{1}{|z_1|^2}\int_0^{\infty} \Phi''(u)\exp(-u|z_1|)du$$

$$= \frac{\Phi''(0)}{|z_1|^3} + \frac{1}{|z_1|^3}\int_0^{\infty}\Phi'''(u)\exp(-u|z_1|)du.$$

При больших u функция $\Phi'''(u)$ убывает быстрее, чем $1/u^2$, поэтому интеграл имеет значение даже при $|z_1| = 0$. При малых $|z_1|$ имеем

$$\tilde{F}(\omega, T) = \frac{-\eta_0^{-1}}{\pi(1 - 3k_0^2|z_1|)}\int_0^{\infty} \Phi''(u)\exp(-u|z_1|)du. \quad (\Pi 5)$$

При больших u функция $\Phi''(u)$ убывает не медленнее, чем $1/u^2$, поэтому интеграл имеет значение даже при $|z_1| = 0$.

Входящая в (4.16) компонента плотности тока определена как

$$j_x(\mathbf{q}) = -\frac{\eta_0^{-1}\xi}{1 + \eta(k_x^2 - k_0^2)}$$

$$= -\frac{\eta_0^{-1}(\xi' + i\xi'')\left[1 + \eta^*(k_x^2 - k_0^2)\right]}{1 + 2\eta'(k_x^2 - k_0^2) + |\eta|^2(k_x^2 - k_0^2)^2}, \quad (\Pi 6)$$

$$j_x'(\mathbf{q}) = -\eta_0^{-1}\frac{\xi' + \xi'\eta'(k_x^2 - k_0^2) + \xi''\eta''(k_x^2 - k_0^2)}{1 + 2\eta'(k_x^2 - k_0^2) + |\eta|^2(k_x^2 - k_0^2)^2}, \quad (\Pi 7)$$

$$j_x'(\mathbf{q}) = -\eta_0^{-1}\frac{\xi'' + \xi'\eta''(k_x^2 - k_0^2) + \xi''\eta'(k_x^2 - k_0^2)}{1 + 2\eta'(k_x^2 - k_0^2) + |\eta|^2(k_x^2 - k_0^2)^2}. \quad (\Pi 8)$$

Интеграл (П2) имеет вид

$$\tilde{I}_{1e} = -\xi''\int_0^{k_0}\frac{(u^2 + k_0^2)\left[16(k_0u)^2 - 2\xi'(u^2 + k_0^2)\right]}{16(k_0u)^2 + 8k_0u\xi'(u^2 + k_0^2) - |\xi|^2(u^2 + k_0^2)^2}du.$$

Он довольно сложный, поэтому требует численного вычисления. При малой проводимости $\tilde{I}_{1e} = -4\xi''k_0^3/3$, и тогда

$$\tilde{F}(\omega, T) = \frac{2\eta_0^{-1}}{\pi}$$

$$\times\frac{4|z_1|^3\xi''k_0^3/3 + \Phi''(0) + \int_0^{\infty}\Phi''(u)\exp(-u|z_1|)du}{2 - 6k_0^2|z_1|}$$

$$\approx \frac{\eta_0^{-1}}{\pi}\left[\Phi''(0) + \int_0^{\infty}\Phi''(u)du\right]. \quad (\Pi 9)$$